
Statistische Physik

Blatt 9

WS 2020/21

Abgabe: Montag, **18.01.2021**, 10:00 Uhr

Besprechung: Dienstag, 19.01.2021

Webseite: www.thp.uni-koeln.de/trebst/Lectures/2020-StatPhys.shtml

Aufgabe 30: Wärme als unvollständiges Differential (4 Punkte)

Der erste Hauptsatz der Thermodynamik kann in der Form

$$dE = dQ - p dV \quad (1)$$

geschrieben werden.

a) Zeigen Sie, dass die Beziehung

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = 0 \quad (2)$$

gelten müsste, **falls** dQ ein totales Differential wäre. Ersetzen Sie dafür in Gleichung (1) das **totale** Differential von $E(T, V)$. Warum gilt die Aussage von Gleichung (2) nicht?

b) Für ein ideales Gas gilt

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = 0, \quad \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = C_V = \text{const} \quad (3)$$

Schreiben Sie dQ in der Form $dQ = a dT + b dV$ und bestimmen Sie a und b . Berechnen Sie anschließend einen integrierenden Faktor $\mu = \mu(T)$, so dass $d\tilde{Q} = \mu(T)dQ$ ein totales Differential ist. Berechnen und interpretieren Sie \tilde{Q} .

Aufgabe 31: Wärmepumpe vs. Heizung (3 Punkte)

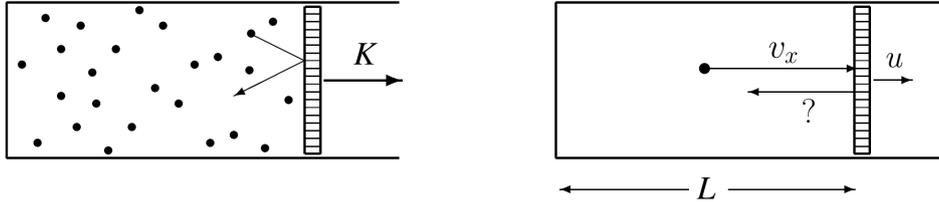
Eine **Wärmepumpe** operiert als Carnot-Prozess zwischen der Außentemperatur T_A und der Raumtemperatur $T_R > T_A$. Der Raum gibt mit der Rate $r = \alpha(T_R - T_A)$ Wärme nach außen ab, wobei α eine Konstante ist. Die Pumpe wirkt diesem Wärmefluss entgegen. Sie wird mit der **Leistung** P betrieben.

a) Berechnen Sie die Raumtemperatur im Gleichgewicht, T_R^g , als Funktion von T_A , α und P .

b) Die Wärmetemperatur wird durch eine Heizung ersetzt, die mit gleicher Leistung betrieben wird und diese zu 100% in Wärme umsetzen kann. Ist die Heizung effektiver als die Wärmepumpe?

Aufgabe 32: Druck des idealen Gases (4 Punkte)

Wir betrachten ein ideales Gas aus N Teilchen in einer Box mit Seitenlängen L_x, L_y, L_z . Eine Seitenwand kann durch einen Kolben bewegt werden. Als veränderlichen Parameter wählen wir die Seitenlänge $L = L_x$. Die Kolbenverschiebung sei quasistatisch, sodass sich immer ein neues Gleichgewicht einstellen kann.



Die mikroskopische Definition des Drucks als verallgemeinerte Kraft lautet

$$p = - \left\langle \frac{\partial E_r}{\partial V} \right\rangle, \quad (4)$$

wobei der Index r die Mikrozustände des Systems charakterisiert, d.h.

$$r = \begin{cases} (n_1, \dots, n_{3N}), & \text{quantenmechanisch,} \\ (\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_N, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N), & \text{klassisch.} \end{cases} \quad (5)$$

Die n_i sind hier die Impulsquantenzahlen und die q_i, p_i klassische Positionen und Impulse.

- a) Betrachten Sie das Gas quantenmechanisch. Wie lautet die Energie E_r des Systems in einem Mikrozustand? Berechnen Sie den Druck $p(E, V)$ des Systems.
- b) Betrachten Sie das Gas nun klassisch.
 - (i) Wir schauen uns ein einzelnes Atom genauer an: Die Reflexion dieses Atoms an der bewegten Wand erhöht oder verringert dessen kinetische Energie ϵ , je nachdem ob das Volumen gerade verkleinert oder vergrößert wird. Berechnen Sie die Energieänderung $\Delta\epsilon$ indem Sie die Reflexion im Ruhesystem des Kolbens betrachten.
 - (ii) Wie lange (Δt) dauert es bis das Atom nach einer Reflexion erneut an der bewegten Wand reflektiert wird? Wie weit (ΔL) hat sich die Seitenwand in dieser Zeit bewegt?
 - (iii) Zeigen Sie, dass $\Delta\epsilon = -2\epsilon_x \frac{\Delta L}{L} + \mathcal{O}((\Delta L)^2)$, mit $\epsilon_x = \frac{1}{2}mv_x^2$ gilt.
 - (iv) Mitteln Sie über alle N Teilchen um zu zeigen, dass $p = \frac{2}{3} \frac{E}{V}$ gilt.

