

Vorlesung: Mathematische Methoden für Physiker

M. Zirnbauer
Institut für Theoretische Physik
Universität zu Köln

SS 2010

Contents

1	Vektorräume	4
1.1	Gruppen (Definition)	4
1.2	Reelle Vektorräume (Definition)	4
1.3	Basis und Dimension	5
1.4	Dualer Vektorraum	6
1.5	Dualbasis	7
1.6	Lineare Abbildungen	7
1.7	Affiner Raum	8
2	Vektoranalysis	9
2.1	Normierter Vektorraum	9
2.2	Differenzial einer Abbildung	10
2.3	Kettenregel	11
2.4	Vektorfelder und 1-Formen	13
2.4.1	Koordinatendarstellung	14
2.5	Gradient	15
2.5.1	Euklidischer Raum	15
2.5.2	Euklidischer Isomorphismus: 1-Formen \rightarrow Vektorfelder	16
2.5.3	Differenzial und Gradient	18
2.5.4	Partielle Ableitung	19
2.6	Wegintegrale	20
2.6.1	Wegintegral in kartesischen Koordinaten	21
2.6.2	Wegintegral einer exakten 1-Form	22
2.6.3	Anschauliche Deutung des Hauptsatzes	23
2.6.4	Wegintegral eines Vektorfeldes	23
2.7	Flächenintegrale	23
2.7.1	Alternierende 2-lineare Formen	23

2.7.2	Äußeres Produkt	24
2.7.3	2-Formen	25
2.7.4	Vektorprodukt und Spatprodukt	26
2.7.5	Beziehung zwischen Vektorprodukt und äußerem Produkt	27
2.7.6	Integral einer 2-Form	28
2.7.7	Flächenintegral eines Vektorfeldes	29
2.8	Rotation	29
2.8.1	Äußere Ableitung einer 1-Form	30
2.8.2	Rotation eines Vektorfeldes	31
2.8.3	Satz von Stokes	31
2.8.4	Parametrisierung und Rand	33
2.8.5	Beweis des Satzes von Stokes	34
2.9	Divergenz	36
2.9.1	Volumenintegral einer 3-Form	36
2.9.2	Äußere Ableitung einer 2-Form	37
2.9.3	Divergenz eines Vektorfeldes	38
2.10	Visualisierung	39
2.10.1	Anschauliche Deutung der äußeren Ableitung (auf 1-Formen)	41
2.10.2	Anwendung: magnetische Induktion	43
2.10.3	Satz von Gauss	45
2.11	Formen vom ungeraden Typ	48
2.11.1	Innere und äußere Orientierung	48
2.11.2	Differenzialformen vom ungeraden Typ	50
2.11.3	Integration ungerader Formen	50
2.11.4	Beispiele aus der Theorie des Elektromagnetismus	51
2.11.5	Ampere-Maxwell-Gesetz	55
2.11.6	Abschließende Bemerkungen	56
3	Einfaches zu Differenzialgleichungen	58
3.1	Potenzreihen	58
3.1.1	Absolute Konvergenz und Konvergenzradius	59
3.1.2	Taylorreihe einer analytischen Funktion	60
3.2	Die komplexen Zahlen	60
3.2.1	Vektormultiplikation in \mathbb{R}^2	60
3.2.2	Isomorphismus $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$	62
3.2.3	Euler-Formel	63
3.2.4	Polardarstellung komplexer Zahlen	63
3.2.5	Fundamentalsatz der Algebra	64
3.3	Lineare Differenzialgleichungen	64

3.3.1	Struktur des Lösungsraums	64
3.3.2	Homogene lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	65
3.3.3	Erzwungene Schwingung	66
3.3.4	Allgemeine lineare DGL 1. Ordnung	67
3.3.5	Variation der Konstanten	68
3.3.6	Homogene lineare DGL 2. Ordnung: Wronski-Determinante	68
3.3.7	Greenfunktion der linearen DGL 2. Ordnung	70
3.4	Differenzialgleichung mit getrennten Variablen	71
3.4.1	Zurückziehen von Formen	72
3.4.2	Begründung der Eselsbrücke von Abschnitt 3.4	73
4	Lineare Algebra	74
4.1	Lineare Abbildungen	74
4.1.1	Kern und Bild einer linearen Abbildung	75
4.1.2	Transponierte einer linearen Abbildung	76
4.2	Quotientenraum	78
4.2.1	Dimension des Quotientenraums	79
4.2.2	Isomorphismus $V/\ker(L) \rightarrow \text{im}(L)$	80
4.3	Determinante	80
4.3.1	Definition der Determinante	80
4.3.2	Leibniz-Formel	81
4.3.3	Beispiele	82
4.3.4	Eigenschaften der Determinante	83
4.3.5	Entwicklung der Determinante nach einer Spalte oder Zeile	85
4.4	Lineare Gleichungssysteme	86
4.4.1	Existenz und Eindeutigkeit der Lösung	86
4.4.2	Cramer'sche Regel	87
4.4.3	Direkte Summe	89
4.4.4	Annulator eines Untervektorraums	89
4.4.5	Gauß-Algorithmus	91

1 Vektorräume

1.1 Gruppen (Definition)

Eine **Gruppe** (G, \circ) ist eine Menge G , auf der eine Verknüpfung (kurz: Produkt)

$$\circ : G \times G, \quad (g, h) \mapsto g \circ h,$$

erklärt ist mit folgenden Eigenschaften:

(i) **Assoziativität:**

$$\forall g, h, k \in G : \quad (g \circ h) \circ k = g \circ (h \circ k).$$

(ii) Existenz eines **neutralen** Elements e :

$$\forall g \in G : \quad g \circ e = g = e \circ g.$$

(iii) Existenz eines **Inversen:** zu jedem $g \in G$ existiert ein $h \in G$, so dass gilt: $g \circ h = e = h \circ g$.

Eine Gruppe heißt **kommutativ**, falls gilt: $g \circ h = h \circ g$ (für alle $g, h \in G$).

Bemerkung. Aus den Axiomen folgt, dass das neutrale Element und das Inverse eindeutig sind. Das zu g inverse Element wird häufig mit g^{-1} bezeichnet.

Beispiel 1. Die positiven reellen Zahlen \mathbb{R}_+ mit der gewöhnlichen Multiplikation $x \circ y \equiv x \cdot y$ als Verknüpfung bilden eine kommutative Gruppe (\mathbb{R}_+, \cdot) mit neutralem Element $e = 1$ und Inversem $x^{-1} = 1/x$.

Beispiel 2. Die reellen Zahlen \mathbb{R} mit der gewöhnlichen Addition $\circ \equiv +$ als Verknüpfung bilden eine kommutative Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ mit neutralem Element $e = 0$. Das zu $x \in \mathbb{R}$ inverse Element ist $-x$.

1.2 Reelle Vektorräume (Definition)

Ein (reeller) **Vektorraum** $(V, +; \mathbb{R}, \cdot)$ ist eine kommutative Gruppe $(\mathbf{V}, +)$ mit der zusätzlichen Struktur einer **Skalarmultiplikation**

$$\mathbb{R} \times V \rightarrow V, \quad (a, v) \mapsto a \cdot v,$$

die den folgenden Verträglichkeitsbedingungen genügt:

$$a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v, \tag{1.1}$$

$$(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v, \tag{1.2}$$

$$(ab) \cdot v = a \cdot (b \cdot v), \tag{1.3}$$

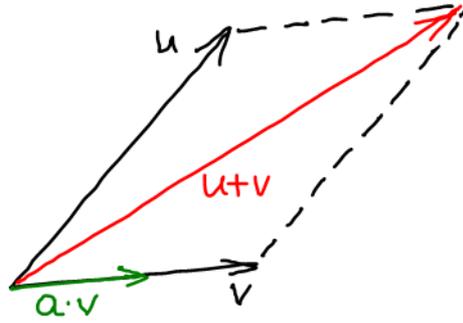
$$1 \cdot v = v, \tag{1.4}$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $u, v \in V$. Die Elemente von V heißen **Vektoren**. Gängige Schreibweisen sind:

$$u - v := u + (-v), \quad v/a := (1/a) \cdot v \quad (a \neq 0).$$

Beispiel 1. $(\mathbb{R}, +; \mathbb{R}, \cdot)$, also $V = \mathbb{R}$.

Beispiel 2. Die Menge aller Translationen (oder Verschiebungsvektoren) im Raum bildet einen Vektorraum.



Beispiel 3. Sei M eine Menge und V ein Vektorraum. Dann ist auch die Menge aller Abbildungen

$$f : M \rightarrow V, \quad x \mapsto f(x),$$

mit der Addition $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ ein Vektorraum.

1.3 Basis und Dimension

Eine Menge $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ von Vektoren eines Vektorraums V heißt **linear unabhängig**, falls für alle $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = \mathbf{0} \quad \implies \quad a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0.$$

Andernfalls heißt die Menge **linear abhängig**. (Das Symbol \cdot für die Skalarmultiplikation wird ab hier der Einfachheit halber meist unterdrückt.) Enthalten alle linear unabhängigen Mengen eines Vektorraums V nur endlich viele Vektoren, so heißt V **endlich-dimensional**. (In diesem Abschnitt werden wir nur endlich-dimensionale Vektorräume betrachten).

Ist eine Menge von Vektoren $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ von V linear unabhängig, wird aber durch Hinzunahme eines jeden weiteren Vektors linear abhängig, so heißt diese Menge eine **Basis** von V . Jede Basis von V enthält die gleiche Zahl von Vektoren (ohne Beweis). Diese wohlbestimmte Zahl heißt die **Dimension** von V und wird mit $\dim V$ bezeichnet.

Sei nun $u \in V$ ein beliebiger Vektor und $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ eine Basis von V . Dann existieren Zahlen a_1, a_2, \dots, a_n, b (nicht alle Null), so dass gilt:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n + b u = 0.$$

Es muss $b \neq 0$ sein, denn andernfalls wäre B linear abhängig und somit keine Basis. Folglich können wir durch b dividieren und erhalten

$$u = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n \quad (c_i = a_i/b).$$

Jeder Vektor lässt sich also als sog. **Linearkombination** der Vektoren v_1, \dots, v_n der Basis schreiben. Die Zahlen c_1, c_2, \dots, c_n sind eindeutig bestimmt (warum?) und heißen die **Komponenten** von u .

bzgl. der Basis B . Als Kurzschreibweise vereinbaren wir

$$u = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}_B, \quad B = \{v_1, \dots, v_n\}.$$

Der Index B wird fortgelassen, wenn es keine Missverständnisse geben kann, welche Basis B gemeint ist.

1.4 Dualer Vektorraum

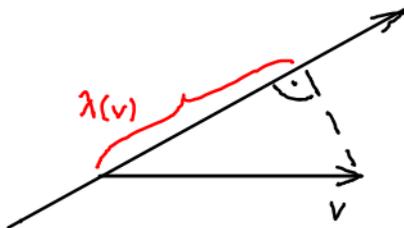
Sei V ein Vektorraum. Unter einer **Linearform** $\lambda : V \rightarrow \mathbb{R}$ versteht man eine Funktion $v \mapsto \lambda(v)$ mit den Eigenschaften

$$\lambda(u + v) = \lambda(u) + \lambda(v), \quad (1.5)$$

$$\lambda(a \cdot v) = a \lambda(v), \quad (1.6)$$

für alle $u, v \in V$ and $a \in \mathbb{R}$.

Beispiel. Die Operation der Orthogonalprojektion auf eine Raumachse ist eine Linearform. \square



Die Menge alle Linearformen $\lambda : V \rightarrow \mathbb{R}$ bildet einen Vektorraum bezüglich der Addition

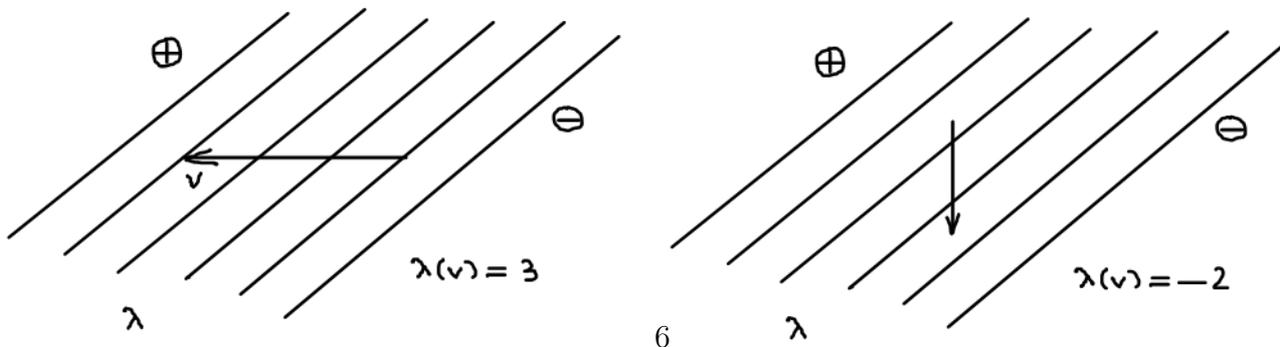
$$(\lambda + \mu)(v) := \lambda(v) + \mu(v)$$

und der Skalarmultiplikation

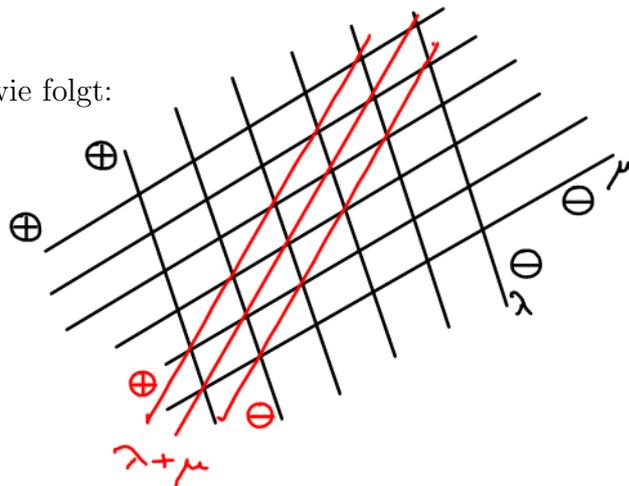
$$(a \cdot \lambda)(v) := \lambda(a \cdot v).$$

Dieser Vektorraum wird der zu V duale Vektorraum genannt und mit V^* bezeichnet.

Beispiel. Sei V der Vektorraum aller Translationen (oder Verschiebungsvektoren) in einer Ebene. Wir interpretieren $v \in V$ als die Geschwindigkeit eine gleichförmigen geradlinigen ebenen Bewegung (d.h. wir deuten v als Translation pro Zeiteinheit). V^* lässt sich dann als die Menge aller (homogenen und polarisierten) Geradenscharen λ visualisieren, wobei man $\lambda(v)$ als die (vorzeichenbehaftete) Zahl der Geraden ermittelt, die pro Zeiteinheit gekreuzt wird:



Die Addition funktioniert wie folgt:



[Ausblick Wellenphysik: Wellen“vektor” als Linearform.]

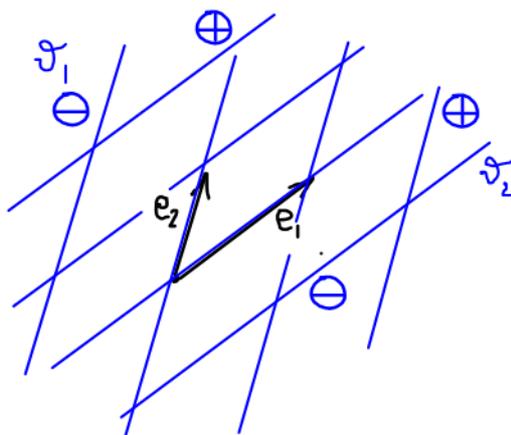
1.5 Dualbasis

Sei $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ eine Basis des Vektorraums V . Unter der zugehörigen **Dualbasis** des dualen Vektorraums V^* versteht man die Menge der Linearformen $\{\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n\}$ mit der Eigenschaft

$$\vartheta_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (i, j = 1, \dots, n). \quad (1.7)$$

(Die Dualbasis wird durch diese Gleichungen eindeutig bestimmt.)

Beispiel.



Bei Anwendung des Dualbasiselements ϑ_i auf einen Vektor $v \in V$ erhalten wir die entsprechende Komponente von v bzgl. der Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$:

$$v = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_n e_n \iff c_i = \vartheta_i(v) \quad (i = 1, \dots, n).$$

1.6 Lineare Abbildungen

Definition. Sei $A : U \rightarrow V$ eine Abbildung zwischen zwei Vektorräumen U, V . Die Abbildung A heißt **linear**, falls für alle $u, u' \in U$ und $b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$A(u + u') = A(u) + A(u'), \quad A(b \cdot u) = b \cdot A(u). \quad (1.8)$$

Für eine lineare Abbildung L verwenden wir die vereinfachte Notation $L(u) \equiv Lu$.

Die linearen Abbildungen $L : U \rightarrow V$ bilden selbst wieder einen Vektorraum. Er wird mit **Hom**(U, V) bezeichnet. Für $U = V$ schreibt man $\text{Hom}(V, V) = \text{End}(V)$.

Werden zwei lineare Abbildungen $L_1 : U \rightarrow V$ und $L_2 : V \rightarrow W$ hintereinander ausgeführt,

$$L_2 L_1 : U \xrightarrow{L_1} V \xrightarrow{L_2} W$$

so erhält man wieder eine lineare Abbildung $L_2 L_1 : U \rightarrow W$. Bezüglich dieser Produktoperation bilden die invertierbaren linearen Abbildungen $g \in \text{End}(V)$ eine Gruppe namens $\text{GL}(V)$ mit der identischen Abbildung $v \mapsto v$ als neutralem Element.

Matrixdarstellung einer linearen Abbildung $L \in \text{End}(V)$:

Sei $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis von V mit Dualbasis $\{\vartheta_1, \dots, \vartheta_n\}$ von V^* . Dann nennt man

$$\begin{pmatrix} L_{11} & \dots & L_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n1} & \dots & L_{nn} \end{pmatrix}, \quad L_{ij} = \vartheta_i(L e_j)$$

die **Matrix** von L bzgl. der Basis B . Es gilt:

$$\begin{pmatrix} (Lv)_1 \\ \vdots \\ (Lv)_n \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} L_{11} & \dots & L_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n1} & \dots & L_{nn} \end{pmatrix}_B \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}_B \quad (\text{Multiplikationsregel: "Zeile mal Spalte"}).$$

Einer linearen Abbildung $L : U \rightarrow V$ sind die folgenden wichtigen Vektorräume zugeordnet:

$$\text{Kern : } \ker L := \{u \in U \mid Lu = 0\}, \quad (1.9)$$

$$\text{Bild : } \text{im } L := \{v \in V \mid \exists u \in U : v = Lu\}, \quad (1.10)$$

$$\text{Kokern : } \text{coker } L := \{\lambda \in V^* \mid \forall u \in U : \lambda(Lu) = 0\}. \quad (1.11)$$

Diese Begriffe werden wir gegen Ende der Vorlesung wieder aufgreifen. Unser vordringliches Ziel ist es, die Differential- und Integralrechnung im \mathbb{R}^n zu entwickeln.

1.7 Affiner Raum

Der Begriff des Vektorraums an sich ergibt noch kein befriedigendes Modell für den (physikalischen) Raum. Deshalb nehmen wir folgende Erweiterung vor.

Definition. Unter einem **affinen Raum** $(M, V, +)$ versteht man eine Menge M von Punkten zusammen mit einem Vektorraum V und einer Addition

$$M \times V \rightarrow M, \quad (p, v) \mapsto p + v,$$

mit den Eigenschaften:

- (i) Es gilt eine Variante des Assoziativgesetzes:

$$p + (u + v) = (p + u) + v$$

für alle $p \in M$ und $u, v \in V$.

- (ii) Zu jedem Paar $(p, q) \in M \times M$ existiert genau ein Vektor $v \in V$ mit $p = q + v$.

Wir schreiben $p - q := v$ und nennen $p - q$ den **Differenzvektor** zu (p, q) .

