Institut für Theoretische Physik
Universität zu Köln

Prof. Dr. S. Trebst
Christoph Berke

Statistische Physik

Blatt 7

WS 2020/21

Abgabe: Montag, **21.12.2020**, 10:00 Uhr **Besprechung**: Dienstag, 22.12.2020
Webseite: www.thp.uni-koeln.de/trebst/Lectures/2020-StatPhys.shtml

Aufgabe 24: Bose-Einstein-Kondensation (9 + 5 Punkte)

Bei endlichen Temperaturen verteilen sich Teilchen typischerweise auf unterschiedliche quantenmechanische Zustände. Für Fermionen ist es aufgrund des Pauli-Prinzips sogar ausgeschlossen, dass sich mehrere Teilchen im gleichen Zustand aufhalten. Für Bosonen tritt jedoch unterhalb einer kritischen Temperatur T_c das Phänomen der **Bose-Einstein-Kondensation** (BEC) auf, bei dem eine makroskopische Anzahl von Bosonen den gleichen quantenmechanischen Zustand besetzt. Wir betrachten zunächst das **uniforme** Bose-Gases, bei dem N Bosonen der Masse m in einem Kasten mit Volumen V eingeschlossen sind. Die Einteilchenenergien sind durch $\epsilon = \frac{p^2}{2m}$ gegeben, wobei $p = |\vec{p}|$ der Betrag des Impulses ist.

a) **Bonusaufgabe:** Berechnen Sie die Zustandsdichte $D(\epsilon)$ des Bose-Gases in d Dimensionen:

$$D\left(\epsilon\right) = \sum_{\vec{p}} \delta\left(\epsilon - \epsilon_{\vec{p}}\right) = \frac{V}{\left(2\pi\hbar\right)^d} \int \mathrm{d}^d p \; \delta\left(\epsilon - \epsilon_{\vec{p}}\right) \tag{1}$$

b) Wie lautet die mittlere Besetzung $n_\epsilon(\mu, T)$ eines Einteilchenzustandes?

Im Folgenden betrachten wir den Fall $d = 3$ mit der Zustandsdichte $D(\epsilon) = \frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\sqrt{\epsilon}$.

c) Skizzieren Sie n_ϵ für fixiertes μ und β. Zeichnen Sie ebenfalls $D(\epsilon)$ in ihre Skizze und eine Vertikale bei $\epsilon = \mu$ ein. Wählen Sie z.B. $\mu = -0.5$ und $T = 2$ und setzen Sie $V = h = m = k_B = 1$. Begründen Sie, warum $\mu < 0$ gilt. Welche Werte kann die Fugazität $z = e^{\beta\mu}$ annehmen?

d) Wir fixieren jetzt die Teilchenanzahl N. Zeigen Sie, dass sich die Teilchenanzahl als

$$N_{\text{ex}} = \frac{V\left(2\pi m k_B T\right)^{3/2}}{h^3} g_{3/2}(z) \tag{2}$$

schreiben lässt, wobei

$$g_{3/2}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx \frac{\sqrt{x}}{e^x z^{-1} - 1} \tag{3}$$

ist, und $x = \beta\epsilon$. (Die Bedeutung des Index in N_{ex} betrachten wir in (e).)
Hinweis: Schreiben Sie N als Integral über alle Energien und berücksichtigen Sie für jede Energie die korrekte Zustandsdichte und Besetzungszahl.

e) Die Funktion $g_{3/2}(z)$ wächst monoton als Funktion von z. Folgern Sie hieraus und aus Gl. (2), dass $\mu(T)$ bei sinkenden Temperaturen gegen die obere Schranke aus (c) laufen muss. Angenommen, die obere Schranke wird bei einer Temperatur T_c erreicht, was folgt dann aus Gl. (2) für die Teilchenzahl wenn die Temperatur weiter abgesenkt wird? Gl. (2) ist also eigentlich ein Ausdruck für die Anzahl der Teilchen in **angeregten Zuständen**. Warum muss der Grundzustand bei der Berechnung von N separat betrachtet werden?

