

Statistische Physik

Blatt 10

Wintersemester 2023/24

Abgabe: Montag, 18.12.2023, 10:00 Uhr

Besprechung: Dienstag, 19.12.2023

Webseite: <https://www.thp.uni-koeln.de/trebst/Lectures/2023-StatPhys.shtml>

Aufgabe 33: Ensembletheorie – revisited (8 Punkte)

In der Vorlesung wurden die Gleichgewichtsverteilungen p_r für alle Ensembles aus dem zentralen Postulat der statistischen Physik – in abgeschlossenen Systemen sind alle Mikrozustände gleichwahrscheinlich – hergeleitet. Hier betrachten wir einen alternativen Zugang, der die zentrale Rolle der Entropie und ihres Zustrebens auf ein *Maximum* betont. Der Zugang gründet sich auf zwei Postulaten:

- (i) Die Entropie eines Systems mit Wahrscheinlichkeitsverteilung $\{p_r\}$ ist definiert als

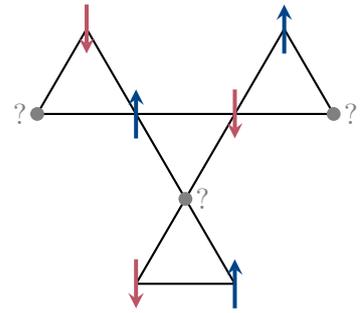
$$S(\{p_r\}) = -k_B \sum_r p_r \ln p_r. \quad (1)$$

- (ii) Die Entropie wird für die Verteilung $\{p_r\}$ die den Gleichgewichtszustand unter den gegebenen Nebenbedingungen beschreibt *maximal*.

- a)** Maximieren Sie die Entropie S unter der Nebenbedingung $\sum_r p_r = 1$. Nutzen Sie die Methode der Lagrange-Multiplikatoren, d.h., maximieren Sie $\tilde{S}_1(p_r, \lambda_1) = S(p_r) - \lambda_1 g(p_r)$, wobei $g(p_r) = 0$ die Nebenbedingung beschreibt. *Hinweise:* Hier gilt $g(p_r) = \sum_r p_r - 1$. Es genügt $\frac{\partial \tilde{S}_1}{\partial p_r}$ betrachten um zu zeigen, dass $p_r = \text{const}$ gilt. Diese Konstante kann dann aus der Nebenbedingung bestimmt werden. Sie müssen nicht zeigen, dass das gefundene Extremum ein Maximum ist.
- b)** Zusätzlich zu der Nebenbedingung aus a) soll jetzt noch der Erwartungswert der Energie, $\sum_r E_r p_r$, den fest vorgegebenen Wert E haben. Finden Sie die p_r , die die Entropie S maximieren. Welche Bedeutung hat der neue Lagrange-Parameter λ_2 ?
- c)** Zusätzlich zu der Nebenbedingungen aus b) soll jetzt noch der Erwartungswert der Teilchenzahl, $\sum_r N_r p_r$, den fest vorgegebenen Wert N haben. Finden Sie die p_r , die die Entropie S maximieren. Welche Bedeutung hat der neue Lagrange-Parameter λ_3 ?
- d)** In b) haben Sie die Wahrscheinlichkeiten der Mikrozustände p_r durch Maximierung einer Funktion \tilde{S}_2 gefunden. Finden Sie eine Funktion, die die selben Wahrscheinlichkeiten generiert, wenn sie unter der einzigen Nebenbedingung $\sum_r p_r = 1$ *minimiert* wird. Um welche Größe handelt es sich?

Aufgabe 34: Residuelle Entropie (6 + 2 Punkte)

Der dritte Hauptsatz, $S(T \rightarrow 0) \rightarrow 0$, kann nicht die universelle Gültigkeit des ersten und zweiten Hauptsatzes für sich beanspruchen: Viele Systemen weisen bei $T = 0$ eine *residuelle Entropie* auf. Bekannte Beispiele sind Wassereis und Glas, sowie deren “Spin-Versionen”, Spin-Eis und Spin-Glas, zwei Beispiele für *frustrierte* Systeme. Von Frustration spricht man, wenn es unmöglich ist, alle Wechselwirkungen zwischen den Spins gleichzeitig zu befriedigen. Dies ist nebenstehend für Ising-Spins auf einem *frustrierten Gitter* skizziert. Bei *antiferromagnetischer* Wechselwirkung zwischen benachbarten Spins wollen diese in *entgegengesetzte* Richtungen zeigen. Nicht alle Spins eines Dreiecks können so angeordnet werden, dass diese Bedingung erfüllt ist. Jede Wahl der Spinrichtung an den grauen Gitterplätzen führt zu parallel ausgerichteten, benachbarten Spins.