Beispiel. Die Menge aller Punkte auf einer Geraden zusammen mit dem Vektorraum aller Translationen längs der Geraden bildet einen 1-dimensionalen affinen Raum. \square

Definition. Ein **affines Koordinatensystem** $\{p_0; e_1, \dots, e_n\}$ besteht aus einem ausgezeichneten Punkt p_0 (dem "Koordinatenursprung") zusammen mit einer Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ von V . Die affinen **Koordinaten** $x_i : M \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, n$) definiert man durch

$$x_i(p) = \vartheta_i(p - p_0),$$

wobei $\{\vartheta_1, \dots, \vartheta_n\}$ die Dualbasis zu $\{e_1, \dots, e_n\}$ ist. Den Ausdruck

$$p = p_0 + x_1(p)e_1 + \dots + x_n(p)e_n$$

nennen wir die **Koordinatendarstellung** des Punktes p . Man beachte, dass gilt

$$x_i(p + av) = x_i(p) + a\vartheta_i(v) \quad (p \in M, a \in \mathbb{R}, v \in V).$$

2 Vektoranalysis

2.1 Normierter Vektorraum

Definition. Sei V ein Vektorraum. Eine **Norm**

$$\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto \|v\|,$$

ist eine Funktion mit den Eigenschaften

- (i) $\|v\| > 0$ für $v \neq 0$.
- (ii) $\|a \cdot v\| = |a| \|v\|$ für alle $a \in \mathbb{R}, v \in V$.
- (iii) Es gilt die **Dreiecksungleichung**:

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad (u, v \in V).$$

Ein Vektorraum $(V, \| \cdot \|)$ mit Norm heißt **normiert**.

Beispiel 1. Für $V = \mathbb{R}$ ist die Betragsfunktion $a \mapsto |a|$ eine Norm.

Beispiel 2. Für einen Vektorraum V mit Euklidischem Skalarprodukt

$$V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad (u, v) \mapsto \langle u, v \rangle$$

(siehe später) ist die Längenfunktion $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ eine Norm. \square

Für einen affinen Raum M mit normiertem Differenzvektorraum $(V, \| \cdot \|)$ nennt man

$$d(p, q) := \|p - q\|$$

den **Abstand** zwischen den Punkten $p, q \in M$.

Im nächsten Abschnitt benötigen wir die folgende Aussage: zu jeder linearen Abbildung $L : U \rightarrow V$ existiert eine Zahl $\|L\|_{\text{op}}$, die sog. **Operatornorm** von L , so dass gilt: $\|Lu\| \leq \|L\|_{\text{op}} \|u\|$ für alle $u \in U$. (Beweis als Übungsaufgabe.)

2.2 Differenzial einer Abbildung

Sei X, Y ein Paar affiner Räume mit normierten Differenzvektorräumen $(V, \|\cdot\|)$ bzw. $(W, \|\cdot\|)$. Der Begriff der Stetigkeit und Differenzierbarkeit einer Funktion $f : X \rightarrow Y$ im eindimensionalen Spezialfall $X, Y \subset \mathbb{R}$ wird als bekannt vorausgesetzt. Insbesondere kennen wir die Ableitung (für differenzierbares f):

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}.$$

Wir führen jetzt die höher-dimensionale Verallgemeinerung des **Begriffs von Ableitung** ein.

Sei also $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen zwei affinen Räumen (wie eingangs beschrieben). Wir fixieren einen Punkt $p \in X$. Die Abbildung f heißt in p **stetig**, wenn zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ existiert, so dass für alle Vektoren $v \in V$ mit Norm $\|v\| < \delta$ gilt:

$$\|f(p+v) - f(p)\| < \varepsilon.$$

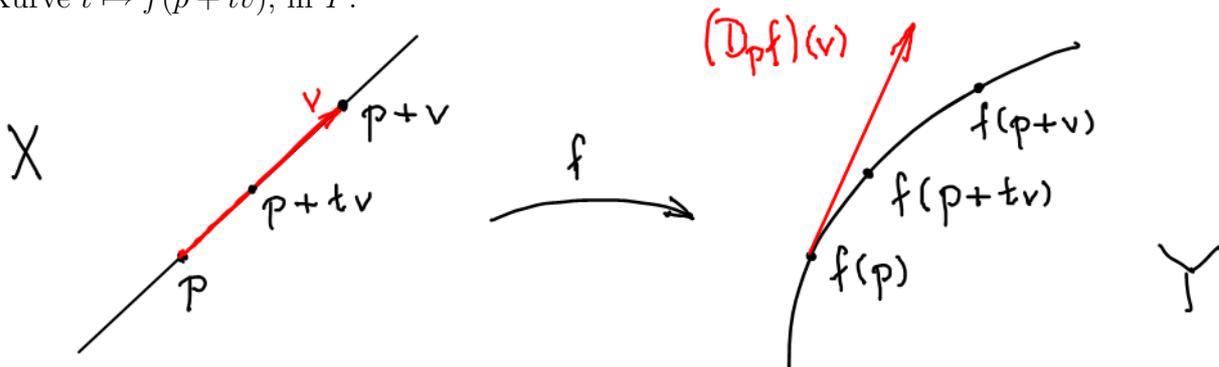
Weiter heißt die Abbildung $f : X \rightarrow Y$ im Punkt p **differenzierbar**, wenn eine lineare Abbildung $L : V \rightarrow W$ mit der folgenden (Approximations-)Eigenschaft existiert: zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass gilt:

$$\|f(p+v) - f(p) - Lv\| < \varepsilon \|v\|$$

für alle $v \in V$ mit $\|v\| < \delta$. Diese lineare Abbildung L (so sie existiert) heißt das **Differenzial** der Abbildung f im Punkt p . Sie wird mit $L \equiv D_p f$ bezeichnet. Äquivalent schreibt man

$$\lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{\|f(p+v) - f(p) - (D_p f)(v)\|}{\|v\|} = 0.$$

Ist die Differenzierbarkeit erst einmal gesichert, können wir das Differenzial folgendermaßen ermitteln. Wir betrachten das Geradenstück $[-\delta, \delta] \ni t \mapsto p + tv$ in X und sein Bild unter f , also die Kurve $t \mapsto f(p + tv)$, in Y .

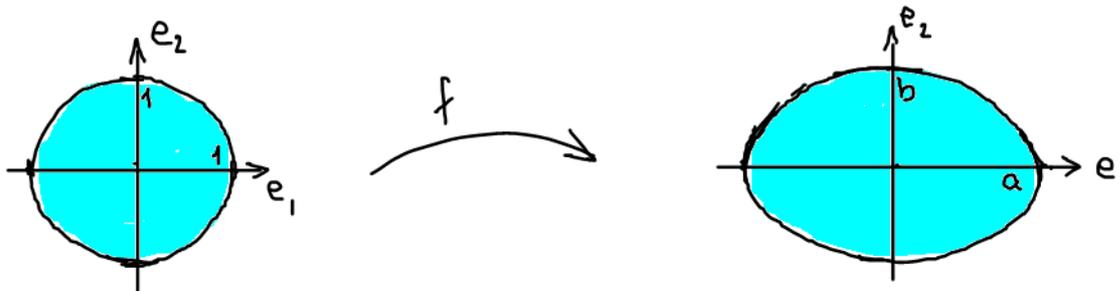


Fassen wir v als die Geschwindigkeit der Bewegung $t \mapsto p + tv$ (mit der Zeitvariablen t auf), so ist $(D_p f)(v)$ die (momentane) Geschwindigkeit der Bildbewegung $t \mapsto f(p + tv)$ zur Zeit $t = 0$, also im Punkt $f(p) \in Y$. In Formeln:

$$Lv = (D_p f)(v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t} \equiv \left. \frac{d}{dt} f(p + tv) \right|_{t=0}. \quad (2.12)$$

Beispiel. Sei $X = Y$ eine Ebene mit affinem Koordinatensystem $\{p_0; e_1, e_2\}$ und affinen Koordinaten x_1, x_2 . Wir betrachten die Abbildung

$$f(p) = p_0 + a x_1(p) e_1 + b x_2(p) e_2.$$



In diesem Beispiel gilt $(D_p f)(e_1) = a e_1$ und $(D_p f)(e_2) = b e_2$.

2.3 Kettenregel

Für ein Tripel von affinen Räumen X, Y, Z mit normierten Differenzvektorräumen U, V bzw. W betrachten wir die Verkettung $\psi \circ \phi$ zweier Abbildungen:

$$X \xrightarrow{\phi} Y \xrightarrow{\psi} Z.$$

Wir machen die folgenden Annahmen:

1. ϕ sei differenzierbar im Punkt $p \in X$ mit Differential $D_p \phi = L$.
2. ψ sei differenzierbar in $\phi(p) \in Y$ mit Differential $D_{\phi(p)} \psi = K$.

Unter diesen Voraussetzungen gilt die folgende Aussage.

Kettenregel. Die Verkettung $\psi \circ \phi : X \rightarrow Z$ ist differenzierbar im Punkt $p \in X$ mit Differential

$$D_p(\psi \circ \phi) = (D_{\phi(p)} \psi)(D_p \phi) = KL. \quad (2.13)$$

Bemerkung. Vereinfacht ausgedrückt besagt die Kettenregel, dass das Differential der Verkettung gleich der Verkettung der Differentiale ist. (Im letzteren Fall bedeutet "Verkettung" ganz einfach die Hintereinanderausführung KL der linearen Abbildungen $L = D_p \phi : X \rightarrow Y$ und $K = D_{\phi(p)} \psi : Y \rightarrow Z$.)

Beweis (der Kettenregel). Nach Voraussetzung existiert

1. für jedes $\varepsilon_1 > 0$ ein $\delta_1 > 0$, so dass

$$\| \phi(p+u) - \phi(p) - Lu \| \leq \varepsilon_1 \|u\|$$

für alle $u \in U$ mit $\|u\| \leq \delta_1$,

2. und für jedes $\varepsilon_2 > 0$ ein $\delta_2 > 0$, so dass

$$\| \psi(\phi(p)+v) - \psi(\phi(p)) - Kv \| \leq \varepsilon_2 \|v\|$$

für alle $v \in V$ mit $\|v\| \leq \delta_2$.

Durch geeignetes Addieren und Subtrahieren,

$$\begin{aligned} & \| \psi(\phi(p+u)) - \psi(\phi(p)) - KLu \| = \\ & \| \psi(\phi(p) + \phi(p+u) - \phi(p)) - \psi(\phi(p)) - K(\phi(p+u) - \phi(p)) + K(\phi(p+u) - \phi(p) - Lu) \| , \end{aligned}$$

folgt mittels Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} & \| \psi(\phi(p+u)) - \psi(\phi(p)) - KLu \| \leq \\ & \| \psi(\phi(p) + \phi(p+u) - \phi(p)) - \psi(\phi(p)) - K(\phi(p+u) - \phi(p)) \| + \| K(\phi(p+u) - \phi(p) - Lu) \| . \end{aligned}$$

Für beliebiges $\varepsilon > 0$ wähle jetzt

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2 \|K\|_{\text{op}}} , \quad \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2(\varepsilon_1 + \|L\|_{\text{op}})} .$$

Dann folgt für alle u mit $\|u\| \leq \min(\delta_1, (\varepsilon_1 + \|L\|_{\text{op}})^{-1}\delta_2)$

$$\begin{aligned} \| \phi(p+u) - \phi(p) \| & \leq \| \phi(p+u) - \phi(p) - Lu \| + \| Lu \| \\ & \leq \varepsilon_1 \|u\| + \|L\|_{\text{op}} \|u\| = (\varepsilon_1 + \|L\|_{\text{op}}) \|u\| \leq \delta_2 , \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} & \| \psi(\phi(p+u)) - \psi(\phi(p)) - KLu \| \\ & \leq \varepsilon_2 \| \phi(p+u) - \phi(p) \| + \|K\|_{\text{op}} \| \phi(p+u) - \phi(p) - Lu \| \\ & \leq \varepsilon_2 (\varepsilon_1 + \|L\|_{\text{op}}) \|u\| + \|K\|_{\text{op}} \varepsilon_1 \|u\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|u\| + \frac{\varepsilon}{2} \|u\| = \varepsilon \|u\| . \quad \square \end{aligned}$$

Damit ist die Verkettung $\psi \circ \phi$ differenzierbar im Punkt p , und das Differential ist die Verkettung $D_p(\psi \circ \phi) = D_{\phi(p)}\psi \circ D_p\phi$ der Differenziale. \square

Spezialfall 1: Sei $X = Z$ und $\psi = \phi^{-1}$ (inverse Abbildung), also

$$X \xrightarrow{\phi} Y \xrightarrow{\phi^{-1}} X .$$

Wegen $D_p(\phi^{-1} \circ \phi) = \text{Id}$ (identische Abbildung) folgt dann aus der Kettenregel die Formel

$$u = D_p(\phi^{-1} \circ \phi)(u) = (D_{\phi(p)}\phi^{-1})(D_p\phi)(u) ,$$

oder kurz:

$$D_{\phi(p)}\phi^{-1} = (D_p\phi)^{-1} ,$$

d.h. das Differential der inversen Abbildung ist gleich dem Inversen des Differenzials.

Spezialfall 2: Für $X = Y = Z = \mathbb{R}$ sei g die Umkehrfunktion zu f , also $g(f(x)) = x$. Dann besagt die Kettenregel, dass gilt:

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} .$$

Zum Beispiel folgt für die Ableitung der Logarithmusfunktion aus $\ln(e^x) = x$ die Formel $\ln'(e^x) = 1/e^x$, also $\ln'(y) = 1/y$.

2.4 Vektorfelder und 1-Formen

Motivation. Beim Herumbewegen elektrisch geladener Körper im elektrischen Kraftfeld muss Arbeit geleistet werden, oder es wird Energie frei. Unser Fernziel ist es, die Gesamtarbeit als Wegintegral des Kraftfeldes entlang des zurückgelegten Weges auszudrücken. Zu diesem Zweck treffen wir hier einige Vorbereitungen. \square

Sei $(X, V, +)$ ein affiner Raum. Ein **Vektorfeld** u auf X ist eine Abbildung

$$u : X \rightarrow V, \quad p \mapsto u(p),$$

die jedem Punkt $p \in X$ einen Vektor $u(p) \in V$ zuweist. Von den zahlreichen physikalischen Beispielen für Vektorfelder sei hier nur das Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeitsströmung erwähnt; sie weist jedem Ort der Strömung die lokale Strömungsgeschwindigkeit zu.

Warnung. Vektorfelder taugen nicht (jedenfalls nicht ohne Zusatzannahmen über die geometrische Struktur des Raumes) als Integranden für Wegintegrale. Die tauglichen Integranden sind andere.

Definition. Wie zuvor sei $(X, V, +)$ ein affiner Raum. Eine **1-Form** α auf X ist eine räumlich veränderliche Linearform, also eine Abbildung

$$\alpha : X \rightarrow V^*, \quad p \mapsto \alpha_p$$

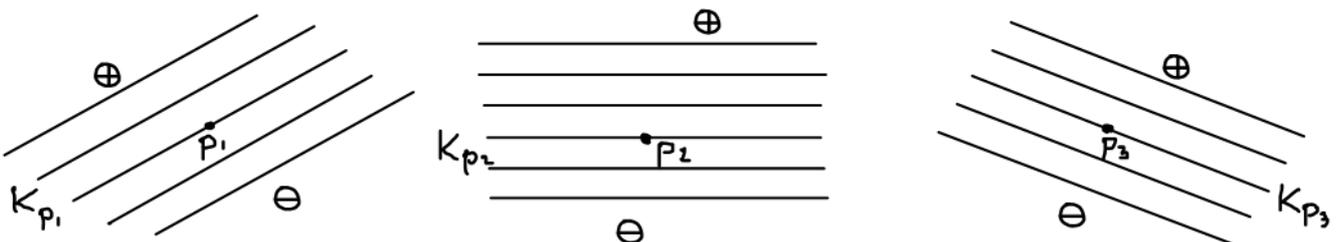
(von der wir je nach Bedarf geeignete Stetigkeits- und Differenzierbarkeitseigenschaften verlangen).

Beispiel 1. Jedes **Kraftfeld** ist (fundamental betrachtet) eine 1-Form. Zwar ist es in der Praxis üblich, Kraftfelder als Vektorfelder aufzufassen, diese Deutung ist aber nur möglich, wenn die Geometrie des Raumes als bekannt vorausgesetzt werden kann. Bei einer primitiven Kraftmessung im dreidimensionalen Raum wird ermittelt, welche differenzielle Energieänderung $K_p(v)$ ein Testkörper bei Translation in Richtung von $v \in \mathbb{R}^3$ erfährt. Als unmittelbares Resultat der Messung (am Ort p) ergibt sich die Linearform

$$K_p : \text{Translationsvektor } v \mapsto \text{differenzielle Energieänderung } K_p(v).$$

Das Kraftfeld K ist dann insgesamt eine Zuordnung $K : X \rightarrow V^* \equiv (\mathbb{R}^3)^*, p \mapsto K_p$, also eine 1-Form. \square

Linearformen im dreidimensionalen Raum werden durch polarisierte homogene Ebenenscharen visualisiert. (Dabei wird, wie in Abschnitt 1.4 erläutert, der Wert $K_p(v)$ durch Abzählen der von v gekreuzten Ebenen ermittelt.) Wir können die Kraftfeld-1-Form also zeichnerisch skizzieren, indem wir für eine Auswahl von Punkten die zugehörige Ebenenschar auftragen:



Die Ebenen haben jeweils die Bedeutung der (lokalen) Nullflächen des Kraftfeldes K .

Beispiel 2. Aus Abschnitt 2.2 kennen wir bereits den Begriff des Differenzials einer Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen zwei affinen Räumen $(X, V, +)$ und $(Y, W, +)$. Im Spezialfall einer differenzierbaren Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ (also für $Y \equiv \mathbb{R}, W \equiv \mathbb{R}$) bezeichnen wir das Differenzial mit $D_p f =: (df)_p$. Wir erinnern kurz an die Definition:

$$(df)_p(v) = \left. \frac{d}{dt} f(p + tv) \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t}.$$

Insgesamt weist das Differenzial df jedem Punkt $p \in X$ eine Linearform $(df)_p \in V^*$ zu. Somit ist das Differenzial df eine 1-Form. \square

Aus einem Vektorfeld $u : X \rightarrow V$ und einer 1-Form $\omega : X \rightarrow V^*$ lässt sich in invarianter Weise eine Funktion $f \equiv \omega(u) : X \rightarrow \mathbb{R}$ bilden. Sie ist erklärt durch

$$f(p) := \omega_p(u(p)).$$

Um die Funktion $f = \omega(u)$ im Punkt p zu berechnen, setzt man also den Vektor $u(p)$ in die Linearform ω_p ein. Diese Operation der Bildung einer Funktion aus einem Vektorfeld und einer 1-Form heißt Kontraktion oder inneres Produkt.

2.4.1 Koordinatendarstellung

In einem affinen Raum $(X, V, +)$ sei ein affines Koordinatensystem $\{o; e_1, \dots, e_n\}$ fest gewählt. Wir bezeichnen dann mit dem Symbol ∂_i das konstante Vektorfeld

$$\partial_i : X \rightarrow V, \quad p \mapsto e_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

zum Basisvektor e_i . Die entsprechende Rolle im Kalkül mit 1-Formen spielen die Differenziale der affinen Koordinaten. Wir erinnern daran, dass durch die Wahl eines affinen Koordinatensystems $\{o; e_1, \dots, e_n\}$ affine Koordinatenfunktionen

$$x_i(p) = \vartheta_i(p - o) \quad (i = 1, \dots, n)$$

festgelegt werden. Ihre Differenziale dx_i sind konstant:

$$(dx_i)_p(v) = \left. \frac{d}{dt} \vartheta_i(p + tv - o) \right|_{t=0} = \vartheta_i(v),$$

d.h. unabhängig vom Punkt p . Das innere Produkt von dx_i mit ∂_j ist die konstante Funktion

$$dx_i(\partial_j) = \delta_{ij}$$

mit Funktionswert $\delta_{ij}(p) = \delta_{ij} = 0$ für $i \neq j$ und $\delta_{ij}(p) = \delta_{ij} = 1$ für $i = j$.

Für die Koordinatendarstellung von Vektorfeldern und 1-Formen benötigt man die Operation der Multiplikation mit Funktionen. Hierzu erinnern wir zunächst an die Operation der Skalarmultiplikation für Vektoren und Linearformen:

$$\mathbb{R} \times V \rightarrow V, \quad (a, v) \mapsto a \cdot v \equiv av,$$

$$\mathbb{R} \times V^* \rightarrow V^*, \quad (a, \lambda) \mapsto a \cdot \lambda \equiv a\lambda.$$

Punktweise Übertragung gibt dann eine Multiplikation

$$\text{Funktionen} \times \text{Vektorfelder} \rightarrow \text{Vektorfelder}, \quad (f, u) \mapsto f u$$

$$\text{Funktionen} \times \text{1-Formen} \rightarrow \text{1-Formen}, \quad (f, \omega) \mapsto f \omega$$

durch

$$(f u)(p) = f(p) u(p) \quad \text{bzw.} \quad (f \omega)_p = f(p) \omega_p.$$

Im letzteren Fall lautet die ausführliche Schreibweise

$$(f \omega)_p(v) = f(p) \omega_p(v).$$

Hiermit haben wir die Möglichkeit, beliebige Vektorfelder und 1-Formen als **Linearkombinationen** der Basisvektorfelder ∂_i bzw. der Koordinatenformen dx_i mit Funktionen als Koeffizienten zu auszudrücken:

$$u = \sum_{i=1}^n u_i \partial_i, \quad \omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx_i.$$

Wegen $dx_i(\partial_j) = \delta_{ij}$ gelten die Formeln

$$\omega(\partial_i) = \omega_i, \quad dx_i(u) = u_i, \quad \omega(u) = \sum_{i=1}^n \omega_i u_i.$$

2.5 Gradient

Für eine differenzierbare Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ kennen wir bereits das Differential df . Ist der affine Raum X mit einer geometrischen Struktur ausgestattet, so können wir der Funktion f neben der 1-Form df auch noch ein Vektorfeld, das sog. **Gradientenfeld** (kurz: Gradient) $\text{grad} f$, zuordnen. Wir betonen, dass das Differential fundamentaler als der Gradient ist: das Differential existiert immer, während der Gradient nur definiert werden kann, wenn die im nächsten Abschnitt erläuterte Zusatzstruktur zur Verfügung steht.