Der Anteil der Teilchen im Grundzustand, N_0, ist also nicht in Gl. (2) enthalten und muss separat betrachtet werden. Wir wollen nun einen Ausdruck für die Besetzung des Grundzustandes als Funktion der Temperatur herleiten. Bei hohen Temperaturen sind nur angeregte Zustände besetzt ($N = N_{\mathrm{ex}}$). Sinkt die Temperatur, nähert sich μ an 0 an. Dieser Wert wird bei T_c erreicht. Direkt am Übergang ist der Grundzustand immer noch quasi unbesetzt $N \approx N_{\mathrm{ex}}$ und damit beschreibt Gl. (2) die Teilchenanzahl korrekt.

f) Berechnen Sie aus Gl. (2) die kritische Temperatur T_c als Funktion der Teilchendichte N/V. Benutzen Sie dabei, dass $g_{3/2}(1) \approx 2.612$.

g) Jetzt betrachten wir Temperaturen $T \leq T_c$. Zeigen Sie, dass sich für die Besetzung des Grundzustandes N_0 die Gleichung

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} \tag{4}$$

ergibt. Skizzieren Sie $N_0(T)/N$ für $0 \leq T \leq 2T_c$.

h) **Bonusaufgabe:** Zeigen Sie, dass in d Dimensionen gilt

$$N - N_0 = V\left(\frac{mk_BT}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{d}{2}} g_{d/2}(z), \tag{5}$$

wobei

$$g_\nu(z) = \tfrac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^\infty \mathrm{d}x \tfrac{x^{\nu-1}}{z^{-1}e^x-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^\nu}. \tag{6}$$

In der Literatur findet man die Funktionen $g_\nu(z)$ manchmal unter dem Namen **Bose-Einstein-Funktionen**. Tritt Kondensation des Bose-Gases auch in 2D auf?
Hinweis: Gehen Sie analog zu Teil (d) vor. Benutzen Sie den Zusammenhang $\Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2})}$ zwischen dem Raumwinkel Ω_d in d Dimensionen und der Γ-Funktion. Für $z = 1$ wird $g_\nu(z)$ zur Riemannschen ζ-Funktion $\zeta(\nu)$.

Aufgabe 25: BEC in Atomfallen (6 + 3 Punkte)

Beim erstmaligen experimentellen Nachweis eines Bose-Einstein-Kondensats durch Cornell, Ketterle und Wieman (1995, Nobelpreis 2001) wurden Alkali-Atome in optischen Fallen abgekühlt. Diese Fallen erzeugen ein i.A. asymmetrisches Oszillatorpotential

$$V(x,y,z) = \frac{m}{2}\left(\omega_x^2x^2 + \omega_y^2y^2 + \omega_z^2z^2\right) \tag{7}$$

Die Einteilchen-Energien sind dann durch

$$E_{\vec{n}} = E_{\{n_x,n_y,n_z\}} = \hbar\left[\omega_x\left(n_x + \frac{1}{2}+\right) + \omega_y\left(n_y + \frac{1}{2}+\right) + \omega_z\left(n_z + \frac{1}{2}+\right)\right] \tag{8}$$

gegeben, wobei $n_i \in \mathbb{N}$. Die Grundzustandsenergie ist $E_0 = \frac{\hbar}{2}(\omega_x + \omega_y + \omega_z)$.

a) Betrachten Sie den im Falle von Bose-Einstein-Kondensation makroskopisch besetzten Zustand. Welche Wellenfunktion hat dieser in Orts- und Impulsdarstellung? Welches Volumen V nimmt das Kondensat in diesem Zustand ein? Worin besteht der qualitative Unterschied zu der Wellenfunktion des uniformen Bose-Gases?

b) Wir betrachten jetzt N Bosonen im Potential V. Zeigen Sie, dass

$$N = \frac{\tilde{z}}{1-\tilde{z}} + \sum_{j}^{\infty} \tilde{z}^j \sum_{\vec{n}\neq\vec{0}} e^{-j\beta\tilde{E}_{\vec{n}}} \tag{9}$$

gilt, wobei die von den n_i unabhängige Grundzustandsenergie mit in die Fugazität gezogen wurde, also $\tilde{z} = ze^{-\beta E_0}$ und $\tilde{E}_{\vec{n}} = E_{\vec{n}} - E_0$. Der zweite Summand beschreibt die Teilchen in angeregten Zuständen. Werten Sie die Summe durch Übergang zum Integral,

$$\sum_{n_x,n_y,n_z} \to \int_0^\infty \mathrm{d}n_x \int_0^\infty \mathrm{d}n_y \int_0^\infty \mathrm{d}n_z \tag{10}$$

aus, um $N - N_0$ als Funktion der Temperatur zu finden. Zeigen Sie, dass $\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^3$ gilt und berechnen Sie die kritische Temperatur T_c. Begünstigt oder erschwert ein äußeres Potential das Auftreten von Bose-Einstein-Kondensation?

c) **Bonusaufgabe:** Gibt es in der Atomfalle auch schon Bose-Einstein-Kondensation in 2D? *Hinweis: Wiederholen Sie die Auswertung der Integrale in (b) für $d = 2$.*