Institut für Theoretische Physik
Universität zu Köln

Prof. Dr. S. Trebst
Christoph Berke

Statistische Physik

Blatt 13

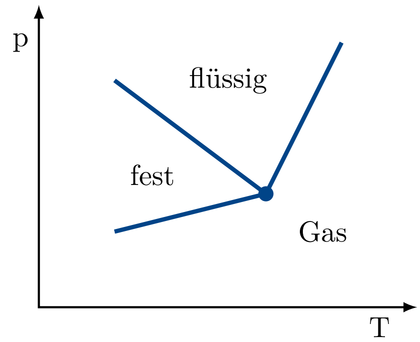
Wintersemester 2023/24

Abgabe: Montag, **22.01.2024**, 10:00 Uhr **Besprechung**: Dienstag, 23.01.2024

Webseite: https://www.thp.uni-koeln.de/trebst/Lectures/2023-StatPhys.shtml

Aufgabe 43: Jerktonium (4 Punkte)

Forscher der "University of Woolamaloo" behaupten, das Druck-Temperatur-Phasendiagramm einer neuen, "Jerktonium" getauften Substanz gemessen zu haben. Das Resultat in der Nähe des Tripelpunktes ist nebenstehend skizziert. Stimmen diese Ergebnisse, dann hätte Jerktonium eine ungewöhnliche Eigenschaft, sowie eine Eigenschaft, die gegen die Gesetze der Thermodynamik verstoßen würde. Um welche beiden Eigenschaften handelt es sich? *Hinweis:* Vergleichen Sie die Steigungen der drei Koexistenzlinien und benutzen Sie die Clausius-Clapeyron-Gleichung. Da $V_{\text{gas}} \gg V_{\text{flüssig}}, V_{\text{fest}}$, gilt $V_{\text{gas}} \approx V_{\text{gas}} - V_{\text{flüssig}} \approx V_{\text{gas}} - V_{\text{fest}}$.



Aufgabe 44: Idealer Paramagnet (11 Punkte)

Wir betrachten ein System aus N wechselwirkungsfreien, unterscheidbaren Spins $S = \frac{1}{2}$ in einem homogenen äußeren Magnetfeld $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$. Die möglichen Energien des Spins i sind

$$\epsilon_i = -2\mu_B B S_i^z = \pm\mu_B B \,. \tag{1}$$

Hier ist μ_B das Bohrsche Magneton. Die Gesamtenergie lautet damit

$$H = \sum_i \epsilon_i = -2\mu_B B \sum_{i=1}^{N} S_i^z \tag{2}$$

a) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme $Z(B,T)$ des Systems.

b) Berechnen Sie die mittlere Energie $\langle E \rangle$.

c) Die mittlere *Magnetisierung* ist durch

$$M = \langle 2\mu_B \sum_{i=1}^{N} S_i^z \rangle \tag{3}$$

gegeben. Zeigen Sie den Zusammenhang $M = \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z$. Berechnen Sie $M(T, B)$ explizit. Skizzieren Sie M für verschiedene, fixierte Werte von T als Funktion von B, sowie als Funktion von T für verschiedene fixe B. Diskutieren Sie das Resultat.

d) Zeigen Sie, dass sich für die magnetische Suszeptibilität $\chi = \frac{\partial M}{\partial B}$ im Grenzfall $k_B T \gg \mu_B B$ das Curie-Gesetz $\chi \sim \frac{1}{T}$ ergibt.

e) Berechnen und skizzieren Sie die Wärmekapazität $C_B(T) = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_B$.

f) Auf der Homepage haben wir Ihnen ein Notebook mit einer Monte-Carlo Simulation zur Verfügung gestellt, mit der Sie das Resultat aus Teil c) überprüfen sollen. Machen Sie sich mit dem Code vertraut und bearbeiten Sie die Aufgabenstellung.

Aufgabe 45: Adiabatische Entmagnetisierung (5 + 2 Punkte)

In dieser Aufgabe untersuchen wir ein Verfahren zum Abkühlen eines Paramagnetens. Der hier besprochene Prozess der *adiabatischen Entmagnetisierung* wurde 1933 erstmalig demonstriert und war das erste Verfahren, mit dem Temperaturen im Bereich von Millikelvin erreicht werden konnten.

In einem paramagnetischen Festkörper stellt sich bei Anlegen eines externen Magnetfeldes B eine makroskopische Magnetisierung $M \neq 0$ ein. Eine Erhöhung des Magnetfeldes dB führt zu einer Änderung $-MdB$ der inneren Energie. Für das System nimmt der erste Hauptsatz damit die Form

$$dE = TdS - MdB. \tag{4}$$

an. Auch hier kann mittels Legendre-Transformation zwischen verschiedenen thermodynamische Potentiale gewechselt werden. Im Vergleich zur Vorlesung ersetzt man einfach $p \to M$ und $V \to B$.

a) **Zusatzaufgabe:** Zeigen Sie allgemein: Hängt die Magnetisierung $M(B, T)$ nur vom Verhältnis $\frac{B}{T}$ ab (siehe Aufgabe 44c)), z.B. durch die beliebige Funktion $f(x)$,

$$M = N\mu_B f\left(\frac{\mu_B B}{k_B T}\right), \tag{5}$$

dann ist die Größe $H(T, M) = E + BM$ unabhängig von der Magnetisierung M, d.h.

$$\left(\frac{\partial H}{\partial M}\right)_T = 0. \tag{6}$$

Hinweis: Bestimmen Sie die Differentiale von $H(S, M)$ und $G(T, M)$. Folgern Sie aus dH, dass $\left(\frac{\partial H}{\partial M}\right)_T = B + T\left(\frac{\partial S}{\partial M}\right)_T$ gilt. Leiten Sie aus dG eine nützliche Maxwell-Relationen her. Benutzen Sie das Ergebnis aus a).

Der Paramagnet befinde sich jetzt im Gleichgewicht mit einem Wärmebad der Temperatur T_a, die so groß gewählt wird, dass das Curie-Gesetz aus Aufgabe 44d) angewendet werden kann. Also gilt

$$M(B, T) = \frac{cB}{T} \quad \text{mit} \quad c > 0\,. \tag{7}$$

b) Ein äußeres Magnetfeld wird von $B = 0$ bis auf die Stärke $B = B_a$ hochgefahren. Das Wärmebad hält die Temperatur des Paramagnetens dabei konstant bei T_a. Berechnen Sie die Wärmebilanz ΔQ dieser *isothermen Magnetisierung*. Gewinnt oder verliert das System diese Wärme? *Hinweis:* Benutzen Sie die totalen Differentiale von $H(T, M)$ und $H(S, M)$.

c) Der Paramagnet wird jetzt thermisch isoliert und das Magnetfeld adiabatisch auf den Wert $B = 0$ zurückgefahren. Welche Endtemperatur T_e stellt sich nach dieser *adiabatischen Entmagnetisierung* ein? *Hinweis:* Benutzen Sie $\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_M = \frac{A}{T^2}$ mit $A > 0$. (Dieser Zusammenhang lässt sich aus dem Resultat von Aufgabe 44d) zeigen.