

Statistische Physik

Blatt 12

Wintersemester 2023/24

Abgabe: Montag, 15.01.2024, 10:00 Uhr

Besprechung: Dienstag, 16.01.2024

Webseite: <https://www.thp.uni-koeln.de/trebst/Lectures/2023-StatPhys.shtml>

Aufgabe 40: Euler, Gibbs und Duhem (6 Punkte)

- Die geläufigen thermodynamischen Größen E , S , T , p , V , μ und N sind durch die *Euler-Relation* $E = TS - pV + \mu N$ miteinander verknüpft. Beweisen Sie diesen Zusammenhang. *Hinweis:* Benutzen Sie die Extensivität der Energie, $E(\lambda S, \lambda V, \lambda N) = \lambda E(S, V, N)$ und leiten Sie diese Gleichung nach λ ab.
- Gehen Sie analog zu Teil a) vor, um einen Zusammenhang zwischen der freien Enthalpie $G(T, p, N)$ und dem chemischen Potential μ zu finden.
- Für jedes der vier thermodynamischen Potentiale E , F , H und G ist mindestens eine natürliche Variable extensiv. Zeigen Sie mittels der Euler-Relation oder Ihrem Ergebnis aus b), dass es *kein* thermodynamisches Potential geben kann, dessen natürlichen Variablen alle intensiv sind. *Hinweis:* Zeigen Sie die *Gibbs-Duhem-Gleichung* $SdT - Vdp + Nd\mu = 0$.

Aufgabe 41: Das Photonengas (6 + 3 Punkte)

In einem Gas aus nicht-wechselwirkenden *Photonen* gelten die folgenden Relationen:

$$\mu = 0 \quad \text{und} \quad E = 3pV. \quad (1)$$

Außerdem hängt der Druck nur von der Temperatur ab, $p = p(T)$, aber nicht vom Volumen.

- Bestimmen Sie Energie E , freie Energie F und Entropie S als Funktion der Temperatur T , des Volumens V und des Drucks p , dessen Temperaturabhängigkeit wir später explizit berechnen. *Hinweis:* Benutzen Sie die *Euler-Relation* aus Aufgabe 40.
- Zusatzaufgabe:** Bestimmen Sie $p(T)$. *Hinweis:* Eine Differentialgleichung für $p(T)$ erhalten Sie z.B. durch Vergleich der Ableitungen $(\frac{\partial S}{\partial T})_{V,N}$ und $(\frac{\partial E}{\partial T})_{V,N}$.

In Teil (b) sollten Sie das *Stefan-Boltzmann-Gesetz* $p = aT^4$, $a = \text{const}$ erhalten haben, dass den Strahlungsdruck eines idealen Schwarzen Körpers beschreibt.

- c) Berechnen Sie nun die Energie E , die freie Energie F und die Entropie S als Funktion von T und V . Warum sind die Potentiale unabhängig von N ? Berechnen Sie auch E und F als Funktion der jeweiligen *natürlichen Variablen*. Welche Bedeutung haben natürliche Variablen für thermodynamische Potentiale?
- d) Bestimmen Sie die Enthalpie $H(S, p)$ durch Legendre-Transformation aus $E(S, V)$.

Aufgabe 42: Gerichtete Perkolation (8 Punkte)

Die *gerichtete Perkolation* (engl. *directed percolation*) ist ein einfaches Modell zur Beschreibung eines porösen Materials in einem Gravitationsfeld. Das Material wird – wie in Abbildung 1(a) illustriert – durch ein gedrehtes Quadratgitter modelliert. Die Poren / Kanäle entsprechen den diagonal verlaufenden Verbindungen zwischen den Gitterpunkten. Die Kanäle sind mit einer Wahrscheinlichkeit p durchlässig. Eine Flüssigkeit, die auf die oberste Schicht des Materials gegeben wird, sickert auf Grund der Schwerkraft entlang dieser offenen Kanäle (blaue Verbindungen in Abb. 1(a)) nach unten. Interessanterweise zeigt dieses Modell bei Variation der Durchlässigkeit p einen kontinuierlichen Phasenübergang zwischen einem makroskopisch durchlässigen Zustand (*wet phase*), in dem die Flüssigkeit beliebig tief in das Material eindringen kann, und einem undurchlässigen Zustand (*dry phase*), wie in Abb. 1(b) gezeigt. Die gerichtete Perkolation beschreibt nicht nur etwa das Tröpfeln von Wasser durch einen Kaffeefilter, sondern kann auch als einfaches Modell für die Ausbreitung von **Waldbränden** oder **Epidemien** verwendet werden.

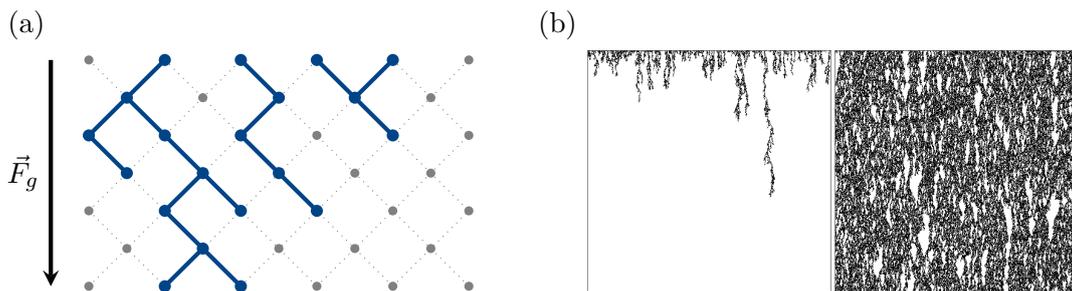


Abbildung 1 – Gerichtete Perkolation (a) Ein poröses Material wird durch ein gedrehtes Quadratgitter beschrieben. Die Verbindungen zwischen den Gitterpunkten sind mit Wahrscheinlichkeit p geöffnet und mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ geschlossen. Die Schwerkraft wirkt nach unten, sodass eine auf das Material gekippte Flüssigkeit entlang der geöffneten Kanäle durch das Material fließt. (b) Bei Erhöhung von p zeigt diese Modell einen Phasenübergang von undurchlässig (links, $p = 0.62$) zu durchlässig (rechts, $p = 0.66$).

In dieser Aufgabe sollen Sie den Phasenübergang des Perkulationsmodells numerisch untersuchen. Dazu haben wir ein **Notebook** mit einer ausführlichen Aufgabenstellung vorbereitet. Laden Sie das Notebook herunter und bearbeiten Sie die Aufgabenteile a), b), und c). Bitte beachten Sie, dass Sie nur die geforderten Abbildungen, aber *nicht* Ihr Programm abgeben sollen.