Institut für Theoretische Physik
Universität zu Köln

Prof. Dr. S. Trebst
Christoph Berke

Statistische Physik

Blatt 0

Wintersemester 2023/24

Abgabe: Keine Abgabe (Präsenzübung) **Besprechung**: Dienstag, 10.10.2023
Webseite: https://www.thp.uni-koeln.de/trebst/Lectures/2023-StatPhys.shtml

Aufgabe 1: Wie wahrscheinlich ist das denn?

a) Zu der Vorlesung "Statistische Physik" haben sich 70 Studierende angemeldet. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Studierende am selben Tag Geburtstag haben?

b) Bei einem **Skatspiel** werden von 32 Karten jeweils zehn auf drei Spieler verteilt und zwei Karten bleiben übrig (10+10+10+2). Wie viele mögliche Ausgangssituationen gibt es? Skat wird in Deutschland seit 1813 gespielt. Wenn im Durchschnitt jede Sekunde ein Spiel gestartet wird und noch nie ein Spiel zweimal vorkam, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass Sie heute ein Spiel mit einer Kartenverteilung anfangen, die es bereits einmal gegeben hat? Wie viele Möglichkeiten ergeben sich für die Karten eines einzelnen Spielers?

c) Ein **Doppelkopfspiel** besteht aus zwei identischen Kartenspielen zu jeweils 20 Karten. Was macht die Berechnung der Kombinationen schwieriger als in Teil b)? Machen Sie sich den Unterschied anhand der beiden Kartenspiele $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $\{1, 1, 2, 2, 3, 3\}$ klar.

Aufgabe 2: Traue keiner Statistik …

a) Eine medizinischen Studie (ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC1339981/) vergleicht die Wirksamkeit zweier unterschiedlicher Behandlungen A und B bei Nierensteinen. Das Ergebnis ist in Tabelle 1 zusammengefasst. Welche Methode ist *insgesamt* besser? Für welche Methode entscheiden Sie sich, wenn Sie wissen, ob die Nierensteine groß oder klein sind?

Tabelle 1 – Wirksamkeit der Behandlungsmethoden A und B bei Nierensteinen (Nst).

	A hilft	B hilft
kleine Nst	55/80	192/263
große Nst	234/270	81/87

Bei der Durchführung medizinischer Tests zur Erkennung von Krankheiten können die Ergebnisse *echt negativ* (gesunde Person, negativer Test), *echt positiv* (krank, positiver Test), *falsch negativ* (krank, negativer Test) und *falsch positiv* (gesund, positiver Test) sein. Die Genauigkeit des Tests wird mit der *Sensitivität* und der *Spezifität* gemessen. Die Sensitivität misst, wie gut der Test die Krankheit erkennt. Sie ist das Verhältnis der Anzahl echt positiver Tests zur Anzahl kranker Testpersonen (echt positiv + falsch negativ). Die Spezifität quantifiziert, ob die Krankheit der entscheidende Faktor für ein positives Ergebnis ist. Sie gibt die Rate der negativen Tests für die *gesunden* (echt negativ + falsch positiv) Testpersonen an.

b) Wir betrachten einen "genauen" Test, bei dem sowohl die Sensitivität als auch die Spezifität 90% betragen. Von der Krankheit seien 1% der Testpersonen betroffen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das eine Testperson mit positivem Testergebnis wirklich krank ist?

Aufgabe 3: Wartezeiten

Auf der Autobahn A4 fahren durchschnittlich 12 Busse und 12 Auto pro Stunde von Köln in Richtung Aachen. Während die Busse streng nach Fahrplan alle fünf Minuten fahren, erscheinen die Autos zufällig. Die Wahrscheinlichkeit im Zeitintervall dt ein Auto zu beobachten sei $\frac{dt}{\tau}$, mit $\tau = 5$ Minuten. Ein Beobachter B_1 zählt die vorbeifahrenden Autos und Busse.

a) Zeigen Sie, dass der Beobachter B_1 tatsächlich durchschnittlich 12 Autos pro Stunde zählt.

b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit $P_B(n)$ an, mit der B_1 in einem zufällig gewählten Zehn-Minuten-Intervall n Busse zählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P_A(n, T)$ für n Autos in einem Intervall der Länge T mit zufälligem Startpunkt? Geben Sie Mittelwert und Standardabweichung dieser Verteilung an. Wie heißt die Verteilung?

c) Finden Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilungen $\rho_A(\Delta)$ und $\rho_B(\Delta)$ für den zeitlichen Abstand zwischen zwei Autos, bzw. Bussen. Was ergibt sich für die mittleren Zeitintervalle?

d) Eine weitere Beobachterin B_2 erscheint zu einer zufälligen Zeit. Wie lauten die Wahrscheinlichkeitsverteilungen ρ_A^W und ρ_B^W für die Zeiten Δ, die B_2 auf das Erscheinen des nächsten Autos, bzw. Busses warten muss?

Ihre Rechnungen in c) sollten ergeben haben, dass der zeitliche Abstand zwischen zwei Autos durchschnittlich fünf Minuten beträgt. Das gilt laut d) aber auch für die durchschnittliche Zeit, die B_2 auf das nächste Auto wartet **und** für die Zeit, die beim Erscheinen von B_2 seit dem letzten Auto vergangen ist. **Gilt also 5 Minuten + 5 Minuten = 5 Minuten?**

e) Erklären Sie den Widerspruch anschaulich. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass B_2 in einer Lücke der Länge Δ zwischen zwei Autos auftaucht. Wie lautet der Mittelwert dieser Verteilung?