2.5.1 Euklidischer Raum

In Abschnitt 1.7 haben wir den Begriff des affinen Raums eingeführt. Kennzeichnend für affine Räume ist die Existenz von Geraden, Ebenen, usw. sowie der Begriff von Parallelität und Paralleltranslation. In sog. Euklidischen Räumen, deren dreidimensionale Version unter Vernachlässigung relativistischer und gravitativer Effekte als Modell für den realen physikalischen Raum taugt, hat man die zusätzliche Struktur eines Euklidischen Skalarprodukts. Diese Zusatzstruktur eröffnet die Möglichkeit der Längen- und Winkelmessung für Vektoren und Linearformen.

Definition. Sei V ein reeller Vektorraum. Unter einem **Euklidischen Skalarprodukt** auf V versteht man eine Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

mit den folgenden Eigenschaften.

1. Linearität:

$$\langle u, av + bw \rangle = a \langle u, v \rangle + b \langle u, w \rangle \quad (a, b \in \mathbb{R}; u, v, w \in V).$$

2. Symmetrie:

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle \quad (u, v \in V).$$

3. Positivität:

$$\langle v, v \rangle > 0 \quad \text{für alle } v \in V, v \neq \mathbf{0}.$$

Ein Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ mit Euklidischem Skalarprodukt heißt Euklidisch. In einem Euklidischen Vektorraum existiert eine kanonische Norm, die **Euklidische Norm**. Sie ist definiert als die positive Wurzel des Euklidischen Skalarprodukts eines Vektors mit sich selbst:

$$\|v\| := +\sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Die Euklidische Norm $\|v\|$ eines Vektors v wird auch als seine **Länge** bezeichnet.

Der **Winkel** $\angle(u, v)$ zwischen zwei Vektoren u, v ist erklärt durch

$$\cos \angle(u, v) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}.$$

Zwei Vektoren u, v mit der Eigenschaft $\langle u, v \rangle = 0$ heißen zueinander senkrecht oder **orthogonal**.

Definition. Unter einem **Euklidischen Raum** E_n versteht man einen affinen Raum $(X, V, +)$ mit Euklidischem Differenzvektorraum $V = \mathbb{R}^n$. Ein **kartesisches** Koordinatensystem für $(X, V, +)$ ist ein affines Koordinatensystem $\{o; e_1, \dots, e_n\}$ mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass die Basisvektoren ein **Orthonormalsystem** bilden:

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

Bzgl. einer kartesischen Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ wird das Euklidische Skalarprodukt zweier Vektoren $u = \sum u_i e_i$ und $v = \sum v_i e_i$ wie folgt ausgedrückt:

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i.$$

2.5.2 Euklidischer Isomorphismus: 1-Formen \rightarrow Vektorfelder

Sei E_n der n -dimensionale Euklidische Raum mit Differenzvektorraum $V = \mathbb{R}^n$. (Unser besonderes Interesse gilt natürlich dem wichtigen Spezialfall $n = 3$, doch was wir in diesem Abschnitt besprechen, ist von der Dimension n unabhängig.) Jeder 1-Form $\alpha : E_n \rightarrow V^*$ wollen wir jetzt ein Vektorfeld $\mathcal{I}(\alpha) : E_n \rightarrow V$ zuordnen.

Dazu benötigen wir eine bijektive lineare Abbildung (kurz: einen **Isomorphismus**)

$$\mathcal{I} : V^* \rightarrow V, \quad \lambda \mapsto \mathcal{I}(\lambda),$$

zwischen Linearformen und Vektoren. Unter Verwendung des Euklidischen Skalarprodukts von V definieren wir zu den **inversen Isomorphismus** \mathcal{I}^{-1} durch

$$\mathcal{I}^{-1}(v) = \langle v, \cdot \rangle$$

oder (äquivalent) den Isomorphismus selbst durch

$$\mathcal{I}(\lambda) = \langle \mathcal{I}(\lambda), \cdot \rangle .$$

Speziell gelten für jede Orthonormalbasis $\{e_1, \dots, e_n\}$ von V die **Relationen**

$$\mathcal{I}(\vartheta_i) = e_i, \quad \mathcal{I}^{-1}(e_i) = \vartheta_i \quad (i = 1, \dots, n),$$

wobei $\vartheta_1, \dots, \vartheta_n$ wie immer die Linearformen der Dualbasis sind.

Punktweise Übertragung ergibt jetzt einen Isomorphismus (den wir ebenfalls mit \mathcal{I} bezeichnen) zwischen 1-Formen und Vektorfeldern: wir ordnen jedem Vektorfeld v eine **1-Form** $\mathcal{I}^{-1}(v)$ zu durch

$$\mathcal{I}^{-1}(v)_p = \langle v(p), \cdot \rangle ,$$

und jeder 1-Form α ein **Vektorfeld** $\mathcal{I}(\alpha)$ durch

$$\alpha_p = \langle \mathcal{I}(\alpha)(p), \cdot \rangle .$$

Wie oben erläutert können wir im Spezialfall $n = 3$ jede 1-Form α lokal durch eine Ebenenschar visualisieren. Anschaulich gesprochen steht dann das Vektorfeld $\mathcal{I}(\alpha)$ überall **senkrecht** zu den Ebenen von α , wobei der Ebenenabstand von α **invers** zur Länge der Vektoren von $\mathcal{I}(\alpha)$ ist. Zum **Beweis** dieser Aussage fixieren wir einen Punkt p und vereinbaren die Abkürzungen $\lambda \equiv \alpha_p$ und $\mathcal{I}(\alpha)(p) \equiv \mathcal{I}(\lambda)$. Dann argumentieren wir in zwei Schritten:

1. In die Linearform $\lambda = \langle \mathcal{I}(\lambda), \cdot \rangle$ setzen wir einen beliebigen Vektor v ein, der parallel zu den Ebenen von λ liegt. Es folgt $0 = \lambda(v) = \langle \mathcal{I}(\lambda), v \rangle$, d.h. $\mathcal{I}(\lambda)$ steht senkrecht auf den Ebenen von λ .
2. Aus $\|\mathcal{I}(\lambda)\|^2 = \langle \mathcal{I}(\lambda), \mathcal{I}(\lambda) \rangle = \lambda(\mathcal{I}(\lambda))$ folgt

$$\text{Länge}(\mathcal{I}(\lambda)) = \|\mathcal{I}(\lambda)\| = \lambda \left(\frac{\mathcal{I}(\lambda)}{\|\mathcal{I}(\lambda)\|} \right) ,$$

also ist $\text{Länge}(\mathcal{I}(\lambda))$ reziprok zum Ebenenabstand von λ .

Bemerkung. Mit der Einführung eines Euklidischen Skalarprodukts wird über das Längenmaß der Einheitsvektoren e (mit $\langle e, e \rangle = 1$) ein **Maßstab** ℓ festgelegt. Mit obiger Längenbeziehung ist gemeint:

$$\text{Länge}(\mathcal{I}(\lambda)) \times \text{Ebenenabstand}(\lambda) = \ell^2 .$$

2.5.3 Differenzial und Gradient

Spezialisieren wir den Isomorphismus \mathcal{I} zwischen 1-Formen und Vektorfeldern zum Sonderfall des Differenzials einer Funktion, so erhalten wir:

Definition. Unter dem **Gradienten** einer Funktion $f : E_n \rightarrow \mathbb{R}$ versteht man das Vektorfeld

$$\text{grad } f := \mathcal{I}(df) .$$

Andere Schreibweisen für den Gradienten sind

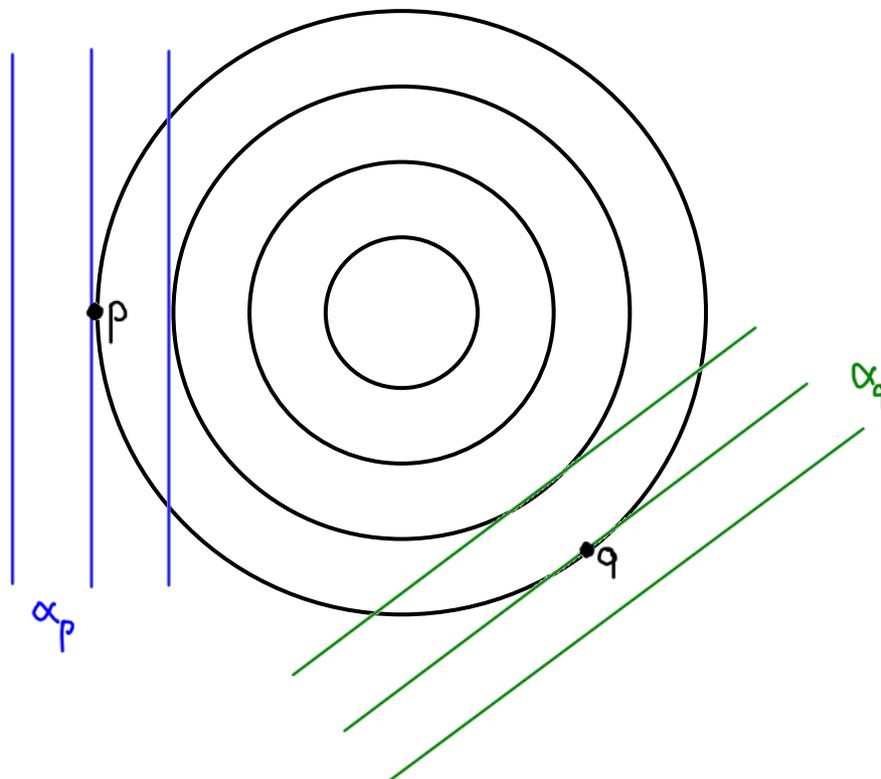
$$\text{grad } f \equiv \nabla f \equiv \vec{\nabla} f .$$

Wir wollen den Gradienten nun anschaulich deuten (oder **visualisieren**). Als Vorbereitung betrachten wir zuerst das Differenzial. Zwecks besserer Vorstellung spezialisieren wir zum Fall $n = 3$. Eine Funktion $f : E_3 \rightarrow \mathbb{R}$ veranschaulichen wir durch ihre **Niveauflächen**,

$$S_r := \{p \in E_3 \mid f(p) = r \in \mathbb{R}\} .$$

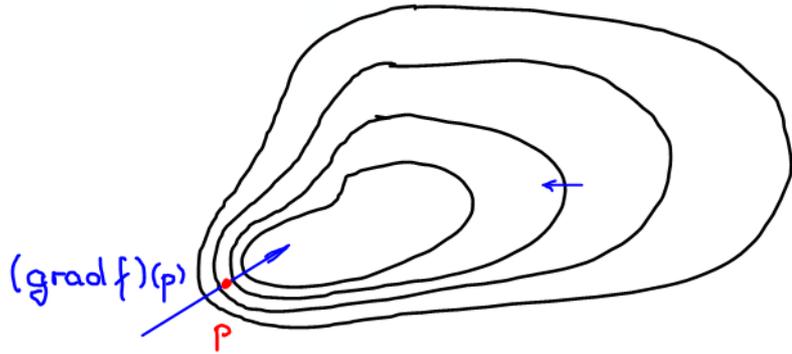
Zum Beispiel sind die Niveauflächen der **Euklidischen Abstandsfunktion** $f = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (in kartesischen Koordinaten $x_1 \equiv x, x_2 \equiv y, x_3 \equiv z$) Kugeloberflächen.

Nun zur 1-Form $\alpha = df$. Ihre Ebenenschar im Punkt p entsteht durch **Linearisierung** der Niveauflächen von f im Punkt p . Dabei ergibt eine dichte/dünne Aufeinanderfolge von Niveauflächen eine dicht/dünn gestaffelte Ebenenschar.



Interpretation. Der Gradient einer Funktion f steht überall senkrecht auf den Niveauflächen von f . Dabei verhält sich die Länge des Gradienten reziprok zum Abstand zwischen den Niveauflächen.

Beispiel (in zwei Dimensionen): **Niveaulinien** einer Höhenfunktion. Der Gradient zeigt in Richtung des **steilsten Anstiegs** und ist umso größer, je dichter die Höhenlinien liegen.



2.5.4 Partielle Ableitung

Zum Zweck der Koordinatendarstellung des Differenzials und des Gradienten definieren wir jetzt den Begriff der partiellen Ableitung. Zunächst befassen wir uns nur mit dem Differenzial df . Sei dazu $\{o; e_1, \dots, e_n\}$ ein affines Koordinatensystem des Euklidischen Raums E_n (oder eines anderen affinen Raums). Wie zuvor bezeichnen wir die affinen Koordinatenfunktionen mit $x_i : E_n \rightarrow \mathbb{R}$. Ihre Differenziale sind die Koordinatenformen $dx_i : E_n \rightarrow V^*$.

Definition. Für eine differenzierbare Funktion $f : E_n \rightarrow \mathbb{R}$ definiert man die **partielle Ableitung**

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : E_n \rightarrow \mathbb{R}$$

als den Wert des Differenzials von f auf dem Basisvektor e_i :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) := (df)_p(e_i) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + te_i) - f(p)}{t}. \quad \square$$

Hieraus folgt für das Differenzial die **Koordinatendarstellung**

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Wir wenden uns jetzt dem Gradienten zu. Um einen simplen Ausdruck für ihn zu gewinnen, müssen wir die Wahl des Koordinatensystems unter Verwendung der Euklidischen Struktur von E_n einschränken. Sei deshalb das affine Koordinatensystem $\{o; e_1, \dots, e_n\}$ ab jetzt kartesisch, d.h. die Basisvektoren e_1, \dots, e_n bilden ein Orthonormalsystem, $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. Dann haben wir $\mathcal{I}(dx_i) = \partial_i$, und für den Gradienten folgt der **Ausdruck**

$$\text{grad } f = \mathcal{I}(df) = \mathcal{I} \left(\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \partial_i.$$

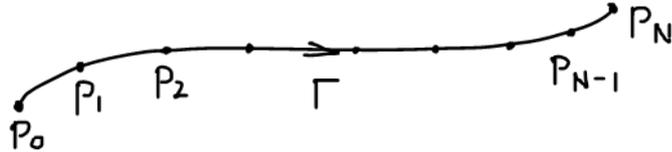
Abschließend soll noch einmal betont werden, dass das Differenzial immer existiert, während zur Bildung des Gradienten die Euklidische Struktur des Raums notwendig ist. Dieser wichtige Unterschied wird spätestens in der Thermodynamik deutlich. Im Zustandsraum der Thermodynamik gibt es keinen natürlichen Begriff von Skalarprodukt, weshalb man dort viele Differenziale aber keine Gradienten zu sehen bekommt.

Merke: Ohne Skalarprodukt kein Gradient!

2.6 Wegintegrale

Eine besonders wichtige Eigenschaft von 1-Formen ist, dass sie sich in kanonischer Weise längs Kurven im Raum integrieren lassen.

Definition (anschaulich). Wir erklären das **Wegintegral** einer 1-Form $\alpha : X \rightarrow V^*$ längs einer Kurve (oder eines Weges) Γ in einem affinen Raum $(X, V, +)$. Dazu unterteilen wir den Weg gleichmäßig in Stücke, indem wir eine große Zahl von Stützpunkten p_0, p_1, \dots, p_N einführen:



Dann berechnen wir die Summe

$$\alpha_{p_0}(p_1 - p_0) + \alpha_{p_1}(p_2 - p_1) + \dots + \alpha_{p_{N-1}}(p_N - p_{N-1}) .$$

Schließlich verfeinern wir die Kette der Stützpunkte, bis sich im Limes $N \rightarrow \infty$ ein Grenzwert (nämlich das Wegintegral $\int_{\Gamma} \alpha$ von α längs Γ) einstellt:

$$\int_{\Gamma} \alpha := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_{p_i}(p_{i+1} - p_i) . \quad (2.14)$$

Bemerkung. Für diese Definition wird nur die affine Struktur des Raumes benötigt: zur Bestimmung der auftretenden Summanden $\alpha_{p_i}(p_{i+1} - p_i)$ tun wir nichts weiter, als die Linearformen α_{p_i} auf den Differenzvektoren $p_{i+1} - p_i$ auszuwerten. Hierfür genügt der Begriff von Parallelität – im anschaulichen Bild von Abschnitt 1.4 zählen wir ganz einfach die von $p_{i+1} - p_i$ gekreuzten Ebenen von α_{p_i} . Winkelmessung und/oder Längenmessung von Vektoren kommt hier nicht vor! (Tatsächlich ist Winkel- und Längenmessung für unser spezielles Ziel, nämlich die Berechnung von Wegintegralen von Kraftfeldern, nicht angezeigt.) \square

Um zu einer konzisen Definition zu gelangen, ersetzt man grob gesprochen die Differenzvektoren der Stützpunkte durch die Tangentialvektoren der Kurve. Das genaue Vorgehen ist wie folgt. Sei Γ eine Kurve in X mit Anfangspunkt p und Endpunkt q . Unter einer **Parametrisierung** von Γ versteht man eine differenzierbare Abbildung

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow X$$

mit $\gamma([0, 1]) = \Gamma$ (als Punktmenge), $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$ und $\gamma'(t) \neq \mathbf{0}$ für alle $t \in [0, 1]$.

Definition (Wegintegral). Ist $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ eine Parametrisierung der Kurve Γ , so erklärt man das Wegintegral der 1-Form $\alpha : X \rightarrow V^*$ längs Γ durch

$$\int_{\Gamma} \alpha := \int_0^1 \alpha_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt . \quad (2.15)$$

Bemerkung. Das Wegintegral hängt nicht von der Wahl der Parametrisierung ab. Ist nämlich

$\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow X$ eine andere Parametrisierung von Γ , so existiert eine monoton wachsende differenzierbare Funktion $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ mit $\gamma_1(t) = \gamma(h(t))$, und es resultiert

$$\int_0^1 \alpha_{\gamma_1(t)}(\gamma_1'(t)) dt = \int_0^1 \alpha_{\gamma(h(t))}(\gamma'(h(t))) h'(t) dt = \int_0^1 \alpha_{\gamma(s)}(\gamma'(s)) ds .$$

Das erste Gleichheitszeichen folgt hier aus der Kettenregel, das zweite aus der Variablensubstitution $s = h(t)$.

2.6.1 Wegintegral in kartesischen Koordinaten

Die konkrete Berechnung des Wegintegrals erfordert in der Regel die Wahl eines Koordinatensystems. Hierbei hat man völlige Freiheit, denn das Wegintegral drückt sich in allen Koordinaten in der gleichen Weise aus. Von dieser Freiheit wollen wir hier aber noch keinen Gebrauch machen, sondern ein ganz spezielles Koordinatensystem verwenden. Außerdem arbeiten wir in diesem Abschnitt im dreidimensionalen Euklidischen Raum, E_3 (siehe Abschnitt 2.5.1).

Wir erinnern daran, dass ein affines Koordinatensystem $\{o; e_x, e_y, e_z\}$ von E_3 kartesisch heißt, wenn die Basisvektoren e_x, e_y, e_z ein Orthonormalsystem von $V = \mathbb{R}^3$ bilden. Durch ein solches Koordinatensystem werden kartesische Koordinaten x, y, z und Koordinatenformen dx, dy, dz bestimmt. dx läßt sich anschaulich als die Schar von Ebenen auffassen, die parallel zur yz -Ebene liegen und Abstand Eins voneinander haben (mit Pluspol bei $x = +\infty$). Eine analoge Aussage gilt für dy und dz . Eine beliebige 1-Form A wird durch $A = A_x dx + A_y dy + A_z dz$ ausgedrückt, wobei die Komponenten Funktionen $A_x, A_y, A_z : E_3 \rightarrow \mathbb{R}$ sind.