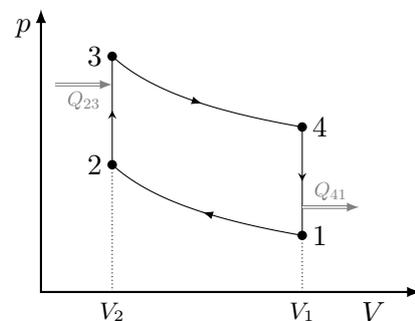


Auf der Homepage haben wir Ihnen ein [Notebook](#) zur Verfügung gestellt, auf dem Sie ausgehend von der Wärmekapazität (die experimentell sehr einfach zugänglich ist) ein System solcher Spins auf dem Dreiecksgitter untersuchen und den Unterschied zwischen ferromagnetischer und antiferromagnetischer Wechselwirkungen analysieren sollen. Laden Sie das Notebook herunter und bearbeiten Sie die Aufgabenteile (a) bis (c) und optional die Zusatzaufgabe (d).

Aufgabe 35: Otto-Kreisprozess (6 Punkte)

Wir betrachten den skizzierten Kreisprozess, der mit einem idealen Gas als Arbeitssubstanz ausgeführt wird. Die Abschnitte $1 \rightarrow 2$ und $3 \rightarrow 4$ sind Adiabaten.

- Der dargestellte Kreisprozess beschreibt einen idealisierten Otto-Motor (Viertakt-Verbrennungsmotor). In welchem Schritt leistet der Motor Arbeit? In welchem Schritt wird das Luft-Kraftstoff-Gemisch gezündet?
- Berechnen Sie die geleistete Arbeit und den Wirkungsgrad, $\eta = \frac{\text{geleistete Arbeit}}{\text{Wärmezufuhr}}$. Drücken Sie η sowohl durch das Kompressionsverhältnis $r = \frac{V_1}{V_2}$, als auch durch das Temperaturverhältnis $\frac{T_1}{T_2}$ aus. *Hinweis:* Benutzen Sie die Adiabaten Gleichung $TV^{\gamma-1} = \text{const}$, wobei γ der Adiabatenkoeffizient ist.



- Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Wirkungsgrad eines Carnot-Prozesses, der zwischen der höchsten und der niedrigsten hier auftauchenden Temperatur arbeitet. Begründen Sie mit Ihrem Resultat aus (a), warum der Wirkungsgrad des Otto-Motors den des Carnot-Prozesses nicht erreichen kann.

Aufgabe 36: Das Boltzmann-Gehirn (5 Bonuspunkte)

Boltzmanns Ansatz, die Gesetze der Thermodynamik *statistisch* zu untermauern, ist von seinen Zeitgenossen kontrovers aufgenommen wurden. Insbesondere die Vorstellung, dass der zweite Hauptsatz und sein implizierter Zeitpfeil lediglich Wahrscheinlichkeitsaussagen über die Bewegung *vieler* Teilchen sind, hat einigen Widerspruch hervorgerufen, der in (von Boltzmanns Seite) polemisch geführten Diskussionen gemündet ist. In dieser Aufgabe sollen Sie eine der Kontroversen und deren extreme Konsequenz – die Existenz sogenannter “Boltzmann-Gehirne” – genauer betrachten. Lesen Sie dazu den [hier verlinkten Artikel](#), Seiten 2 bis 9 (Mitte). Beantworten Sie anschließend die folgenden Fragen:

- (i) Geben Sie zwei Situationen an, in denen der zweite Hauptsatz *nicht* absolut gilt.
- (ii) Muss man also tatsächlich nur *lange genug* warten, bis sich etwa alle Gasmoleküle in einer Box in der linken Hälfte versammeln?
- (iii) Worauf stützt sich Zermelos Argument gegen die statistische Interpretation des zweiten Hauptsatzes? Haben Sie in der Vorlesung eine verwandte Aussage kennengelernt, mit der Sie gegen Boltzmann argumentieren könnten?
- (iv) Welche zwei unterschiedlichen Auswege schlägt Boltzmann vor?
- (v) Was ist ein “Boltzmann brain” (BB) und was ist ein “ordinary observer” (OO)?
- (vi) Gibt es in einem Universum, das für die Dauer des Alters unseres Universums existiert, mehr OO oder mehr BB? Wie verhält es sich mit einem Universum, das “unendlich” alt ist?

Hinweis: Die hier diskutierten Subtilitäten gehen über das hinaus, was von Ihnen im Rahmen dieser Vorlesung als grundlegendes Verständnis des zweiten Hauptsatzes erwartet wird. Das Boltzmann-Brain ist aber ohne Zweifel eine amüsantes Gedankenexperiment, das eindrucksvoll demonstriert, was für tiefe Implikationen in der statistischen Interpretation des zweiten Hauptsatzes lauern. (Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass in der Kosmologie weitreichende Einigkeit darüber herrscht, dass wir *nicht* alle BB sind. Sagt eine Theorie voraus, dass es viel mehr BB als OO gibt, dann ist das Anlass, die Theorie noch einmal einer gründlichen Analyse zu unterziehen.)