Aufgabe 33: Maxwell'scher Dämon (4 Punkte)

If someone points out to you that your pet theory of the universe is in disagreement with Maxwell's equations – then so much the worse for Maxwell's equations. If it is found to be contradicted by observation – well, these experimentalists do bungle things sometimes. But if your theory is found to be against the second law of thermodynamics I can give you no hope; there is nothing for it but to collapse in deepest humiliation.

Sir Arthur Stanley Eddington

Die Aussage des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik ist, dass ein Perpetuum mobile 2. Art unmöglich ist. Der **Maxwellsche Dämon** möchte trotzdem versuchen, ein solches zu konstruieren. Zwei Varianten dieses Dämons sind in Abbildung 1 skizziert. Kernstück beider Varianten ist eine Trennwand in der Mitte einer mit Gas gefüllten Box, die vom Dämon ohne Energieaufwand geöffnet und geschlossen werden kann.

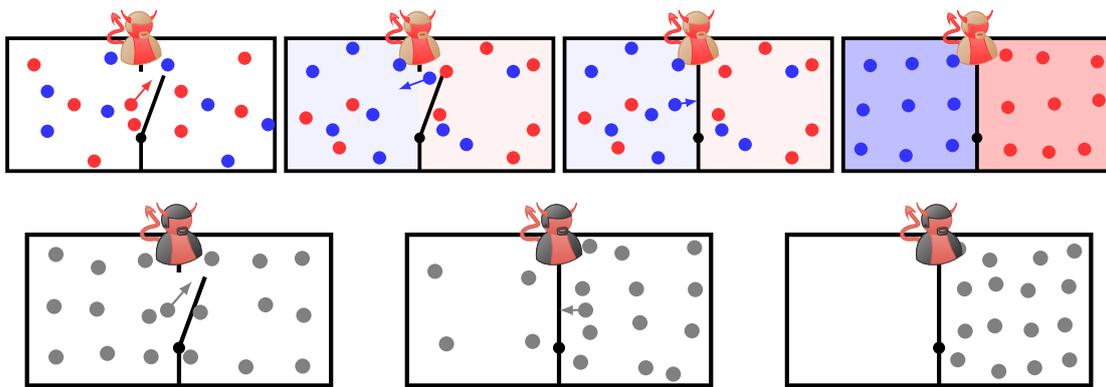


Abbildung 1: Zwei Varianten des Maxwell'schen Dämons: Der Temperatur-Dämon (oben) und der Druck-Dämon (unten). Gasteilchen, deren Geschwindigkeit größer als die durchschnittliche Geschwindigkeit ist, sind rot markiert. Blaue Teilchen sind langsamer.

- a) Erklären Sie anhand von Abbildung 1 in wenigen Sätzen (ohne Formeln) die Funktionsweise des **Temperatur-Dämons**, bzw. des **Druck-Dämons**.

Wir betrachten jetzt ein einfacheres Modell, bestehen aus einem einzelnen Atom in einer Box, in Kontakt mit einem Reservoir der Temperatur T . Sobald das Atom in der linken Hälfte der Box ist, fügen wir in der Mitte eine Trennwand ein. Danach lassen wir das Gas isotherm expandieren. Dabei wird dem Reservoir Wärme entzogen. Anschließend beginnt der Prozess von vorne.

- b) Berechnen Sie die Entropieänderung des Reservoirs in einem Durchlauf.

Der 2. Hauptsatz gilt nur für abgeschlossene Systeme. Wir müssen also den Dämon mit in unsere Überlegungen einbeziehen.

- c) Retten Sie den 2. Hauptsatz mit Hilfe des Landauer-Prinzips, das besagt, dass das Löschen eines Bits Information die Entropie $S = k_B \ln 2$ erzeugt.

Das hier besprochene Gedankenexperiment wurde im Jahr 1871 von James C. Maxwell veröffentlicht. Seitdem wurde diese Idee oft aufgegriffen und erweitert. Die von Leo Szilard (1929) vorgeschlagene Vereinfachung, die wir in (b) besprochen haben, hat zum ersten mal – wenn auch noch vage – einen Zusammenhang zwischen Entropie und Information aufgezeigt, und damit zur Grundlage der Informationstheorie beigetragen. Der Maxwell'sche Dämon hat es auch außerhalb der Physik zu einiger Bekanntheit gebracht, und etwa Eingang in [Literatur](#) oder [Comics](#) gefunden.