Rechenbeispiel. Eine **Schraubenlinie** Γ mit Radius R und Schraubenhöhe L wird parametrisiert durch

$$[0, 1] \ni t \mapsto \gamma(t) = o + R \cos(at) e_x + R \sin(at) e_y + Lt e_z .$$

Zu berechnen sei das Wegintegral längs Γ eines homogenen Kraftfelds K mit Koordinatendarstellung

$$K = k(dy + dz), \quad k \in \mathbb{R} .$$

Zuerst ermitteln wir durch Ableiten nach t den Tangentialvektor der Kurve:

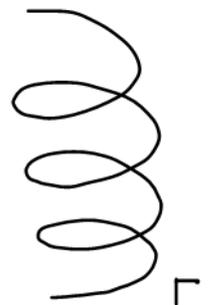
$$\gamma'(t) = -Ra \sin(at) e_x + Ra \cos(at) e_y + L e_z .$$

Einsetzen ins Kraftfeld ergibt

$$K_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = kRa \cos(at) + kL .$$

So erhalten wir das Wegintegral

$$\int_{\Gamma} K = \int_0^1 K_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt = \int_0^1 (kRa \cos(at) + kL) dt = kR \sin(a) + kL .$$



2.6.2 Wegintegral einer exakten 1-Form

Wie zuvor sei $(X, V, +)$ ein affiner Raum.

Definition. Eine 1-Form $\alpha : X \rightarrow V^*$ heißt **exakt**, wenn sie das Differential einer Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ist, wenn also gilt

$$\alpha_p(v) = (df)_p(v) \equiv (D_p f)(v) ,$$

oder kurz: $\alpha = df$. Ein exaktes Kraftfeld K heißt **konservativ**. In der Physik schreibt man in diesem Fall $K = -dU$ und nennt die Funktion U ein **Potenzial** des Kraftfeldes K .

Hauptsatz (der Differenzial- und Integralrechnung). Das Wegintegral $\int_{\Gamma} \alpha$ einer exakten 1-Form $\alpha = df$ hängt nur von Anfangspunkt p und Endpunkt q der Kurve Γ ab, nicht aber vom Verlauf der Kurve dazwischen:

$$\int_{\Gamma} \alpha = \int_{\Gamma} df = f(q) - f(p) .$$

Beweis. Wähle eine Parametrisierung der Kurve Γ ,

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow X , \quad t \mapsto \gamma(t) , \quad \gamma(0) = p , \quad \gamma(1) = q .$$

Per Definition ist dann

$$\int_{\Gamma} \alpha = \int_0^1 (df)_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt .$$

Für die Verkettung von Abbildungen

$$[0, 1] \xrightarrow{\gamma} X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

gilt nun nach der Kettenregel

$$(df)_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = (D_{\gamma(t)} f)(D_t \gamma) = D_t(f \circ \gamma) = \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) .$$

Hiermit folgt schon das gewünschte Ergebnis:

$$\int_{\Gamma} \alpha = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) dt = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = f(q) - f(p) .$$

Beispiel. Sei jetzt $X = E_3$ wieder der Euklidische Raum mit kartesischen Koordinaten x, y, z . Die **elektrische Feldstärke** E einer im Koordinatenursprung befindlichen Punktladung Q ist die 1-Form

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x dx + y dy + z dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} .$$

Diese Feldstärke ist exakt, $E = -d\Phi$, mit elektrischem Potenzial

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} .$$

Nach dem obigen Hauptsatz ist das Wegintegral $\int_{\Gamma} E = \Phi(p) - \Phi(q)$ längs einer Kurve Γ von p nach q wegunabhängig. Man nennt $\int_{\Gamma} E =: \int_p^q E$ die **elektrische Spannung** zwischen den Punkten p und q .

2.6.3 Anschauliche Deutung des Hauptsatzes

Wir wissen aus Abschnitt 1.4, dass wir Linearformen $\lambda : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ durch Ebenenscharen veranschaulichen können – in dieser bildlichen Vorstellung wird der Funktionswert $\lambda(v)$ durch Abzählen der von v gekreuzten Ebenen bestimmt. In Abschnitt 2.5.3 haben wir dann gesehen, wie die Ebenenschar zu $\lambda \equiv (df)_p$ durch Linearisierung der Niveauflächen der Funktion f entsteht. Diese Deutung des Differenzials df in Verbindung mit der anschaulichen Definition des Wegintegrals einer 1-Form in Gl. (2.14) lässt eine intuitive Deutung des Hauptsatzes zu.

Deutung (des Hauptsatzes). Beim Integrieren einer exakten 1-Form $\alpha = df$ führt die Prozedur des “Abzählens gekreuzter Ebenen” (im differenziellen Limes, $N \rightarrow \infty$) insgesamt dazu, dass gekreuzte Niveauflächen gezählt werden, das Integral $\int_p^q df$ also die Niveau-Zunahme/Abnahme $f(q) - f(p)$ berechnet.

2.6.4 Wegintegral eines Vektorfelds

Das Wegintegral einer 1-Form ist immer erklärt, sofern der Raum affin ist (oder allgemeiner: eine differenzierbare Struktur hat). Anders im Falle eines Vektorfeldes! Um Vektorfelder längs Kurven zu integrieren, muss man die Geometrie des Raumes kennen und heranziehen. Sei $X = E_n$ im Folgenden ein Euklidischer Raum. Aus Abschnitt 2.5.2 ist uns schon der Euklidische Isomorphismus \mathcal{I} zwischen 1-Formen und Vektorfeldern bekannt.

Definition. Sei $v : X \rightarrow V$ ein Vektorfeld in einem Euklidischen Raum X mit Euklidischem Differenzvektorraum V . Das **Wegintegral** $\int_\Gamma v \cdot d\ell$ von v längs einer Kurve Γ ist erklärt durch

$$\int_\Gamma v \cdot d\ell := \int_\Gamma \mathcal{I}^{-1}(v).$$

Zur Berechnung des Wegintegrals des Vektorfeldes v geht man also zur entsprechenden 1-Form $\mathcal{I}^{-1}(v)$ über und integriert dann die 1-Form in der uns bekannten, natürlichen Weise. \square

Als Konsequenz des Hauptsatzes über Wegintegrale exakter 1-Formen ergibt sich:

Satz. Für das Wegintegral eines Gradientenfelds $\text{grad } f$ längs einer Kurve Γ von p nach q gilt

$$\int_\Gamma \text{grad } f \cdot d\ell = f(q) - f(p).$$

Beweis. $\int_\Gamma \text{grad } f \cdot d\ell = \int_\Gamma \mathcal{I}^{-1}(\text{grad } f) = \int_\Gamma df = f(q) - f(p)$.

2.7 Flächenintegrale

Die guten Integranden für Flächenintegrale sind weder Vektorfelder noch 1-Formen, sondern sogenannte 2-Formen. Der Begriff der 2-Form wird im nächsten Abschnitt vorbereitet.

2.7.1 Alternierende 2-lineare Formen

Definition. Sei V ein Vektorraum. Eine **alternierende 2-lineare Form** ω auf V ist eine Abbildung

$$\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

mit den Eigenschaften

1. **Schiefsymmetrie:**

$$\omega(u, v) = -\omega(v, u) \quad (u, v \in V).$$

2. **(Bi-)Linearität:**

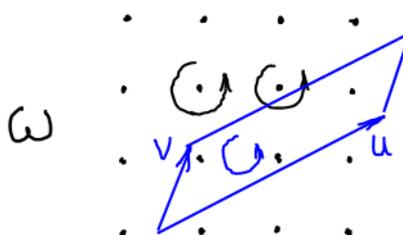
$$\omega(u + v, w) = \omega(u, w) + \omega(v, w) \quad (u, v, w \in V),$$

$$\omega(au, v) = a\omega(u, v) \quad (a \in \mathbb{R}).$$

Der Vektorraum der alternierenden 2-linearen Formen auf V heißt $\text{Alt}^2(V)$.

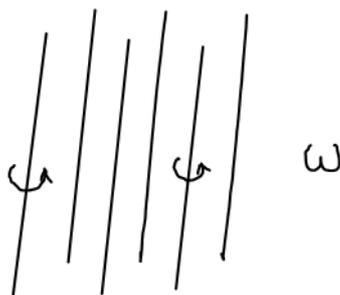
Ähnlich wie für Linearformen lässt sich auch für alternierende 2-lineare Formen ein anschauliches Modell angeben. Die Details des Modells hängen von der Raumdimension ab.

Modell $d = 2$. Ein Element $\omega \in \text{Alt}^2(\mathbb{R}^2)$ lässt sich als homogene Schar von Punkten mit **Umlaufsinn** visualisieren:



Der Zahlenwert $\omega(u, v)$ wird ermittelt, indem man die vorzeichenbehaftete Zahl der Punkte von ω im Parallelogramm mit den Kanten u und v abzählt (inklusive Dezimalteil, durch Mitteln über alle translatierten Parallelogramme). Das Vorzeichen ist plus oder minus, je nachdem ob der Zirkulationssinn des Parallelogramms ("zuerst u , dann v ") mit dem Umlaufsinn der Punkte von ω übereinstimmt bzw. nicht übereinstimmt.

Modell $d = 3$. Ein Element $\omega \in \text{Alt}^2(\mathbb{R}^3)$ lässt sich als homogene Schar von Geraden mit **Zirkulationssinn** visualisieren:



Der Zahlenwert $\omega(u, v)$ wird ermittelt, indem man die vorzeichenbehaftete Zahl der Kreuzungspunkte der Geradenschar von ω mit dem von u und v aufgespannten Parallelogramm bestimmt. Das Vorzeichen ist wieder plus oder minus, je nachdem ob der Zirkulationssinn übereinstimmt oder nicht.

2.7.2 Äußeres Produkt

Definition. Sei V ein Vektorraum mit Dualraum V^* . Für zwei Linearformen $\lambda, \mu \in V^*$ erklärt man das **äußere Produkt** $\lambda \wedge \mu \in \text{Alt}^2(V)$ durch

$$(\lambda \wedge \mu)(v, w) := \lambda(v)\mu(w) - \lambda(w)\mu(v).$$

Visualisierung. Für den Fall $V = \mathbb{R}^3$ behaupten wir, dass sich das äußere Produkt wie folgt anschaulich verstehen lässt. (i) Die Geradenschar von $\lambda \wedge \mu$ entsteht durch Bilden des Durchschnitts der Ebenenscharen von λ und μ . (ii) Den Zirkulationssinn von $\lambda \wedge \mu$ bekommt man mit der Regel “gehe zuerst in Richtung des Pluspols von λ , biege dann in Richtung des Pluspols von μ ab”.

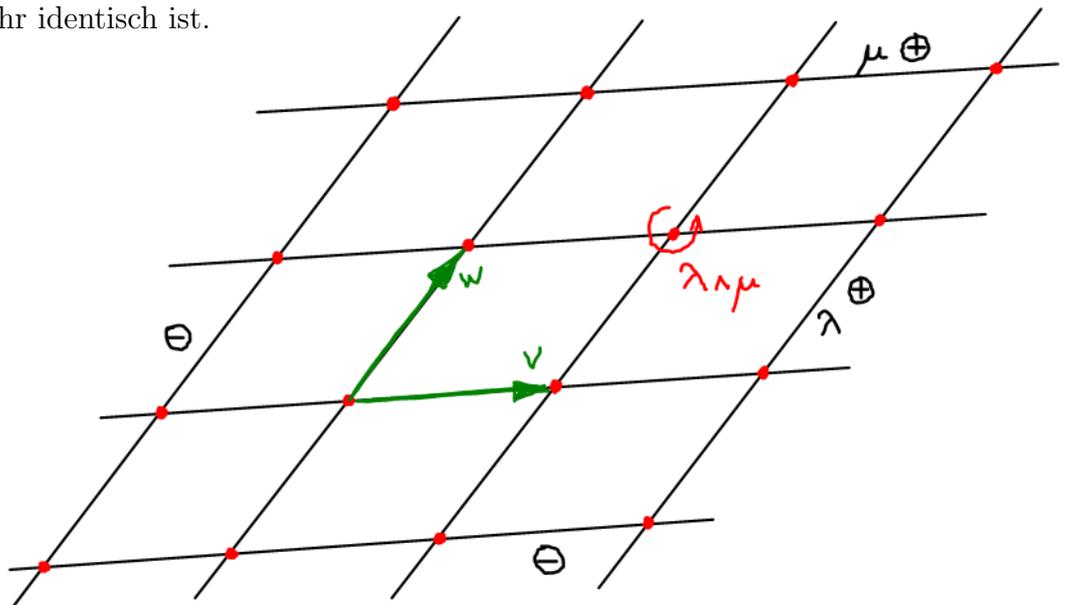
Beweis. Die Linearformen λ und μ seien linear unabhängig. (Andernfalls gilt $\lambda \wedge \mu = 0$.) Dann existiert ein linear unabhängiges Tripel von Vektoren u, v, w mit den Eigenschaften

$$\lambda(v) = \mu(w) = 1, \quad \lambda(w) = \mu(v) = \lambda(u) = \mu(u) = 0.$$

Durch einfache Rechnung erhält man

$$(\lambda \wedge \mu)(v, w) = 1, \quad (\lambda \wedge \mu)(w, u) = 0, \quad (\lambda \wedge \mu)(u, v) = 0.$$

Diese drei Gleichungen legen $\lambda \wedge \mu$ eindeutig fest. Die letzten zwei besagen, dass die Geradenschar von $\lambda \wedge \mu$ parallel zum Vektor u liegen muss. Da dieser Vektor seinerseits wegen $\lambda(u) = \mu(u) = 0$ parallel zu den Ebenenscharen von λ und μ liegt, ist die Geradenschar von $\lambda \wedge \mu$ parallel zu den Schnittgeraden der Ebenenscharen von λ und μ . Aus $(\lambda \wedge \mu)(v, w) = 1$ folgt schließlich, dass die Geradenschar von $\lambda \wedge \mu$ nicht nur parallel zur Schnittgeradenschar der Linearformen λ, μ liegt, sondern sogar mit ihr identisch ist.



2.7.3 2-Formen

In Abschnitt 2.4 haben wir für räumlich variable Linearformen den Begriff der 1-Form eingeführt. In genau derselben Weise kommen wir zum Begriff der 2-Form, indem wir zulassen, dass die alternierenden 2-linearen Formen räumlich variieren.

Definition. Eine 2-Form ω auf einem affinen Raum $(X, V, +)$ ist eine differenzierbare Abbildung

$$\omega: X \rightarrow \text{Alt}^2(V), \quad p \mapsto \omega_p,$$

die jedem Punkt p eine alternierende 2-lineare Form ω_p zuweist.

Beispiel. Ein physikalisch wichtiges Beispiel für eine 2-Form im Euklidischen Raum E_3 ist die magnetische Feldstärke B . Dementsprechend hat man sich ein räumlich konstantes Magnetfeld

so wie im anschaulichen Modell ($d = 3$) von Abschnitt 2.7.1 vorzustellen. Die Geraden der Schar werden in diesem Fall als magnetische Flusslinien bezeichnet.

Definition. Unter dem **äußeren Produkt** zweier 1-Formen α und β versteht man die 2-Form $\alpha \wedge \beta$. Hierbei ist das äußere Produkt punktweise erklärt:

$$(\alpha \wedge \beta)_p := \alpha_p \wedge \beta_p .$$

Insbesondere gilt

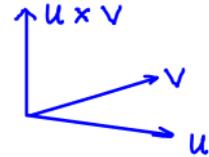
$$(dx \wedge dy)_p = (dx)_p \wedge (dy)_p = \vartheta_x \wedge \vartheta_y , \quad \text{usw.}$$

Visualisierung. Man bekommt die Geradenschar von $dx \wedge dy$, indem man die Niveauflächen der Koordinatenfunktion x mit den Niveauflächen der Koordinatenfunktion y schneidet. Die Geraden dieser Schar liegen parallel zur z -Achse.

2.7.4 Vektorprodukt und Spatprodukt

Wir kommen jetzt zu zwei besonderen Operationen, die nur im \mathbb{R}^3 definiert werden können. Sei also $V = \mathbb{R}^3$, und sei $u, v \in V$ ein Vektorenpaar. Unter dem **Vektorprodukt** von u mit v versteht man den Vektor $u \times v \in V$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. $\langle u, u \times v \rangle = 0 = \langle u \times v, v \rangle$, d.h. $u \times v$ steht senkrecht auf beiden Faktoren u und v .
2. $u, v, u \times v$ (in dieser Reihenfolge) genügen der **Rechte-Hand-Regel**.
3. Die Länge von $u \times v$ ist $\|u \times v\| = \|u\| \|v\| |\sin \angle(u, v)|$.



Aus dieser Definition deduziert man, dass das Vektorprodukt $V \times V \rightarrow V$ bilinear und **schiefsymmetrisch** ist. Für jede rechtshändige kartesische Basis e_x, e_y, e_z verifiziert man sofort

$$e_x \times e_y = e_z , \quad e_y \times e_z = e_x , \quad e_z \times e_x = e_y .$$

Für zwei beliebige Vektoren $u = u_x e_x + u_y e_y + u_z e_z$ und $v = v_x e_x + v_y e_y + v_z e_z$ hat man dann

$$u \times v = (u_x v_y - v_x u_y) e_z + (u_y v_z - v_y u_z) e_x + (u_z v_x - v_z u_x) e_y .$$

Beispiel. Bewegt sich ein Körper der Masse m am Ort p mit Geschwindigkeit v , so hat er bezüglich des Punktes o (der oft, wenn auch nicht immer, als der Koordinatenursprung gewählt wird) den **Drehimpuls**

$$L^{(o)} = (p - o) \times mv .$$

Merke: Die Angabe des Drehimpulses setzt immer die Wahl eines Bezugspunkts o voraus.

Kritik. Die Operation des Vektorprodukts ist von einem fundamentalen Standpunkt aus gesehen eigentlich überflüssig und unpassend. Es "passt nicht", weil es unnötigerweise eine Konvention, nämlich die Rechte-Hand-Regel, ins Spiel bringt, deren Wahl willkürlich ist und von der die Naturgesetze gar nicht abhängen (Ausnahme: schwache Wechselwirkung). Trotzdem wird in physikalischen Lehrbüchern und Texten vom Vektorprodukt häufig Gebrauch gemacht. \square

Durch Kombinieren des Vektorprodukts mit dem Euklidischen Skalarprodukt entsteht das **Spatprodukt**:

$$\Omega : V \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad (u, v, w) \mapsto \langle u \times v, w \rangle =: \Omega(u, v, w).$$

Bezüglich jeder rechtshändigen kartesischen Basis e_x, e_y, e_z gilt

$$\Omega(u, v, w) = (u_x v_y - v_x u_y) w_z + (u_y v_z - v_y u_z) w_x + (u_z v_x - v_z u_x) w_y.$$

Man sieht: $\Omega(v, u, w) = -\Omega(u, v, w) = \Omega(u, w, v)$ usw.

Interpretation. $|\Omega(u, v, w)|$ ist das **Volumen** des von u, v, w aufgespannten **Spats** (= Parallelepipeds). Das Spatprodukt $\Omega(u, v, w)$ ist positiv oder negativ, je nachdem ob u, v, w ein rechtshändiges bzw. linkshändiges System bilden.

2.7.5 Beziehung zwischen Vektorprodukt und äußerem Produkt

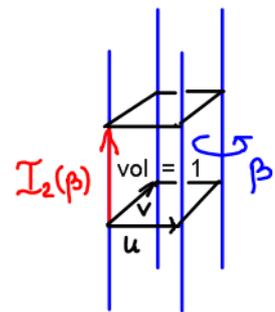
Das Spatprodukt $\Omega : V \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ für $V = \mathbb{R}^3$ liefert einen **Isomorphismus**

$$\mathcal{I}_2 : \text{Alt}^2(V) \rightarrow V, \quad \beta \mapsto v = \mathcal{I}_2(\beta)$$

durch

$$\mathcal{I}_2^{-1}(v) = \Omega(v, \cdot, \cdot) \quad \text{oder} \quad \beta = \Omega(\mathcal{I}_2(\beta), \cdot, \cdot).$$

Dieser Definition entnimmt man folgende **Charakterisierung** von $\mathcal{I}_2(\beta)$.



1. Der Vektor $\mathcal{I}_2(\beta)$ liegt parallel zur Geradenschar von β .
2. Die Richtung des Vektors $\mathcal{I}_2(\beta)$ genügt zusammen mit dem Zirkulationssinn von β der Rechten-Hand-Regel.
3. Ist u, v ein Vektorenpaar mit $\beta(u, v) = 1$, so hat der Spat mit den Kantenvektoren $u, v, \mathcal{I}_2(\beta)$ das Volumen Eins.

