Institut für Theoretische Physik
Universität zu Köln

Prof. Dr. S. Trebst
Christoph Berke

Statistische Physik

Blatt 14

Wintersemester 2023/24

Abgabe: Montag, **29.01.2024**, 10:00 Uhr **Besprechung**: Dienstag, 30.01.2024

Webseite: https://www.thp.uni-koeln.de/trebst/Lectures/2023-StatPhys.shtml

Aufgabe 46: Van-der-Waals Gas (10 Punkte)

Die Van-der-Waals-Gleichung zur Beschreibung realer Gase lautet ($v = \frac{V}{N}$, $a, b > 0$)

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = k_B T\,. \tag{1}$$

a) Diskutieren Sie kurz die Bedeutung der Parameter a und b.

b) Wie ist der kritische Punkt (p_c, T_c, v_c) definiert? Was ergibt sich für das Verhältnis $\frac{p_c v_c}{k_B T_c}$?

c) Zeigen Sie die Relation

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_E = \frac{1}{C_V}\left(p - T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V\right). \tag{2}$$

Hinweis: Benutzen Sie die beiden Eigenschaften

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_v = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial f}\right)_v\right]^{-1} \qquad \text{und} \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_v \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_f \left(\frac{\partial v}{\partial f}\right)_u = -1. \tag{3}$$

der partiellen Ableitung einer Funktion $f(u, v)$. Zeigen und benutzen Sie, dass $\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p$ gilt. Diese Relation ist auch für die Aufgabenteile e)–g) nützlich.

d) Zeigen Sie, dass sich das Van-der-Waals Gas bei freier Expansion ($dE = 0$) abkühlt. Ziehen Sie einen Vergleich zum idealen Gas. *Hinweis:* Sie müssen zeigen, dass $\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_E < 0$ gilt.

e) Wie ändert sich die Energie des Gases bei isothermer Expansion?

f) Zeigen Sie, dass die Wärmekapazität C_V nur von der Temperatur T, aber nicht von v abhängt. *Hinweis:* Leiten Sie aus $dE(T, V)$ eine Maxwell-Relation her.

g) Berechnen Sie die Energie $E(N, T, V)$ als Funktion von C_V, N, T, V, a und b. Nehmen Sie $C_V = \text{const}$ an. Vergleichen Sie mit dem idealen Gas. *Hinweis:* Starten Sie mit $dE(T, V)$.

h) Berechnen Sie die Entropie $S(N, T, V)$ als Funktion von C_V, N, T, V, a und b. Nehmen Sie wieder an, dass C_V eine Konstante ist. Vergleichen Sie erneut mit dem idealen Gas.

Aufgabe 47: Ising-Modell (10 + 2 Punkte)

Das *Ising-Modell* ist ein einfaches Modell zur Beschreibung von Ferromagnetismus. Es wurde von Wilhelm Lenz eingeführt, und von seinem Doktoranden Ernst Ising (gebürtiger Kölner) zuerst untersucht. Es zählt zu den meistuntersuchten physikalischen Modellen überhaupt und wird deshalb auch als "Drosophila" der Statistischen Physik bezeichnet. Von Magnetismus über Neurowissenschaften bis zur Ökologie findet es Anwendungen auf allen Größenskalen und wird auch in Ökonomie und Sozialwissenschaften genutzt.

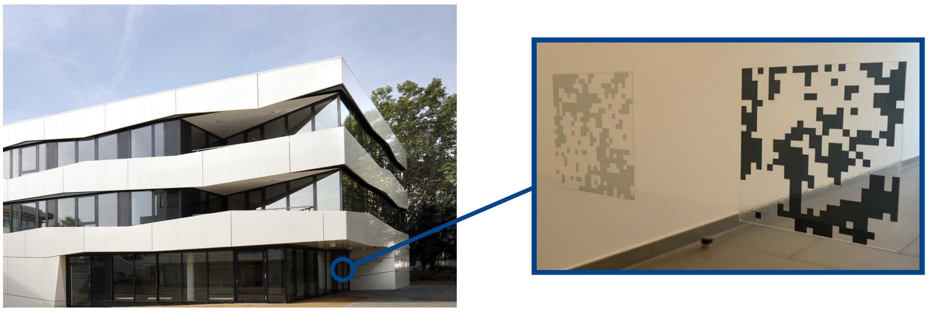

Abbildung 1 – Die am Theorie-Gebäude angebrachten Verzierungen sind keine QR Codes, sondern erinnern an Ernst Ising. Ihre genaue Bedeutung wird im Laufe dieser Aufgabe entschlüsselt.

Das Ising-Modell beschreibt ein System wechselwirkender Spins σ auf einem Gitter. Die Wechselwirkungen werden durch den Hamilton-Operator

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j \tag{4}$$

beschrieben. Die Spins σ können die Werte ± 1 annehmen. Die Notation $\langle i, j \rangle$ bedeutet, dass nur Spins auf direkt benachbarten Gitterplätzen i und j miteinander wechselwirken und deshalb nur Paare nächster Nachbarn zur Summe beitragen. Wird die Kopplungskonstante J positiv gewählt, dann sind parallel ausgerichtete Spins energetisch günstig. Wir erhalten also *ferromagnetische* Wechselwirkungen.

Wir haben ein Notebook für Sie vorbereitet, mit dem Sie die Eigenschaften des zweidimensionalen Ising-Modells auf dem Quadratgitter untersuchen können. Insbesondere sollen Sie zeigen, dass das Ising-Modell auf dem Quadratgitter einen Phasenübergang aufweist: Unterhalb einer kritischen Temperatur T_c stellt sich – auch ohne äußeres Magnetfeld – magnetische Ordnung ein. Laden Sie das Notebook herunter und bearbeiten Sie die Aufgabenteile (a)–(e).