Institut für Theoretische Physik
Universität zu Köln

Prof. Dr. S. Trebst
Christoph Berke

Statistische Physik

Blatt 3

Wintersemester 2023/24

Abgabe: Montag, **30.10.2023**, 10:00 Uhr **Besprechung**: Dienstag, 31.10.2023

Webseite: https://www.thp.uni-koeln.de/trebst/Lectures/2023-StatPhys.shtml

Aufgabe 11: Druck-Gleichgewicht (8 Punkte)

Wir betrachten zwei ideale Gase mit Teilchenzahl N_1 und N_2 und Volumina V_1 und V_2. Diese sind zunächst durch eine wärmedurchlässige, fixierte Zwischenwand getrennt, sodass sich ein thermisches Gleichgewicht einstellt.

a) Die Zwischenwand ist wärmedurchlässig. Deshalb ist die Gesamtenergie $E = E_1 + E_2$ konstant, nicht aber E_1 und E_2. Berechnen Sie die Gesamtentropie des Systems als Funktion von E_1. Für welches E_1 wird die Entropie maximal?

b) Nutzen Sie das Ergebnis aus a) um die Relation $T_1 = T_2$ für allgemeine V_1 und V_2 zu zeigen. *Hinweis:* Verwenden Sie die kalorische Zustandsgleichung des idealen Gases.

Nun wird die Zwischenwand gelöst, sodass sie sich zwischen den beiden System verschieben kann. Dadurch stellt sich ein neues thermisches Gleichgewicht mit möglicherweise neuen Temperaturen T_1', T_2', neuen Drücken p_1', p_2', sowie neuen Volumina V_1', V_2' ein. Beim Verschieben der Wand bleiben die Gesamtenergie $E = E_1 + E_2$ und das Gesamtvolumen $V = V_1 + V_2$ erhalten.

c) Berechnen Sie die Temperaturen T_1' und T_2' nach Lösen des Wand aus der Gesamtenergieerhaltung und unter Verwendung von b).

d) Berechnen Sie die Gesamtentropie des Systems als Funktion von V_1' und maximieren Sie das Ergebnis (es ist $V = V_1' + V_2'$ fest). Nutzen Sie die thermische Zustandsgleichung, um zu zeigen, dass im Gleichgewicht $p_1' = p_2'$ gilt.

e) Zeigen Sie, dass die Entropie im Laufe dieses Prozesses (also beim Verschieben der Zwischenwand) zunimmt. *Hinweis:* Zeigen Sie, dass das Gleichgewicht einem Maximum und nicht etwa einem Minimum der Entropie entspricht.

Aufgabe 12: Satz von Liouville (8 + 2 Punkte)

Ein klassisches System habe die generalisierten Koordinaten $q_1, \ldots, q_N$ und die dazugehörigen konjugierten Impulse $p_1, \ldots, p_N$, deren Dynamik durch die hamiltonschen Bewegungsgleichungen beschrieben wird. Die klassische *Phasenraumdichte* ist dann eine Funktion dieser Koordinaten und Impulse:

$$\rho(\{p_k(t)\}, \{q_k(t)\}, t). \tag{1}$$

Der *Satz von Liouville* besagt, dass für solche Hamilton-Systeme die totale Zeitableitung der Phasenraumdichte verschwindet:

$$\frac{d}{dt}\rho(\{p_k(t)\}\,,\{q_k(t)\}\,,t) = 0. \tag{2}$$

Diese Aussage soll hier bewiesen und numerisch veranschaulicht werden.

a) Beweisen Sie den Satz von Liouville, indem Sie von der Kontinuitätsgleichung der Phasenraumdichte

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \vec{\nabla}\vec{j} = 0 \tag{3}$$

ausgehen. Hier ist $\vec{j} = \vec{v}\rho$, mit $\vec{v} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, \dot{p}_1, \dots, \dot{p}_N)$, die $2N$-dimensionale Phasenraumstromdichte und $\vec{\nabla} = (\partial_{q_1}, \dots, \partial_{q_N}, \partial_{p_1}, \dots, \partial_{p_N})$. Erläutern Sie den physikalischen Unterschied zwischen der totalen Zeitableitung $\frac{d\rho}{dt}$ und der partiellen Zeitableitung $\frac{\partial\rho}{\partial t}$. *Hinweis:* Nutzen Sie die Bewegungsgleichungen um $\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_k} = -\frac{\partial \dot{p}_k}{\partial p_k}$ zu zeigen. Wenden Sie dieses Resultat auf die Kontinuitätsgleichung an.

b) Wir haben ein Notebook vorbereitet, mit dem Sie die Phasenraumdynamik verschiedener physikalischer Systeme untersuchen können. Die Lösung der Bewegungsgleichungen und die Visualisierung der Zeitentwicklung sind bereits implementiert. Weiterhin ist, zur Orientierung, der harmonischen Oszillator vorgegeben. Lesen Sie sich das Notebook zunächst aufmerksam durch. Erweitern Sie anschließend den Code an den markierten Stellen um

- die Bewegungsgleichungen eines gedämpften Pendels,

$$\dot{q} = \frac{p}{m}\,, \tag{4}$$
$$\dot{p} = -\gamma p - Kq. \tag{5}$$

- die Bewegungsgleichungen des Systems mit Hamiltonfunktion $H = \sin(x) + \sin(p)$.
- **(optional, keine Abgabe)** die Bewegungsgleichungen des Duffing-Oszillators

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = \gamma\cos(\omega t)\ . \tag{6}$$

Beschreiben Sie ihre Beobachtungen für die Systeme hinsichtlich des Satzes von Liouville.

c) **Zusatzaufgabe:** In b) sollte Ihnen aufgefallen sein, dass sich das Phasenraumvolumen bei der gedämpften Schwingung auf den Punkt $(p,q) = (0,0)$ zusammenzieht. Dies soll hier weiter untersucht werden. Berechnen Sie zunächst $\frac{\partial\dot{q}}{\partial q}$ und $\frac{\partial\dot{p}}{\partial p}$. Benutzen Sie dieses Ergebnis und die Kontinuitätsgleichung, um zu zeigen, dass für ρ die Differentialgleichung $\frac{d\rho}{dt} = \gamma\rho$ gilt. Was bedeutet das für die zeitliche Entwicklung eines Anfangsvolumens $A = \Delta q\Delta p$?

Aufgabe 13: Simulation des zweidimensionalen Gases – Teil II (4 Punkte)

Nachdem Sie sich in der letzten Woche bereits mit dem Grundgerüst der Simulation des zweidimensionalen Gases vertraut gemacht und spezielle Anfangsbedingungen selber implementiert haben, betrachten wir in dieser Woche die Statistik eines *einzelnen* Teilchens. Laden Sie sich das Notebook von der Homepage der Vorlesung herunter und bearbeiten Sie die ausführliche Aufgabenstellung.