Bezüglich einer kartesischen Basis e_x, e_y, e_z mit Dualbasis $\vartheta_x, \vartheta_y, \vartheta_z$ gelten die **Relationen**

$$\mathcal{I}_2(\vartheta_x \wedge \vartheta_y) = e_z, \quad \mathcal{I}_2(\vartheta_y \wedge \vartheta_z) = e_x, \quad \mathcal{I}_2(\vartheta_z \wedge \vartheta_x) = e_y.$$

Beweis:

$$\mathcal{I}_2^{-1}(e_z)(v, w) = \Omega(e_z, v, w) = v_x w_y - w_x v_y = (\vartheta_x \wedge \vartheta_y)(v, w), \quad \text{usw. } \square$$

Sei nun $\mathcal{I}_1 \equiv \mathcal{I} : \text{Alt}^1(V) \equiv V^* \rightarrow V$ der uns aus Abschnitt 2.5.2 bekannte Isomorphismus zwischen Linearformen und Vektoren. Wir behaupten, dass die Isomorphismen \mathcal{I}_1 und \mathcal{I}_2 für $V = \mathbb{R}^3$ auf die folgende Weise miteinander zusammenhängen:

$$\mathcal{I}_2(\lambda \wedge \mu) = \mathcal{I}_1(\lambda) \times \mathcal{I}_1(\mu) \quad (\lambda, \mu \in V^*),$$

d.h. das äußere Produkt $\wedge : V^* \times V^* \rightarrow \text{Alt}^2(V)$ entspricht dem Vektorprodukt $V \times V \rightarrow V$.

Beweis (mittels kartesischer Basis):

$$\mathcal{I}_2(\vartheta_x \wedge \vartheta_y) = e_z = e_x \times e_y = \mathcal{I}_1(\vartheta_x) \times \mathcal{I}_1(\vartheta_y), \quad \text{usw.}$$

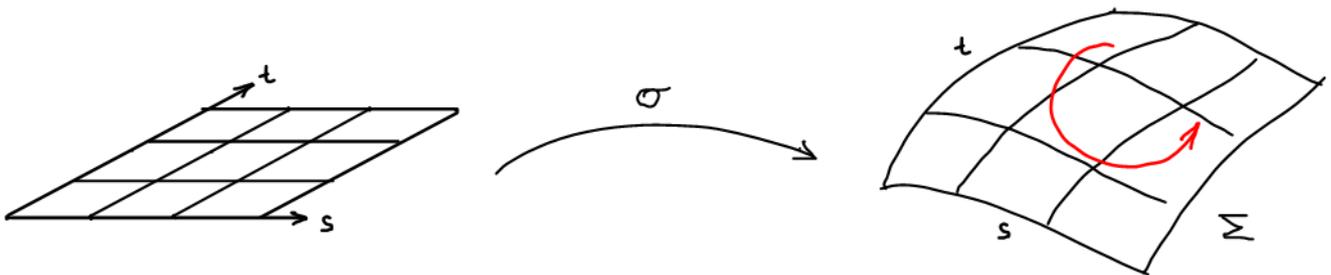
Bemerkung. Das äußere Produkt ist eine natürliche Operation, die für strukturlose Vektorräume jeder Dimension existiert. Das Vektorprodukt hingegen, das sei hier nochmals betont, ist un-natürlich in dem Sinn, dass es nur für $V = \mathbb{R}^3$ existiert und der Zusatzstruktur des Euklidischen Skalarprodukts in Kombination mit der Rechte-Hand-Regel bedarf.

2.7.6 Integral einer 2-Form

Eine **orientierte Fläche** ist (vereinfacht ausgedrückt) eine Fläche mit Zirkulationssinn. Eine Parametrisierung einer orientierten (Quader-)Fläche Σ ist eine differenzierbare Abbildung

$$\sigma : [0, 1]^2 \rightarrow \Sigma \subset X, \quad (s, t) \mapsto \sigma(s, t),$$

mit der Eigenschaft, dass das geordnete Paar von Tangentialvektoren $\frac{\partial}{\partial s}\sigma(s, t), \frac{\partial}{\partial t}\sigma(s, t)$ den Zirkulationssinn der Fläche Σ nachbildet. ('Geordnet' bedeutet hier, dass es auf die Reihenfolge ankommt.)



Definition. Es sei $(X, V, +)$ ein affiner Raum und $\omega : X \rightarrow \text{Alt}^2(V)$ eine 2-Form. Ist $\sigma : [0, 1]^2 \rightarrow \Sigma \subset X$ eine Parametrisierung der Fläche Σ , so ist das **Integral von ω über Σ** erklärt durch das iterierte (Riemann-)Integral

$$\int_{\Sigma} \omega := \int_0^1 \left(\int_0^1 \omega_{\sigma(s,t)} \left(\frac{\partial}{\partial s}\sigma(s,t), \frac{\partial}{\partial t}\sigma(s,t) \right) dt \right) ds.$$

Mitteilung. Diese Definition ist von der Wahl der Parametrisierung unabhängig.

Beispiel. Wir integrieren die konstante magnetische Feldstärke $B = B_0 dx \wedge dy$ (mit $B_0 \in \mathbb{R}$) über eine Hemisphäre S_+ mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung o und Parametrisierung

$$\sigma(s, t) = o + R \sin(\pi s/2) (\cos(2\pi t) e_x + \sin(2\pi t) e_y) + R \cos(\pi s/2) e_z.$$

Zunächst bestimmen wir den Tangentialvektor zur s -Koordinatenlinie:

$$\frac{\partial}{\partial s} \sigma(s, t) = \frac{1}{2} R \pi \cos(\pi s/2) (\cos(2\pi t) e_x + \sin(2\pi t) e_y) - \frac{1}{2} R \pi \sin(\pi s/2) e_z,$$

und den Tangentialvektor zur t -Koordinatenlinie:

$$\frac{\partial}{\partial t} \sigma(s, t) = 2R\pi \sin(\pi s/2) (-\sin(2\pi t) e_x + \cos(2\pi t) e_y).$$

Dann setzen wir die Tangentialvektoren in die 2-Form ein:

$$\begin{aligned} B_{\sigma(s,t)} \left(\frac{\partial}{\partial s} \sigma(s,t), \frac{\partial}{\partial t} \sigma(s,t) \right) &= B_0 R^2 \pi^2 \sin(\pi s/w) \cos(\pi s/2) (\cos^2(2\pi t) + \sin^2(2\pi t)) \\ &= \frac{1}{2} B_0 (\pi R)^2 \sin(\pi s) . \end{aligned}$$

Schließlich berechnen wir das Flächenintegral:

$$\int_{S_+} B = \frac{1}{2} B_0 (\pi R)^2 \int_0^1 \left(\int_0^1 \sin(\pi s) dt \right) ds = B_0 \pi R^2 .$$

2.7.7 Flächenintegral eines Vektorfeldes

Durch punktweise Anwendung der Abbildung \mathcal{I}_2 von Abschnitt 2.7.5 erhalten wir einen Isomorphismus

$$\mathcal{I}_2 : \text{2-Formen} \longrightarrow \text{Vektorfelder} .$$

Beispiel. Der 2-Form der magnetischen Feldstärke

$$B = B_{xy} dx \wedge dy + B_{yz} dy \wedge dz + B_{zx} dz \wedge dx$$

wird durch \mathcal{I}_2 das Vektorfeld des Magnetfeldes zugeordnet:

$$\mathcal{I}_2(B) = B_{xy} \partial_z + B_{yz} \partial_x + B_{zx} \partial_y .$$

Definition. Es sei $v : E_3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld und Σ eine orientierte Fläche in E_3 . Das Flächenintegral $\int_{\Sigma} v \cdot ds$ von v über Σ ist erklärt durch

$$\int_{\Sigma} v \cdot ds := \int_{\Sigma} \mathcal{I}_2^{-1}(v) .$$

Man konvertiert also das Vektorfeld v in die 2-Form $\mathcal{I}_2^{-1}(v)$ und integriert dann letztere in der schon bekannten Weise.

Bemerkung. Aus der Formel $\mathcal{I}_2^{-1}(v) = \Omega(v, \cdot, \cdot)$ erhalten wir den Ausdruck

$$\int_{\Sigma} v \cdot ds = \int_0^1 \left(\int_0^1 \Omega \left(v(\sigma(s,t)), \frac{\partial}{\partial s} \sigma(s,t), \frac{\partial}{\partial t} \sigma(s,t) \right) dt \right) ds .$$

Im Flächenintegral eines Vektorfeldes v integriert man also das **Spatvolumen** der drei Vektorfelder $v, \frac{\partial}{\partial s} \sigma, \frac{\partial}{\partial t} \sigma$. Wegen $\Omega(u, v, w) = \langle u, v \times w \rangle$ ist eine äquivalente Aussage, dass man im Flächenintegral das Euklidische Skalarprodukt von v mit dem Vektorfeld

$$\frac{\partial}{\partial s} \sigma(s,t) \times \frac{\partial}{\partial t} \sigma(s,t)$$

integriert. Laut Definition des Vektorprodukts steht letzteres **überall senkrecht** auf der Integrationsfläche Σ .

2.8 Rotation

Nach dem Gradienten werden wir jetzt einen zweiten Vektor-Differenzialoperator kennenlernen: die Rotation (engl. "curl"). Dieser Differenzialoperator ist eine Spezialität von E_3 . Um die Rotation in angemessener Weise einzuführen, müssen wir zuerst den allgemeinen Ableitungsbegriff für 1-Formen kennenlernen.

2.8.1 Äußere Ableitung einer 1-Form

Es sei X ein n -dimensionaler affiner Raum. Ist X mit einer Basis dx_1, dx_2, \dots, dx_n von Koordinatenformen ausgestattet, dann ist jede 1-Form α auf X darstellbar als Linearkombination

$$\alpha = \sum_{i=1}^n f_i dx_i$$

mit Komponenten $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Definition. Die **äußere Ableitung** einer 1-Form $\alpha = \sum f_i dx_i$ ist die 2-Form

$$d\alpha := \sum_{i=1}^n df_i \wedge dx_i .$$

Bemerkung. Einen äquivalenten Ausdruck erhält man mit $df_i = \sum \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j$ durch Verwenden der Schiefsymmetrie $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ des äußeren Produkts:

$$d\alpha = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i = \sum_{i<j} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} - \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) dx_i \wedge dx_j .$$

Für den Fall einer 1-Form $E = E_x dx + E_y dy + E_z dz$ im dreidimensionalen Raum E_3 hat man

$$dE = \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) dz \wedge dx . \quad \square$$

Die äußere Ableitung lässt sich in sehr anschaulicher Weise deuten (siehe später). Sie hat die charakteristische Eigenschaft **“Zweimal d gibt Null”**, was im vorliegenden Kontext Folgendes bedeutet.

Fakt. Die äußere Ableitung einer exakten 1-Form $\alpha = df$ verschwindet:

$$d\alpha = d(df) = \sum_{i<j} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \right) dx_i \wedge dx_j = 0 .$$

Beweis. Nach obiger Formel folgt die Aussage sofort aus der **Schwarz'schen Regel**

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) .$$

Letztere ist eine unmittelbare Konsequenz der Definition von partieller Ableitung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) (p) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} (p + s e_i) - \frac{\partial f}{\partial x_j} (p) \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(p + s e_i + t e_j) - f(p + s e_i) - f(p + t e_j) + f(p)) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (p) . \quad \square \end{aligned}$$

Man verwendet auch die kürzere Schreibweise

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} .$$

2.8.2 Rotation eines Vektorfeldes

Die **Rotation** ist ein Differenzialoperator, den es nur im E_3 gibt. Sie überführt Vektorfelder in Vektorfelder und zwar auf die folgende Weise:

$$\text{rot} : \text{Vektorfeld} \xrightarrow{\mathcal{I}_1^{-1}} 1\text{-Form} \xrightarrow{d} 2\text{-Form} \xrightarrow{\mathcal{I}_2} \text{Vektorfeld} .$$

Wir wandeln also das Vektorfeld v in die 1-Form $\mathcal{I}_1^{-1}(v)$ um, wenden dann die äußere Ableitung d an, und konvertieren schließlich $d\mathcal{I}_1^{-1}(v)$ in ein Vektorfeld mittels \mathcal{I}_2 . In Kurzform:

$$\text{rot} = \mathcal{I}_2 \circ d \circ \mathcal{I}_1^{-1} .$$

Aus dieser Definition folgt für die Rotation in kartesischen Koordinaten x, y, z die Formel

$$\begin{aligned} \text{rot } v &= \text{rot}(v_x \partial_x + v_y \partial_y + v_z \partial_z) = (\mathcal{I}_2 \circ d)(v_x dx + v_y dy + v_z dz) \\ &= \mathcal{I}_2 \left(\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) dz \wedge dx \right) \\ &= \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \partial_z + \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \partial_x + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \partial_y . \end{aligned}$$

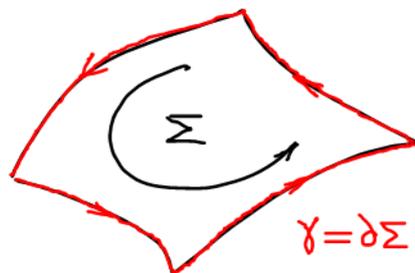
Bemerkung. Die äußere Ableitung wirkt in allen Koordinatensystemen gleich. Die Formel für die Rotation gilt hingegen nur für kartesische Koordinaten! (In nicht-kartesischen Koordinaten ist die Wirkung von \mathcal{I}_1 und \mathcal{I}_2 komplizierter.) \square

Aus der Regel $(d \circ d) f = 0$ folgt mit $\text{grad} = \mathcal{I}_1 \circ d$ und $\text{rot} = \mathcal{I}_2 \circ d \circ \mathcal{I}_1^{-1}$ die Regel

$$\text{rot grad } f = (\mathcal{I}_2 \circ d \circ \mathcal{I}_1^{-1}) \circ (\mathcal{I}_1 \circ d) f = (\mathcal{I}_2 \circ d \circ d) f = 0 .$$

2.8.3 Satz von Stokes

In einem affinen Raum $(X, V, +)$ sei $\omega : X \rightarrow V^*$ eine differenzierbare 1-Form und $\Sigma \subset X$ eine orientierte Fläche. Die Fläche Σ wird durch eine Linie berandet, die wir mit $\gamma \equiv \partial\Sigma$ bezeichnen. Wir nennen die Operation der Randbildung, $\partial : \text{Fläche} \rightarrow \text{Randlinie}$, den **Randoperator**. Das nächste Bild illustriert, wie der Randoperator aus der Orientierung der Fläche Σ eine Orientierung der Randlinie $\gamma = \partial\Sigma$ (also einen Durchlaufsinne von γ) bestimmt.



Satz von Stokes:

$$\int_{\Sigma} d\omega = \int_{\partial\Sigma} \omega .$$

Korollar. Sei $X = E_3$, $V = \mathbb{R}^3$. Für eine 1-Form ω auf E_3 bezeichne $v := \mathcal{I}_1(\omega)$ das zugeordnete Vektorfeld. Dann folgt

$$\int_{\gamma} v \cdot d\ell = \int_{\gamma} \mathcal{I}_1^{-1}(v) = \int_{\partial\Sigma} \omega = \int_{\Sigma} d\omega = \int_{\Sigma} \mathcal{I}_2(d\omega) \cdot ds = \int_{\Sigma} (\mathcal{I}_2 \circ d \circ \mathcal{I}_1^{-1})(v) \cdot ds = \int_{\Sigma} \text{rot } v \cdot ds ,$$

d.h. das Wegintegral von v längs der geschlossenen Kurve γ ist gleich dem Flächenintegral der Rotation von v über eine von γ berandete Fläche Σ .

Bemerkung. In die Formulierung des Integralsatzes

$$\int_{\gamma} v \cdot d\ell = \int_{\Sigma} \operatorname{rot} v \cdot ds \quad (\text{Satz von Stokes für Vektorfelder})$$

geht an mehreren Stellen Längen- und Winkelmessung ein. Allerdings ist dies ein Fall von **“Viel Lärm um Nichts”!** Die fundamentale Gleichheit $\int_{\partial\Sigma} \omega = \int_{\Sigma} d\omega$ zeigt, dass die Aussage des Satzes im Grunde von der Metrik (d.h. Längen- und Winkelmessung) komplett unabhängig ist.

Beispiel. Die elektrische Feldstärke E ist eine (im allgemeinen nicht-exakte oder nicht-konservative) 1-Form. Das Wegintegral $\int_{\gamma} E$ von E längs einer geschlossenen Kurve γ heißt die elektrische **Ringspannung** längs γ . Das Faraday'sche **Induktionsgesetz** besagt

$$dE = -\dot{B},$$

wobei \dot{B} die Zeitableitung der magnetischen Feldstärke B bezeichnet. Durch Integration über eine Fläche Σ mit Rand $\partial\Sigma = \gamma$ erhält man mit dem Satz von Stokes

$$\int_{\gamma} E = \int_{\Sigma} dE = - \int_{\Sigma} \dot{B} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} B.$$

Die elektrische Ringspannung $\int_{\gamma} E$ längs $\gamma = \partial\Sigma$ ist also gleich dem Negativen der zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses $\int_{\Sigma} B$ durch Σ . Das Induktionsgesetz lässt sich auch in der Sprache der **Vektorfelder** $\vec{E} := \mathcal{I}_1(E)$ und $\vec{B} = \mathcal{I}_2(B)$ ausdrücken. Es lautet dann

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} && (\text{differenzielle Form}), \\ \int_{\partial\Sigma} \vec{E} \cdot d\ell &= - \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot ds && (\text{Integralform}). \end{aligned}$$

Interpretation. Die Vektorfeld-Version des Satzes von Stokes im E_3 gestattet eine Deutung der Rotation. Hierzu betrachten wir z.B. eine zur xy -Ebene parallele Kreisscheibe $D_{p,r}^{(xy)}$ mit Mittelpunkt $p \in E_3$ und Radius $r > 0$. Für ein langsam veränderliches Vektorfeld v , dessen Rotation $u := \operatorname{rot} v$ auf $D_{p,r}^{(xy)}$ annähernd konstant ist, haben wir näherungsweise

$$\int_{D_{p,r}^{(xy)}} u \cdot ds \approx u_z(p) \int_{D_{p,r}^{(xy)}} \partial_z \cdot ds = \pi r^2 u_z(p).$$

Ist $S_{p,r}^{(xy)} := \partial D_{p,r}^{(xy)}$ die die Kreisscheibe berandende Kreislinie, so gilt nach Stokes $\int_{D_{p,r}^{(xy)}} \operatorname{rot} v \cdot ds = \int_{S_{p,r}^{(xy)}} v \cdot d\ell$. Damit können wir die Rotation als **Grenzwert** ausdrücken:

$$(\operatorname{rot} v)_z(p) = \lim_{r \rightarrow 0} (\pi r^2)^{-1} \int_{S_{p,r}^{(xy)}} v \cdot d\ell.$$

Anstelle der Familie von Kreislinien $S_{p,r}^{(xy)}$ können wir genauso gut jede andere Familie von Flächen benutzen, die zur xy -Ebene parallel sind und gegen den Punkt p schrumpfen. Hierzu ist lediglich

die Kreisfläche πr^2 durch den gegen Null konvergierenden Flächeninhalt der Familie zu ersetzen. Außerdem sollte klar sein, wie man die Prozedur zu adaptieren hat, um zu entsprechenden Ausdrücken für die x - und y -Komponenten von $\text{rot } v$ zu gelangen.

Mitteilung. Jedes differenzierbare Vektorfeld $v : E_3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ hat eine eindeutige Zerlegung der Form

$$v = \text{grad } f + \text{rot } u .$$

(Natürlich ist die Funktion f nur bis auf Konstanten und das Vektorfeld u nur bis auf Gradienten eindeutig.) Der erste Summand dieser sogenannten **Hodge-Zerlegung** heißt der **Gradiententeil** von v , der zweite der **Wirbelanteil** von v . Wegen $\text{rot grad } f = 0$ oder $\oint \text{grad } f \cdot d\ell = 0$ (Hauptsatz!) misst die Rotation genau den Wirbelanteil des Vektorfeldes.

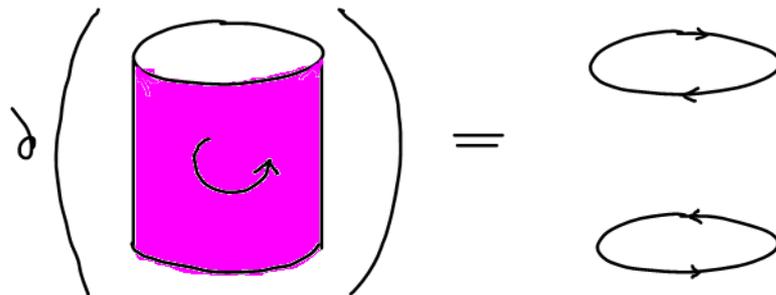
Hinweis. Um eine gute Intuition für den Differenzialoperator der Rotation zu entwickeln, bedarf es einer gewissen Übung. Zum Beispiel hat das außerhalb der z -Achse erklärte Vektorfeld

$$v = \frac{x \partial_y - y \partial_x}{x^2 + y^2}$$

(wir verwenden wieder kartesische Koordinaten x, y, z) Rotation Null, obwohl es zeichnerisch wie ein Wirbelfeld aussieht. (Die Wirbel verstecken sich hier gewissermaßen auf der z -Achse $x = y = 0$.) Leichter ist es, ein intuitives Verständnis der äußeren Ableitung zu entwickeln; siehe dazu den späteren Abschnitt 2.10.1.

2.8.4 Parametrisierung und Rand

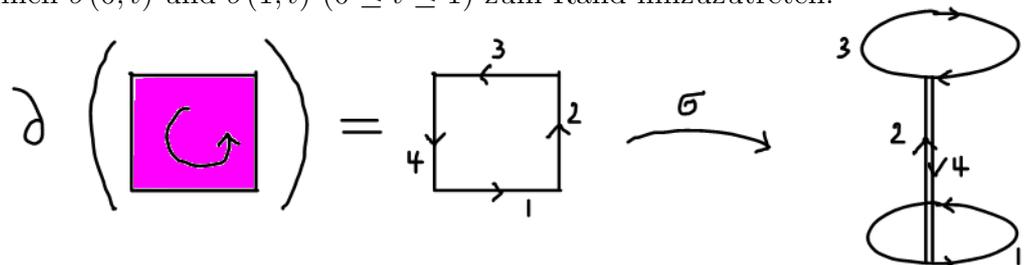
Wir geben folgende informelle Ergänzung zum Begriff des Randoperators. Zum Beispiel besteht der Rand eines Zylindermantels aus zwei Kreislinien:



Parametrisiert man jedoch den Zylindermantel als Bild eines Quadrats, sagen wir durch

$$[0, 1] \times [0, 1] \ni (s, t) \mapsto \sigma(s, t) = o + L(t - \frac{1}{2}) e_z + R(\cos(2\pi s) e_x + \sin(2\pi s) e_y) ,$$

so scheinen zwei Nahtlinien $\sigma(0, t)$ und $\sigma(1, t)$ ($0 \leq t \leq 1$) zum Rand hinzuzutreten:



Diese zusätzlichen Randlinien sind ein Artefakt der Parametrisierung (aber leider unvermeidlich, da Zylindermantel und Quadratfläche topologisch verschieden sind und wir den Zylinder-

mantel zuerst aufschneiden müssen, bevor wir ihn als Bild der Quadratfläche unter einer differenzierbaren Abbildung bekommen können). Die artifiziiellen Randlinien sind aber auch nicht weiter problematisch, denn es handelt sich um ein und dasselbe Geradenstück, das zweimal durchlaufen wird und zwar mit unterschiedlichem Richtungssinn, so dass sich ihre Beiträge zum Randwegintegral exakt wegheben. Im Sinne von geforderter Gleichheit nach Integration (und nur das ist es, was hier letztlich zählt), ist das Paar von scheinbaren (durch Quadrat-Parametrisierung verursachten) Rand- oder Nahtlinien also gar nicht vorhanden.

2.8.5 Beweis des Satzes von Stokes

Wir arbeiten wieder in einem affinen Raum $(X, V, +)$ und beginnen mit zwei **Vorbereitungen**. Zum ersten benötigen wir eine koordinatenfreie Darstellung der äußeren Ableitung. Für $\omega = \sum f_i dx_i$ definierten wir $d\omega = \sum df_i \wedge dx_i$ (siehe Abschnitt 2.8.1). Um die Koordinaten x_i aus dieser Definition zu beseitigen, machen wir die folgende Rechnung:

$$(d\omega)_p(u, v) = \left(\sum_i df_i \wedge dx_i \right)_p (u, v) = \sum_i \left((df_i)_p(u) (dx_i)_p(v) - (df_i)_p(v) (dx_i)_p(u) \right).$$

Jetzt verwenden wir die Definition von df_i und die Konstanz von $(dx_i)_p = \vartheta_i = (dx_i)_{p+tv}$:

$$\begin{aligned} (d\omega)_p(u, v) &= \sum_i \frac{d}{dt} \left(f_i(p+tu) (dx_i)_{p+tu}(v) - f_i(p+tv) (dx_i)_{p+tv}(u) \right) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\omega_{p+tu}(v) - \omega_{p+tv}(u) \right) \Big|_{t=0}. \end{aligned}$$

Nun gilt aber

$$\frac{d}{dt} \omega_{p+tv} \Big|_{t=0} = (D_p \omega)(v),$$

wobei $D_p \omega$ das Differenzial (siehe Abschnitt 2.2) der Abbildung $\omega : X \rightarrow V^*$ im Punkt p ist. Somit erhält man für die äußere Ableitung die **Formel**

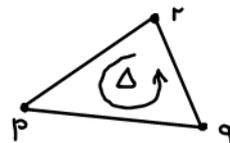
$$(d\omega)_p(u, v) = ((D_p \omega)(u))(v) - ((D_p \omega)(v))(u).$$

Wir kommen zur **zweiten Vorbereitung**. Dazu sei γ das Geradenstück zwischen dem Anfangspunkt p und dem Endpunkt q , also $\gamma(t) = p + t(q - p)$ mit $0 \leq t \leq 1$. Dann haben wir für das Wegintegral der 1-Form α längs γ den Ausdruck

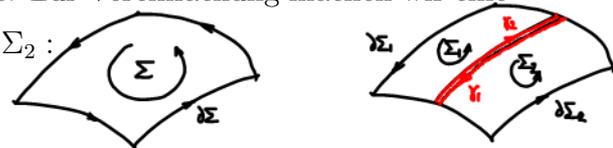
$$\int_\gamma \alpha = \int_0^1 \alpha_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt = \int_0^1 \alpha_{p+t(q-p)}(q-p) dt.$$

Weiter sei Δ das orientierte Dreieck mit den Eckpunkten p, q, r , in dieser Reihenfolge. Wählen wir für Δ die Parametrisierung $\sigma(s, t) = p + s(q - p) + t(r - p)$ (mit $0 \leq s + t \leq 1$), so ergibt sich für das Flächenintegral der 2-Form β über Δ der Ausdruck

$$\int_\Delta \beta = \int_0^1 \left(\int_0^{1-s} \beta_{p+s(q-p)+t(r-p)}(q-p, r-p) dt \right) ds.$$



Wir beginnen jetzt mit dem **Beweis** des Satzes von Stokes. Zur Vereinfachung machen wir eine Reduktion: wir teilen die Fläche Σ in zwei Hälften, Σ_1 und Σ_2 :



Es gilt dann $\int_{\Sigma} d\omega = \int_{\Sigma_1} d\omega + \int_{\Sigma_2} d\omega$ und $\int_{\partial\Sigma} \omega = \int_{\partial\Sigma_1} \omega + \int_{\partial\Sigma_2} \omega$. In die zweite Beziehung geht ein, dass die Beiträge von dem durch Teilung entstandenen zusätzlichen Rand sich genau auslöschen:

$$\int_{\gamma_1} \omega = - \int_{\gamma_2} \omega .$$

Man sieht jetzt, dass der Satz von Stokes für die Fläche Σ gilt, wenn er für beide Teilflächen Σ_1 und Σ_2 gilt. Durch Iteration der Prozedur des Teilens gelangt man zu immer kleineren Flächen. Es reicht deshalb letztendlich aus, den Satz von Stokes für "infinitesimale" Flächen zu zeigen.

Sei also Σ das Dreieck mit den Eckpunkten $p, p + \varepsilon u, p + \varepsilon v$ (und ε klein).



Wir berechnen zunächst das **Wegintegral** von ω längs des Randes $\partial\Sigma$:

$$\int_{\partial\Sigma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega + \int_{\gamma_3} \omega = \int_0^\varepsilon \left(\omega_{p+\varepsilon u-tu}(u) + \omega_{p+\varepsilon v-tv}(-v) + \omega_{p+\varepsilon u+t(v-u)}(v-u) \right) dt .$$

Hierbei benutzen wir die Relation $\int_0^\varepsilon f(t) dt = \int_0^\varepsilon f(\varepsilon - t) dt$. Jetzt verwenden wir die Linearität $\lambda(v-u) = \lambda(v) - \lambda(u)$ und fassen die Terme geeignet zusammen:

$$\int_{\partial\Sigma} \omega = \int_0^\varepsilon \left((\omega_{p+\varepsilon u-tu} - \omega_{p+\varepsilon u-tv+tu})(u) + (\omega_{p+\varepsilon v-tv+tu} - \omega_{p+\varepsilon v-tv})(v) \right) dt .$$

Der dritte Term stammt von $\int_0^\varepsilon \omega_{p+\varepsilon v-tv+tu}(v) dt = \int_0^\varepsilon \omega_{p+\varepsilon u+t(v-u)}(v) dt$. Die auftretenden Differenzen lassen sich in erster Näherung (für kleine ε) durch die Differenziale der als Abbildung $\omega : X \rightarrow V^*$ aufgefassten 1-Form ω ersetzen:

$$\omega_{p+\varepsilon u-tu} - \omega_{p+\varepsilon u-tv+tu} \approx -(D_{p+\varepsilon u-tu} \omega)(tv) \approx -(D_p \omega)(tv) ,$$

und analog für die zweite Differenz. Es folgt

$$\int_{\partial\Sigma} \omega \approx \left(\int_0^\varepsilon t dt \right) \left(-((D_p \omega)(v))(u) + ((D_p \omega)(u))(v) \right) = \frac{\varepsilon^2}{2} (d\omega)_p(u, v) .$$

Mit der gleichen Genauigkeit berechnen wir auch das **Flächenintegral**:

$$\int_{\Sigma} d\omega = \int_0^\varepsilon \left(\int_0^{\varepsilon-s} (d\omega)_{p+su+tv}(u, v) \right) ds \approx (d\omega)_p(u, v) \int_0^\varepsilon \left(\int_0^{\varepsilon-s} dt \right) ds = \frac{\varepsilon^2}{2} (d\omega)_p(u, v) .$$

In erster Näherung bekommen wir also das gleiche Ergebnis.

Die bei den Näherungen gemachten Fehler sind für differenzierbares ω hinreichend klein, um den gewünschten Schluss (nämlich die Gültigkeit des Satzes von Stokes) ziehen zu können. \square

Mitteilung. Der Satz von Stokes lässt sich auch direkt exakt (d.h. ohne Näherungen im Integral zu machen) beweisen, indem man Wegintegral und Flächenintegral parametrisiert und Ketten- und Produktregel geschickt ausnützt. Ein hilfreicher Begriff ist dabei die Operation des Zurückziehens (engl. "pullback") von Differentialformen, der uns hier aber noch nicht zur Verfügung steht.

2.9 Divergenz

Nachdem wir die Differentialoperatoren des Gradienten und der Rotation kennengelernt haben, verbleibt uns die Aufgabe, den Differentialoperator der Divergenz einzuführen. Wir werden in einer Weise tun, die auch gleich die passenden Integranden für Volumenintegrale, sogenannte 3-Formen, zur Verfügung stellt.

2.9.1 Volumenintegral einer 3-Form

Sei V wieder ein Vektorraum. Eine **alternierende 3-lineare Form** $\rho \in \text{Alt}^3(V)$ ist eine Abbildung

$$\rho : V \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

mit den Eigenschaften der totalen Schiefsymmetrie,

$$\rho(u, v, w) = -\rho(v, u, w) = +\rho(v, w, u) = -\rho(w, v, u) = +\rho(w, u, v) = -\rho(u, w, v),$$

und Linearität in allen drei Argumenten.

Beispiel. Das Spatprodukt Ω für den Differenzvektorraum $V = \mathbb{R}^3$ des Euklidischen Raumes E_3 ist eine alternierende 3-lineare Form.

Visualisierung. Ein Element $\rho \in \text{Alt}^3(V)$ für $V = \mathbb{R}^3$ lässt sich als homogene Schar (oder Gitter) von Punkten mit Händigkeit visualisieren. Der Wert $\rho(u, v, w)$ wird bestimmt, indem man die gemittelte Zahl von Punkten im Spat mit den Kantenvektoren u, v, w abzählt. Dabei kommt die Händigkeit der Punkte zum Tragen: stimmt diese mit der Händigkeit des geordneten Systems u, v, w überein, so wird positiv gezählt, andernfalls negativ.

Definition. Eine **3-Form** ω auf einem affinen Raum $(X, V, +)$ ist eine differenzierbare Abbildung

$$\omega : X \rightarrow \text{Alt}^3(V),$$

also eine räumlich veränderliche alternierende 3-lineare Form.

Beispiel. Aus drei 1-Formen α, β, γ auf $(X, V, +)$ konstruiert man eine 3-Form $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma : X \rightarrow \text{Alt}^3(V)$ durch Bildung des doppelten äußeren Produkts:

$$\begin{aligned} (\alpha \wedge \beta \wedge \gamma)_p(v_1, v_2, v_3) &:= \alpha_p(v_1)\beta_p(v_2)\gamma_p(v_3) - \alpha_p(v_2)\beta_p(v_1)\gamma_p(v_3) \\ &\quad + \alpha_p(v_2)\beta_p(v_3)\gamma_p(v_1) - \alpha_p(v_3)\beta_p(v_2)\gamma_p(v_1) \\ &\quad + \alpha_p(v_3)\beta_p(v_1)\gamma_p(v_2) - \alpha_p(v_1)\beta_p(v_3)\gamma_p(v_2). \end{aligned}$$

Im Fall von $V = \mathbb{R}^3$ sind die Gitterpunkte von $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$ anschaulich gesprochen die Schnittpunkte der Ebenenscharen von α, β, γ .

Definition. Sei $U \subset X$ ein dreidimensionales Gebiet. Eine **Orientierung** von U ist eine (stetige) Regel, die für jeden Punkt $p \in U$ zu entscheiden gestattet, ob ein Tripel von linear unabhängigen und zu U in p tangentialen Vektoren u, v, w ein positives (\cong "rechtshändiges") oder negatives

(\cong "linkshändiges") System bildet. Rechnerisch festlegen lässt sich die Orientierung durch eine stetige, nirgendwo verschwindende 3-Form Ω :

$$\begin{aligned}\Omega_p(u, v, w) > 0 &\Leftrightarrow u, v, w \text{ positives System,} \\ \Omega_p(u, v, w) < 0 &\Leftrightarrow u, v, w \text{ negatives System.}\end{aligned}$$

Definition. Das Integral $\int_U \omega$ der 3-Form ω über ein orientiertes dreidimensionales Quadergebiet $U \subset X$ wird folgendermaßen erklärt. Sei

$$h : [0, 1]^3 \rightarrow X, \quad (r, s, t) \mapsto h(r, s, t),$$

eine orientierungstreue Parametrisierung von U , d.h. die Tangentialvektoren $\frac{\partial h}{\partial r}, \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t}$ bilden in jedem Punkt von U ein positives System. Dann definiert man

$$\int_U \omega := \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \omega_{h(r,s,t)} \left(\frac{\partial h}{\partial r}(r, s, t), \frac{\partial h}{\partial s}(r, s, t), \frac{\partial h}{\partial t}(r, s, t) \right) dt \right) ds \right) dr.$$

Mitteilung. Auch diese Definition ist reparametrisierungsinvariant.

Beispiel. Sei $X = E_3$ der dreidimensionale Euklidische Raum mit kartesischen Koordinaten x, y, z . Wir wollen die 3-Form $\omega = (x^2 + y^2 + z^2) dx \wedge dy \wedge dz$ über die (rechtshändig orientierte) Kugel K mit Radius R und Mittelpunkt im Koordinatenursprung o integrieren. Dazu wählen wir die Parametrisierung

$$h(r, s, t) = o + Rr \cos(\pi s) e_z + Rr \sin(\pi s) (\cos(2\pi t) e_x + \sin(2\pi t) e_y)$$

und berechnen die Tangentialvektoren:

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial r}(r, s, t) &= R \cos(\pi s) e_z + R \sin(\pi s) (\cos(2\pi t) e_x + \sin(2\pi t) e_y), \\ \frac{\partial h}{\partial s}(r, s, t) &= -\pi Rr \sin(\pi s) e_z + \pi Rr \cos(\pi s) (\cos(2\pi t) e_x + \sin(2\pi t) e_y), \\ \frac{\partial h}{\partial t}(r, s, t) &= 2\pi Rr \sin(\pi s) (-\sin(2\pi t) e_x + \cos(2\pi t) e_y).\end{aligned}$$

Man verifiziert leicht, dass $\frac{\partial h}{\partial r}, \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t}$ ein rechtshändiges System bilden. Einsetzen dieser Vektoren in die 3-Form ergibt

$$\omega_{h(r,s,t)} \left(\frac{\partial h}{\partial r}(r, s, t), \frac{\partial h}{\partial s}(r, s, t), \frac{\partial h}{\partial t}(r, s, t) \right) = 2\pi^2 R^5 r^4 \sin(\pi s),$$

und es folgt

$$\int_K \omega = 2\pi^2 R^5 \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 r^4 \sin(\pi s) dt \right) ds \right) dr = \frac{4\pi}{5} R^5.$$

2.9.2 Äußere Ableitung einer 2-Form

In einem affinen Raum $(X, V, +)$ mit affinen Koordinaten x_1, x_2, \dots, x_n hat jede 2-Form β eine **Koordinatendarstellung**

$$\beta = \sum_{i < j} f_{ij} dx_i \wedge dx_j = \frac{1}{2} \sum_{i, j} f_{ij} dx_i \wedge dx_j.$$

Gemäß der alternierenden Eigenschaft $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ verwenden wir für die Koeffizientenfunktionen die Konvention $f_{ij} = -f_{ji}$.

Definition. Die **äußere Ableitung** einer 2-Form $\beta = \sum_{i<j} f_{ij} dx_i \wedge dx_j$ ist die 3-Form

$$d\beta := \sum_{i<j} df_{ij} \wedge dx_i \wedge dx_j .$$

Bemerkung. Unter Verwendung der Koordinatendarstellung der Differenziale df_{ij} lässt sich die äußere Ableitung $d\beta$ auch folgendermaßen schreiben:

$$d\beta = \sum_{i<j<k} \left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial f_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial f_{ki}}{\partial x_j} \right) dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k .$$

Beispiel. Es ist ein Naturgesetz, dass die äußere Ableitung der 2-Form B der magnetischen Feldstärke immer verschwindet: $dB = 0$. Im E_3 mit kartesischen Koordinaten,

$$B = B_{xy} dx \wedge dy + B_{yz} dy \wedge dz + B_{zx} dz \wedge dx ,$$

lautet dieses Gesetz wie folgt:

$$dB = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial B_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial B_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial B_{zx}}{\partial y} = 0 .$$

Fakt. (“Zweimal d ist Null.”) Unter einer exakten 2-Form β versteht man per Definition die äußere Ableitung einer 1-Form, also $\beta = d\alpha$. Kurze Rechnung zeigt, dass die äußere Ableitung einer exakten 2-Form identisch verschwindet:

$$d\beta = d(d\alpha) = 0 . \quad \square$$

Für eine 2-Form β bezeichnen wir mit $D\beta$ das Differential der Abbildung $\beta : X \rightarrow \text{Alt}^2(V)$.

Aufgabe. Zeige, dass die äußere Ableitung $d\beta$ die folgende (koordinatenfreie) Darstellung hat:

$$(d\beta)_p(u, v, w) = ((D_p \beta)(u))(v, w) - ((D_p \beta)(v))(u, w) + ((D_p \beta)(w))(u, v) .$$

2.9.3 Divergenz eines Vektorfeldes

Wir definieren jetzt die Divergenz eines Vektorfeldes im Euklidischen Raum E_3 . (Unsere Definition trifft den Kern der Sache nicht ganz, ist aber für jetzige Zwecke gut genug.)

Der Vektorraum $\text{Alt}^3(\mathbb{R}^3)$ ist eindimensional, d.h. alle alternierenden 3-linearen Formen im \mathbb{R}^3 sind proportional zum Spatprodukt Ω . Mit Hilfe von Ω konstruieren wir einen **Isomorphismus**

$$\mathcal{I}_3 : \text{Alt}^3(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$$

durch

$$\mathcal{I}_3^{-1}(a) = a \Omega .$$

Eine hierzu äquivalente Aussage ist $\rho = \mathcal{I}_3(\rho) \Omega$ für $\rho \in \text{Alt}^3(\mathbb{R}^3)$. Punktweise Anwendung liefert einen Isomorphismus

$$\mathcal{I}_3 : \text{3-Formen} \longrightarrow \text{Funktionen} .$$

Für den späteren Gebrauch halten wir fest, dass für eine Funktion f und eine 3-Form ω gilt:

$$\mathcal{I}_3(f\omega) = f \mathcal{I}_3(\omega) .$$

In kartesischen Koordinaten x, y, z hat man zudem

$$\mathcal{I}_3(dx \wedge dy \wedge dz) = 1 , \quad \mathcal{I}_3^{-1}(1) = dx \wedge dy \wedge dz .$$

Unter Zuhilfenahme des aus Abschnitt 2.7.5 bekannten Isomorphismus \mathcal{I}_2 definieren wir jetzt die Divergenz wie folgt.

Definition. Als Differenzialoperator 1. Ordnung, der Vektorfelder in Funktionen überführt, ist die **Divergenz** (im E_3) folgendermaßen erklärt:

$$\text{div} : \text{Vektorfelder} \xrightarrow{\mathcal{I}_2^{-1}} \text{2-Formen} \xrightarrow{d} \text{3-Formen} \xrightarrow{\mathcal{I}_3} \text{Funktionen} ,$$

also $\text{div} = \mathcal{I}_3 \circ d \circ \mathcal{I}_2^{-1}$. \square

In kartesischen Koordinaten berechnet man die Divergenz auf die folgende Weise:

$$\begin{aligned} \text{div}(v) &= (\mathcal{I}_3 \circ d \circ \mathcal{I}_2^{-1})(v_x \partial_x + v_y \partial_y + v_z \partial_z) \\ &= (\mathcal{I}_3 \circ d)(v_x dy \wedge dz + v_y dz \wedge dx + v_z dx \wedge dy) \\ &= \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \mathcal{I}_3(dx \wedge dy \wedge dz) , \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Identität $\mathcal{I}_3(f\rho) = f\mathcal{I}_3(\rho)$ verwendet wurde. Mit $\mathcal{I}_3(dx \wedge dy \wedge dz) = 1$ erhält man den **Ausdruck**

$$\text{div}(v) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} .$$

Als Konsequenz der Aussage ‘‘Zweimal d ist Null’’ (auf 1-Formen) ergibt sich

$$\text{div} \circ \text{rot} = (\mathcal{I}_3 \circ d \circ \mathcal{I}_2^{-1})(\mathcal{I}_2 \circ d \circ \mathcal{I}_1^{-1}) = \mathcal{I}_3 \circ d \circ d \circ \mathcal{I}_1^{-1} = 0 .$$

Merke. Die Hintereinanderausführung der Differenzialoperatoren von Rotation und Divergenz ergibt immer Null; also

$$\text{div} \circ \text{rot} = 0 .$$

2.10 Visualisierung

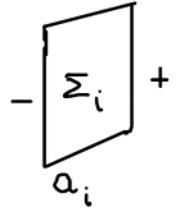
Aus den Abschnitten 1.4 bzw. 2.7.1 wissen wir schon Folgendes.

1. Eine Linearform im \mathbb{R}^3 (oder eine konstante 1-Form im E_3) lässt sich als homogene Ebenenschar mit Polarisierung auffassen.
2. Eine alternierende 2-lineare Form im \mathbb{R}^3 (oder eine konstante 2-Form im E_3) lässt sich als homogene Geradenschar mit Zirkulationssinn auffassen.

Wir adaptieren jetzt diese bildlichen Vorstellungen, um der Situation räumlich veränderlicher Differentialformen besser gerecht zu werden.

Visualisierung (1-Form). Unter einer 1-Form α im E_3 stellen wir uns näherungsweise (mittels Diskretisierung) eine Anordnung von **Flächenstücken** Σ_i vor, wobei jedes Flächenstück eine Polarität und einen "Gewichtsfaktor" a_i trägt. Zwecks effizienter Buchführung schreiben wir

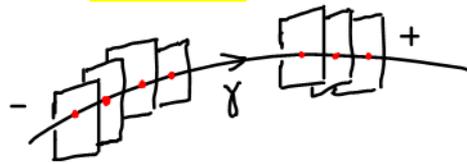
$$\alpha = a_1 \Sigma_1 + a_2 \Sigma_2 + \dots + a_i \Sigma_i + \dots$$



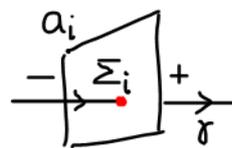
Die physikalische Dimension der Gewichtsfaktoren a_i ist gleich der physikalischen Dimension der integrierten Differentialform $\int \alpha$. (Zum Beispiel hat a_i für den Fall der elektrischen Feldstärke $\alpha = E$ die physikalische Dimension von Spannung, also Energie/Ladung.) Die Anordnung von Flächenstücken wird so gewählt, dass alle Integrale $\int_\gamma \alpha$ für hinreichend glatte Kurven γ annähernd richtig wiedergegeben werden, und zwar nach der **Regel**

$$\int_\gamma \alpha \approx \sum_{i: \Sigma_i \cap \gamma \neq \emptyset} \pm a_i.$$

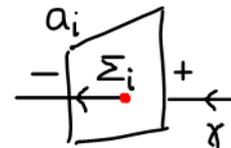
In Worten: im approximativen Modell mit Flächenstücken wird das Integral $\int_\gamma \alpha$ ermittelt, indem man die Gewichte der von der Kurve γ **gekreuzten** Flächenstücke (mit Vorzeichen \pm) aufsummiert.



Dabei wird a_i mit dem positiven (negativen) Vorzeichen gezählt, wenn der Richtungssinn der Kurve γ mit der Polarität des Flächenstücks Σ_i übereinstimmt (bzw. nicht übereinstimmt):



Beitrag $+ a_i$

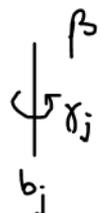


Beitrag $- a_i$

Sind wir mit der Näherung für $\int_\gamma \alpha$ nicht zufrieden (z.B. weil sie für unsere physikalischen Zwecke nicht akkurat genug ist), so verfeinern wir die Beschreibung: wir machen die Abmessungen der Flächenstücke kleiner, vergrößern ihre Gesamtzahl und passen die Gewichtsfaktoren entsprechend an. Diese Art von Approximation klappt in jeder physikalisch sinnvollen Situation! (Sicher können wir mit Flächenstücken von Nanometergröße alle Integrale $\int_\gamma \alpha$ bestens approximieren – vorausgesetzt, dass unsere Integrationskurven γ und die Differentialform α auf viel größeren Längenskalen variieren, sagen wir im Meterbereich.)

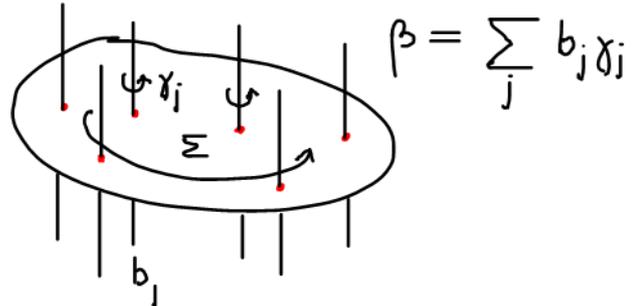
Visualisierung (2-Form). Wir wenden uns jetzt dem Fall einer 2-Form, β , zu. Diese stellen wir uns (im E_3 und wieder mittels Näherung durch Diskretisierung) als Anordnung von Linienstücken vor, wobei jedes Linienstück γ_j einen Zirkulationssinn und einen Gewichtsfaktor b_j trägt. Die Buchführung bewerkstelligen wir mit der Schreibweise

$$\beta = \sum_j b_j \gamma_j.$$



(Zum Beispiel ist b_j für den Fall der magnetischen Feldstärke $\beta = B$ ein magnetischer Fluss, also eine Größe der physikalischen Dimension Energie/Strom.) Die Anordnung von Linienstücken wird so gewählt, dass alle nach der **Regel**

$$\int_{\Sigma} \beta \approx \sum_{j: \gamma_j \cap \Sigma \neq \emptyset} \pm b_j$$



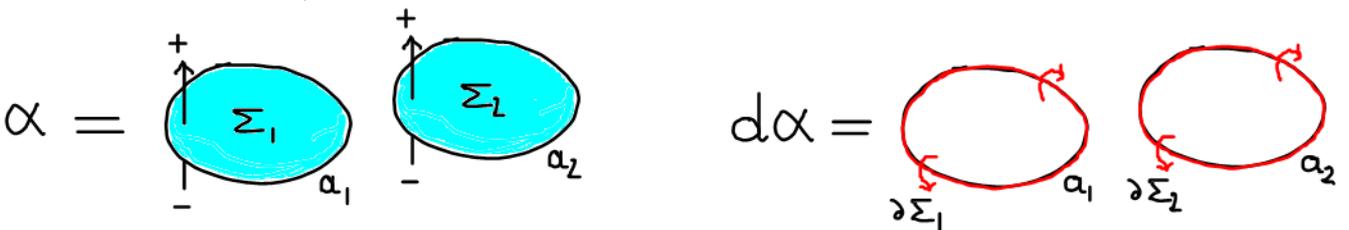
ermittelten Integrale $\int_{\Sigma} \beta$ für hinreichend glatte Flächen Σ annähernd richtig wiedergegeben werden. **In Worten:** das Integral $\int_{\Sigma} \beta$ wird bestimmt, indem man die Gewichte $\pm b_j$ der von der Fläche Σ geschnittenen Linienstücke γ_j von β (mit dem richtigen Vorzeichen) aufsummiert. Das positive Vorzeichen gilt, wenn der Zirkulationssinn des Linienstücks mit dem der Fläche übereinstimmt, andernfalls das negative. Auch hier lässt sich eine beliebig gute Approximation erzielen, wenn man die Linienstücke (und entsprechend die Gewichte) nur klein genug dimensioniert.

2.10.1 Anschauliche Deutung der äußeren Ableitung (auf 1-Formen)

Wir kommen jetzt zum Hauptpunkt der Diskussion. In dem hier beschriebenen diskreten Modell wirkt die äußere Ableitung ganz einfach als **Randoperator** (also als die Operation, in der wir für jedes Flächenstück jeweils den Rand nehmen):

$$\alpha = a_1 \Sigma_1 + a_2 \Sigma_2 + \dots \Rightarrow d\alpha = a_1 \partial \Sigma_1 + a_2 \partial \Sigma_2 + \dots$$

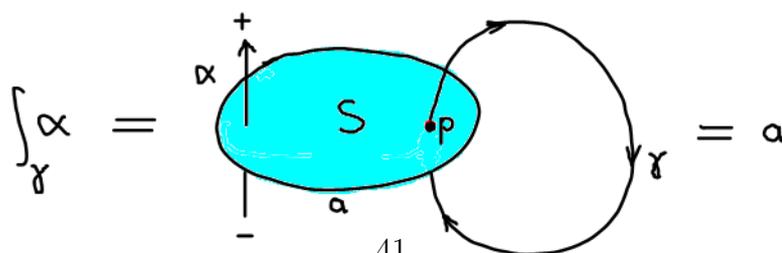
In Worten: besteht die 1-Form α aus den Flächenstücken Σ_i mit Gewichten a_i , so besteht die 2-Form $d\alpha$ aus den Linienstücken $\gamma_i = \partial \Sigma_i$ mit denselben Gewichten a_i . (Hier wie zuvor ist $\partial \Sigma_i$ die Randlinie von Σ_i .) In Bildern:



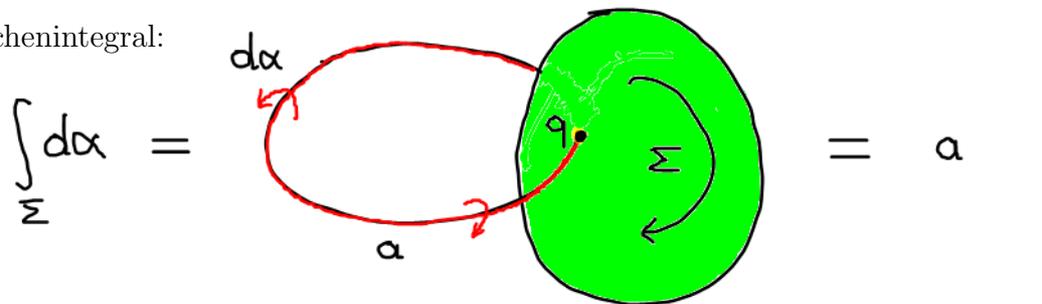
Den Zirkulationssinn der Randlinie $\gamma_i = \partial \Sigma_i$ des Flächenstücks Σ_i erhält man nach der Regel: "Folge der Durchstoßrichtung (von Minus nach Plus) von Σ_i und biege nach außen ab".

Die Stimmigkeit dieser Deutung der äußeren Ableitung als Randoperator ergibt sich aus der Anwendung des Satzes von Stokes auf unser diskretes Approximationsschema, wie durch das folgende Beispiel illustriert wird.

Beispiel. Die 1-Form $\alpha = aS$ bestehe aus einem einzigen Flächenstück S mit Gewicht a , und es sei Σ eine orientierte Fläche mit Rand $\gamma = \partial \Sigma$. Dann haben wir für das Kurvenintegral:



und für das Flächenintegral:



Diese Graphik macht deutlich, dass die Gleichheit $\int_{\Sigma} d\alpha = \int_{\partial\Sigma} \alpha$ (mit der Deutung der äußeren Ableitung als Randoperator) einen **topologischen** Sachverhalt ausdrückt: zu jedem Kreuzungspunkt (hier p) der 1-Form α mit der Randlinie $\partial\Sigma$ gibt es (im algebraischen Sinn) genau einen Schnittpunkt (hier q) der 2-Form $d\alpha$ mit der Fläche Σ (und Vorzeichen und Gewicht der Kreuzung sind jeweils gleich). [Übrigens kennen wir die Randoperator-Eigenschaft der Ableitung bereits aus der reellen Analysis im \mathbb{R} : approximieren wir eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch eine Treppenfunktion φ (also eine stückweise konstante Funktion), so ist die Ableitung φ' Null außer an den Randpunkten, wo die Treppe von einer Stufe zur nächsten springt.]

Beispiele (alle im E_3 mit kartesischen Koordinaten x, y, z):

1. Die 1-Form $\alpha = dz$ besteht aus Flächenstücken, die parallel zu den Niveauflächen der Koordinatenfunktion z liegen. Wegen $d\alpha = ddz = 0$ hat $\alpha = dz$ keinen Rand, die Flächenstücke fügen sich also zu randlosen Flächen (den Ebenen $z = \text{const}$) zusammen. So entsteht die Ebenenschar der Linearform $(dz)_p = \vartheta_z$.
2. Die 2-Form $\beta = dx \wedge dy$ besteht aus Linienstücken, die parallel zu den Schnittgeraden der Niveau-Ebenen von x und y liegen. Wegen $d\beta = d(dx \wedge dy) = 0$ fügen sie sich zu randlosen Linien zusammen: Geraden, die parallel zur z -Achse liegen. So entsteht die Geradenschar der alternierenden 2-linearen Form $(dx \wedge dy)_p = \vartheta_x \wedge \vartheta_y$.
3. Die **elektrische Feldstärke** einer im Koordinatenursprung ruhenden Punktladung Q ist

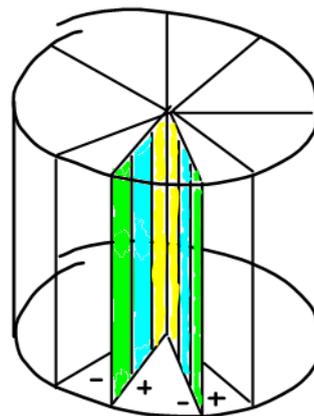
$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}).$$

Die Flächenstücke dieser 1-Form liegen tangential zu Kugelflächen um den Koordinatenursprung (den Niveauflächen der Abstandsfunktion r). Wegen $dE = 0$ fügen sie sich zu geschlossenen Flächen, nämlich den Kugeloberflächen $r = \text{const}$, zusammen. Gemäß der Formel $E \propto dr/r^2$ nimmt die Spannung einer solchen (Äquipotenzial-)Fläche nach außen wie $1/r^2$ ab. (Alternativ können wir die Spannung aller Flächen konstant wählen und stattdessen den Abstand zwischen aufeinanderfolgenden Flächen wie r^2 zunehmen lassen.)

4. Das **Induktionsfeld** im Inneren einer Spule mit niederfrequentem Wechselstrom $I \cos(\omega t)$ und N Windungen pro Länge L ist

$$E = \frac{\mu_0 N}{2L} I \omega \sin(\omega t) r^2 d\theta \quad (\text{Zylinderkoordinaten } r, \theta, z).$$

Hier stehen die Flächenstücke von E parallel zu den Halbebenen $\theta = \text{const}$. Wegen $dE \propto r dr \wedge d\theta \neq 0$ fügen sie sich nicht zu geschlossenen Flächen zusammen (man spricht von einem "Wirbelfeld"):



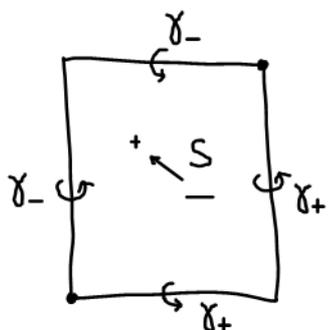
2.10.2 Anwendung: magnetische Induktion

Wir beginnen mit einigen Erinnerungen und Vorbereitungen.

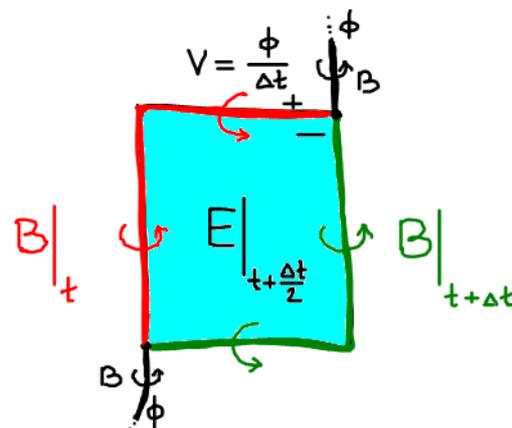
- Die magnetische Feldstärke B ist eine 2-Form. In Abwesenheit magnetischer Monopole hat sie keine Quellen: $dB = 0$ (oder, im Vektorkalkül, $\text{div} \vec{B} = 0$). Im E_3 bedeutet dieses Gesetz (hier ohne Beweis), dass sich die Linienstücke von B zu geschlossenen Linien (ohne Anfang oder Ende) zusammenfügen, sogenannten magnetischen Flusslinien. Der Gewichtsfaktor einer solchen Linie ist der von ihr getragene Magnetfluss, mit der physikalischen Dimension von Energie/Strom.
- Die elektrische Feldstärke E ist eine 1-Form. In der Elektrostatik gilt $dE = 0$ (oder, im Vektorkalkül, $\text{rot} \vec{E} = 0$), was anschaulich bedeutet (im E_3), dass sich die Flächenstücke von E zu geschlossenen Flächen (sogenannten Äquipotenzialflächen) zusammenfügen. Der Gewichtsfaktor einer solchen Fläche ist die Spannung zwischen den zwei Seiten der Fläche. Spannung hat bekanntlich die physikalische Dimension von Energie/Ladung.
- In der Elektrodynamik (also mit Zeitabhängigkeit, insbesondere mit nichtverschwindender Zeitableitung $\dot{B} \neq 0$) ist E nicht länger geschlossen (oder randlos), sondern es gilt das Faraday'sche Induktionsgesetz:

$$dE = -\dot{B}.$$

Deutung des Induktionsgesetzes (im diskreten Modell): Überstreicht eine Linie von B mit Magnetfluss ϕ die Fläche S im Zeitintervall $[t, t + \Delta t]$, so liegt in E gleichzeitig ein Flächenstück S mit Spannungsstoß $V = \phi/\Delta t$ vor. Dabei ist die Polarität des E -Flächenstücks gleich der Durchstoßrichtung der Zirkulation der B -Linie zur früheren Zeit (also t , nicht $t + \Delta t$).



$$\text{Rand}(S) = \partial S = \gamma_- - \gamma_+$$



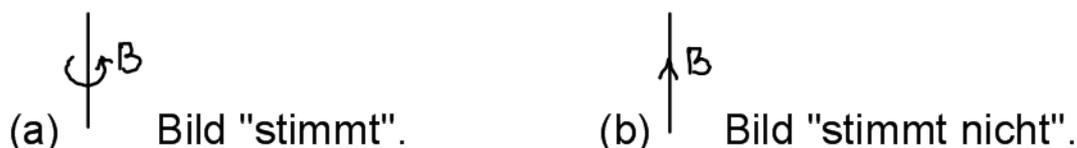
Nachweis durch Rechnung:

$$E|_{t+\Delta t/2} = \frac{\phi}{\Delta t} S + \dots \implies dE|_{t+\Delta t/2} = \frac{\phi}{\Delta t} \partial S = \frac{\phi}{\Delta t} (\gamma_- - \gamma_+) = \frac{1}{\Delta t} \left(B|_t - B|_{t+\Delta t} \right) \approx -\dot{B}|_{t+\Delta t/2} .$$

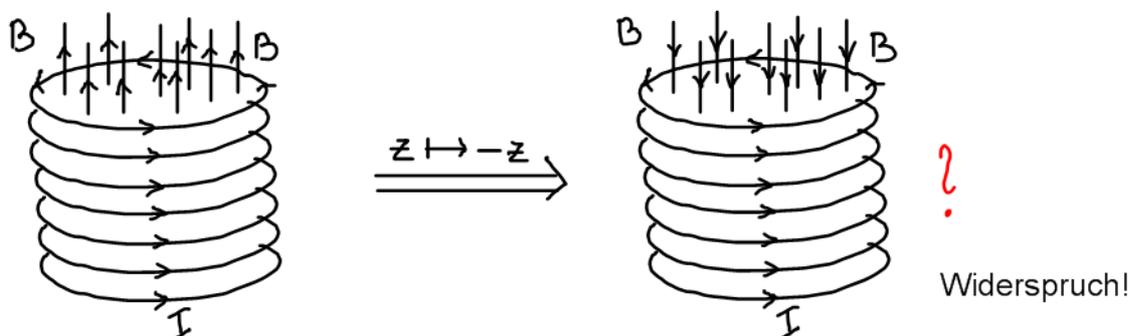
Bemerkung (wissenschaftsgeschichtlich). Die obige Deutung des Induktionsgesetzes war im wesentlichen bereits seinem Entdecker Faraday bekannt. Faraday verfügte über keine Ausbildung in höherer Mathematik und war deshalb für die systematische Deutung seiner experimentellen Beobachtungen auf geometrische Intuition angewiesen. Faradays Zeitgenossen (mit Ausnahme von Maxwell) lehnten seine geometrische Deutung als "unmathematisch" ab. Da sich im weiteren geschichtlichen Verlauf der Vektorkalkül durchsetzte und Faradays Deutung im Vektorkalkül nur schwer (wenn überhaupt) ausgedrückt werden kann, ging Faradays tiefe Einsicht den Lehrbüchern der Physik leider verloren.

Hinweis (für Experten). Die gezeichnete Situation tritt ein, wenn in einem in der Vortexphase befindlichen **Supraleiter mit Schichtstruktur** die Magnetfeldachse einen kleinen Neigungswinkel relativ zu den supraleitenden Ebenen hat. Dann müssen die magnetischen Flusslinien Schichten überspringen und die Sprungstelle, hier das horizontale Stück, ist beweglich.

Merke:



Begründung (anhand eines Beispiels). Eine lange dünne Spule liege konzentrisch um die z -Achse und symmetrisch zum Koordinatenursprung. Dann ist $\pi : (x, y, z) \mapsto (x, y, -z)$ eine Symmetrietransformation der stromtragenden Spule. Folglich muss π auch eine Symmetrietransformation des vom Stromfluss bewirkten Magnetfeldes sein. Diese Forderung wird vom obigen Bild (a) erfüllt, nicht aber vom obigen Bild (b):



Der tiefere Grund hierfür liegt darin, dass zwar die 2-Form B invariant (insbesondere π -invariant) erklärt ist, nicht aber der das Spatprodukt (und somit die Rechte-Hand-Regel) verwendende Isomorphism $\mathcal{I}_2 : B \mapsto \vec{B}$. Man sagt auch, \vec{B} sei ein **"axiales"** Vektorfeld.

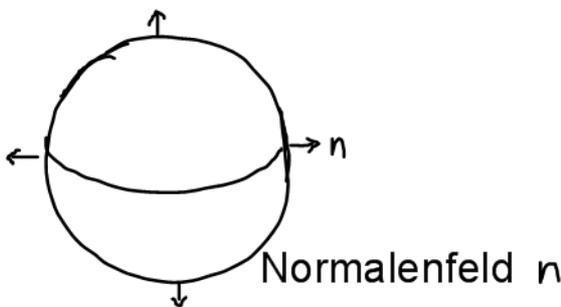
2.10.3 Satz von Gauss

In Abschnitt 2.9.1 wurde erklärt, was unter der Orientierung eines dreidimensionalen Gebiets $U \subset X$ zu verstehen ist. Für die jetzt anstehende Aussage benötigen wir zusätzlich ein Verständnis, wie die Orientierung von U eine Orientierung auf dem zweidimensionalen Rand ∂U bestimmt.

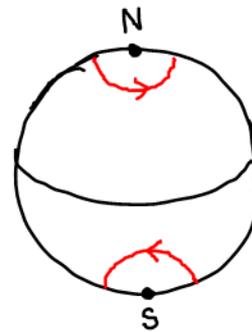
Definition. Sei das dreidimensionale Gebiet $U \subset X$ durch die 3-Form Ω orientiert. Ist v ein Vektorfeld, das überall auf dem Rand von U von innen nach außen zeigt (bzgl. U), so wird der Rand ∂U durch die 2-Form $\omega = \Omega(v, \cdot, \cdot)$ orientiert, d.h.

$$\begin{aligned} \omega_p(u, w) = \Omega(v(p), u, w) > 0 &\Leftrightarrow u, w \text{ positives System,} \\ < 0 &\Leftrightarrow u, w \text{ negatives System.} \end{aligned}$$

Beispiel. Kugel $U=K$ orientiert durch $\Omega = dx \wedge dy \wedge dz$.



Kugeloberfläche $\partial U = \partial K$ orientiert durch $\omega = \Omega(n, \cdot, \cdot)$:



$$\begin{aligned} \omega_N &= (dx \wedge dy)_N \\ &= \mathfrak{I}_x \wedge \mathfrak{I}_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_S &= -(dx \wedge dy)_S \\ &= +\mathfrak{I}_y \wedge \mathfrak{I}_x \end{aligned}$$

Satz. Für einen affinen Raum $(X, V, +)$ sei $\beta : X \rightarrow \text{Alt}^2(V)$ eine differenzierbare 2-Form und $U \subset X$ ein orientiertes dreidimensionales Gebiet mit Rand ∂U . Dann gilt

$$\int_U d\beta = \int_{\partial U} \beta.$$

Bemerkung. Man beachte die Ähnlichkeit (mit der Ersetzung $U \leftrightarrow \Sigma$) zum Integralsatz von Abschnitt 2.8.3. Tatsächlich sind beide Integralsätze Spezialfälle des sogenannten **Allgemeinen Stokes'schen Satzes**,

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

für den allgemeinen Fall einer k -Form ω auf einer Mannigfaltigkeit M der Dimension $k + 1$. Der Beweis des obigen Satzes ist nicht wesentlich verschieden von dem in Abschnitt 2.8.5 (entfällt).

Korollar (Satz von Gauss). Sei v ein Vektorfeld im dreidimensionalen Euklidischen Raum E_3 , und sei ∂U der Rand eines Gebiets U . Dann ist das Oberflächenintegral von v über ∂U gleich dem Volumenintegral der Divergenz von v über U :

$$\int_{\partial U} v \cdot ds = \int_U \text{div}(v) dx \wedge dy \wedge dz.$$

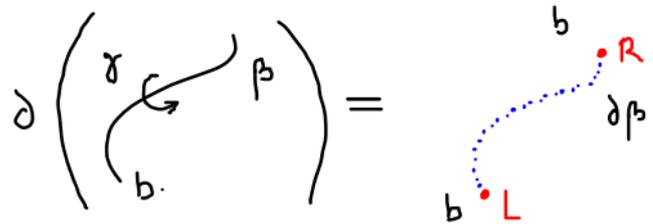
Beweis. Durch Anwendung des obigen Satzes auf $\omega = \mathcal{I}_2^{-1}(v)$ erhalten wir

$$\int_{\partial U} v \cdot ds = \int_{\partial U} \mathcal{I}_2^{-1}(v) = \int_U d\mathcal{I}_2^{-1}(v) = \int_U \mathcal{I}_3^{-1} \circ (\mathcal{I}_3 d\mathcal{I}_2^{-1})(v).$$

Der Satz von Gauss folgt dann mit $(\mathcal{I}_3 d\mathcal{I}_2^{-1})(v) = \operatorname{div}(v)$ und $\mathcal{I}_3^{-1}(1) = dx \wedge dy \wedge dz$. \square

Der obige Integralsatz führt zu einer anschaulichen **Deutung** der äußeren Ableitung d auf 2-Formen. Dazu erinnern wir zunächst an die (im E_3 gültige) Vorstellung, dass 2-Formen durch Linienstücke mit Zirkulationssinn und 3-Formen durch Punkte mit Händigkeit modelliert werden. Für die folgende Deutung von d müssen wir auch verstehen, wie der **Randoperator** ∂ auf Linienstücke γ mit Zirkulationssinn wirkt. Als Menge aufgefasst, besteht der Rand $\partial\gamma$ des Linienstücks natürlich aus den zwei Randpunkten. Jetzt kommt aber die Information hinzu, dass durch den Zirkulationssinn des Linienstücks beiden Randpunkten eine Händigkeit zugeordnet wird. Das geschieht durch die folgende

Vorschrift: "Richte den Daumen der rechten (linken) Hand längs des Linienstücks γ von innen nach außen (bzgl. γ); folgt dann die Handzirkulation der Linien-Zirkulation von γ , so ist der Randpunkt rechtshändig (bzw. linkshändig).



Behauptung. Die **äußere Ableitung** auf 2-Formen wirkt im anschaulichen Modell wie das Negative des Randoperators:

$$d = -\partial .$$

Konkret bedeutet dies: besteht eine 2-Form β im E_3 aus Linienstücken γ_j mit Gewichten b_j , so besteht die 3-Form $d\beta$ aus den Randpunkten der γ_j mit denselben, nur im Vorzeichen umgekehrten Gewichten:

$$d\beta = d \sum_j b_j \gamma_j = \sum_j (-b_j) \partial\gamma_j .$$

Dabei wird die Händigkeit der Punkte von $\partial\gamma_j$ nach der obigen Vorschrift ermittelt.

Diese Deutung $d = -\partial$ der äußeren Ableitung als Randoperator kann wie schon angekündigt aus dem Integralsatz $\int_U d\beta = \int_{\partial U} \beta$ hergeleitet werden. Umgekehrt kann man die Deutung als wahr akzeptieren und damit den Integralsatz verifizieren. Wir beschreiten den **letzteren Weg**.

Sei dazu $\beta = \sum b_j \gamma_j$. Da das Integral linear ist, gilt der Integralsatz, wenn er für den Spezialfall einer 2-Form mit einem einzigen Linienstück gilt. Sei also einfach $\beta = b\gamma$. Gemäß der anschaulichen Deutung von 2-Formen und ihrer Flächenintegrale [Abschnitt 2.10: Visualisierung (2-Formen)] haben wir dann für die rechte Seite

$$\int_{\partial U} \beta = \sum_{\gamma \cap \partial U} \pm b .$$

Die Summe läuft über alle Punkte, in denen das Linienstück γ die geschlossene Fläche ∂U kreuzt. Das Pluszeichen (Minuszeichen) gilt, wenn die Zirkulationssinne übereinstimmen (bzw. nicht übereinstimmen). Ordnen wir die Kreuzungspunkte gemäß ihrer Abfolge auf dem Linienstück,

so alterniert das Vorzeichen, denn wenn die Zirkulationssinne in einer Kreuzung übereinstimmen, dann tun sie es bei der nächsten nicht, bei der übernächsten wieder doch, usw.

Wir kommen zur **linken Seite** $\int_U d\beta$ des zu verifizierenden Integralsatzes. Zur anschaulichen Deutung von 3-Formen ρ und ihrer Volumenintegrale $\int_U \rho$ haben wir uns (jenseits der konstanten Situation vom Anfang von Abschnitt 2.9.1) bislang nicht geäußert. Diese Deutung folgt aber dem schon bekannten Prinzip: zur Berechnung von $\int_U \rho$ summieren wir über die im Gebiet U liegenden Punkte von ρ , wobei wir den Beitrag eines Punkts p mit Gewicht q der 3-Form ρ als $+q$ ($-q$) zählen, wenn die Händigkeit des Punkts mit der Orientierung von U übereinstimmt (bzw. nicht übereinstimmt). Im aktuellen Fall $\rho = d\beta$ mit $d\beta = -\partial\beta$ (wie behauptet) und $\beta = b\gamma$ erhalten wir dann

$$\int_U d\beta = - \sum_{\partial\gamma \cap U} \pm b,$$

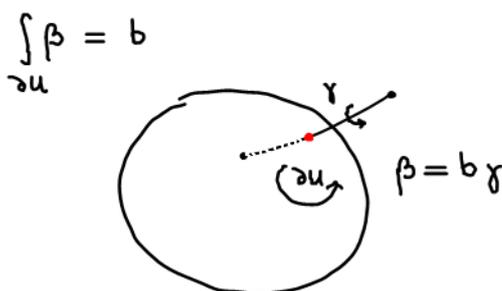
wobei die Summe über alle in U liegenden Randpunkte von γ läuft und das Vorzeichen wie erläutert durch Orientierungsvergleich ermittelt wird.

Sei nun die Zahl der Kreuzungen von γ mit ∂U **gerade**. Dann verschwindet einerseits die alternierende Summe für das Oberflächenintegral: $\int_{\partial U} \beta = 0$. Andererseits liegen für eine gerade Zahl von Kreuzungen $\gamma \cap \partial U$ die Randpunkte der Linie γ entweder beide außerhalb oder beide innerhalb von U . Im ersten Fall verschwindet das Volumenintegral $\int_U d\beta$ trivialerweise (wegen $\partial\gamma \cap U$ leere Menge). Im zweiten Fall tragen beide Randpunkte von γ zum Volumenintegral bei. Von diesen Randpunkten ist einer rechtshändig und einer linkshändig orientiert. Ganz egal wie nun das Gebiet U orientiert ist (durch die Rechte-Hand oder die Linke-Hand-Regel) liefert der Orientierungsvergleich für einen der beiden Randpunkte das positive Ergebnis, für den anderen dagegen das negative. Es folgt

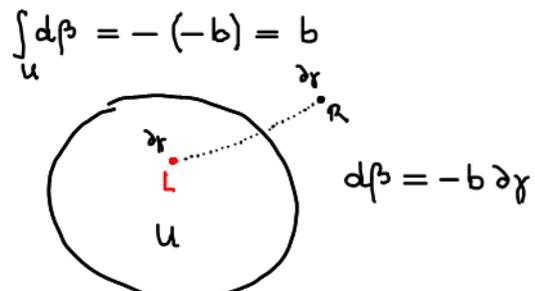
$$\int_U d\beta = \pm b \mp b = 0.$$

Für eine gerade Zahl von Kreuzungen verschwindet also nicht nur das Oberflächenintegral $\int_{\partial U} \beta$ sondern auch das Volumenintegral $\int_U d\beta$, und der Integralsatz stimmt.

Sei nun die Zahl der Kreuzungen von γ mit ∂U **ungerade**. Dann liegt von den zwei Randpunkten der Linie γ einer innerhalb und einer außerhalb von U . Zum Volumenintegral trägt nur der innerhalb liegende bei: $\int_U d\beta = \pm b$. Andererseits bleibt nun von der alternierenden Summe von Kreuzungsbeiträgen zum Oberflächenintegral genau ein Beitrag übrig: $\int_{\partial U} \beta = \pm b$. Das Vorzeichen ist hier das gleiche wie fürs Volumenintegral, wie man der nachfolgenden Skizze (der Einfachheit halber nur für den übersichtlichen Fall einer einzigen Kreuzung) entnimmt:



Rand ∂U orientiert durch Gegen-
uhrzeigersinn (Außenansicht)



Gebiet U orientiert durch
 $\Omega = dx \wedge dy \wedge dz$ (Rechte-Hand-R.)

2.11 Formen vom ungeraden Typ

Motivation. Das Bild \curvearrowright “stimmt” für die Linienstücke der magnetischen Feldstärke B . Nicht so für einige andere 2-Formen der physikalischen Welt! (Mit 2-Formen meinen wir hier Größen, die über Flächen zu integrieren sind.) Für die sogenannten “Stromdichten” (von Masse, Energie, Ladung, usw.) “stimmt” das andere Bild: \uparrow ; dabei gibt das Linienstück den Stromverlauf und der Pfeil die Stromrichtung an.

Fazit. Die bislang eingeführten mathematischen Objekte taugen für manche, aber nicht für alle physikalischen Zwecke, und wir benötigen noch eine Erweiterung des Kalküls.

2.11.1 Innere und äußere Orientierung

Wir haben zwei unterschiedliche Typen von Linien oder Linienstücken kennengelernt: (i) Zum Zweck der Integration von 1-Formen verwenden wir Linien mit Richtungssinn. (ii) Zum Zweck der anschaulichen Modellierung von 2-Formen (im E_3) benützen wir Linienstücke mit Zirkulationssinn. Im ersten Fall spricht man von einer Linie mit innerer Orientierung, im zweiten Fall von einem Linienstück mit äußerer Orientierung.

Die gleiche Unterscheidung zwischen innerer und äußerer Orientierung trifft man für Punkte, Flächen und Gebiete. Eine Fläche Σ , die als Integrationsfläche für eine 2-Form dient, trägt wie wir wissen einen Zirkulationssinn; das nennt man in diesem Fall eine innere Orientierung. Die Flächenstücke einer 1-Form im E_3 , z.B. der elektrischen Feldstärke E , tragen eine Durchstoßrichtung oder Polarität; hier spricht man wieder von äußerer Orientierung.

Im Fall von Punkten (minimale Dimension) und dreidimensionalen Gebieten (maximale Dimension im E_3) ist die Sprechweise ähnlich, wenn auch mit einer kleinen Ausnahmeregelung. Ein Punkt mit Händigkeit ist ein Punkt mit äußerer Orientierung, und ein 3-dimensionales Gebiet mit Händigkeit ist ein Gebiet mit innerer Orientierung. Hingegen ist unter einem Punkt mit innerer Orientierung per Definition ein Punkt ohne jede Orientierung zu verstehen. Ebenso ist ein Gebiet (maximaler Dimension, also $d = 3$ im E_3) mit äußerer Orientierung ein Gebiet ohne jede Orientierung.

Ganz allgemein ist Orientierung ein binärer Begriff, d.h. die Wahl einer Orientierung ist immer eine Wahl zwischen zwei Möglichkeiten. Der Pfeil auf einer Linie mit innerer Orientierung zeigt entweder in der einen Richtung oder in der anderen Richtung; der Zirkulationssinn einer Linie mit äußerer Orientierung ist entweder gleich dem Uhrzeigersinn oder gleich dem Gegenuhrzeigersinn; ein geordnetes System $\{e_1, e_2, e_3\}$ von linear unabhängigen Vektoren bildet entweder ein rechtshändiges oder ein linkshändiges System. Eine dritte Möglichkeit gibt es nicht. So entspricht die Wahl einer Orientierung immer der Wahl eines Elements der Menge $\{\pm 1\}$.

Zum Zweck der Sprachökonomie führen wir jetzt folgende Sprechweise ein: 0-Zelle für Punkt, 1-Zelle für Linie, 2-Zelle für Fläche, 3-Zelle für Gebiet. Ist c eine orientierte k -Zelle (mit innerer oder äußerer Orientierung), so vereinbaren wir die Konvention, dass $-c$ die gleiche k -Zelle mit der umgekehrten Orientierung ist. Wenn c zum Beispiel eine Linie mit Richtungssinn ist, dann ist $-c$

die gleiche Linie mit dem umgekehrten Richtungssinn.

Die Entweder-Oder Eigenschaft von Orientierung spielt auch eine Rolle in einer **Konstruktion**, die Zellen mit innerer und äußerer Orientierung miteinander in Beziehung setzt. Sei $\tilde{\gamma}$ eine Linie mit äußerer Orientierung, und sei γ die gleiche Linie (als Punktmenge), aber mit einer inneren Orientierung. Dann bestimmt das Paar $\gamma, \tilde{\gamma}$ eine Orientierung (in diesem Fall eine Händigkeit) des umgebenden Raumes; das ist die Händigkeit der Hand, deren Finger sich gemäß des Zirkulationssinnes von $\tilde{\gamma}$ krümmen, wenn der Daumen in Richtung des Richtungssinnes von γ zeigt.

Per Annahme bilde das Paar $\gamma, \tilde{\gamma}$ jetzt eine rechte Hand. Diesen Sachverhalt drücken wir dann formelmäßig so aus:

$$\tilde{\gamma} = [\gamma; \text{rechts}] \equiv [\gamma; R] .$$

Allerdings ist aus Sicht der Zelle $\tilde{\gamma}$ mit äußerer Orientierung der Richtungssinn von γ ein irrelevantes Stück Information. Es gibt keinen guten Grund, warum wir γ und nicht $-\gamma$ benutzen sollen. Da das Paar $\gamma, \tilde{\gamma}$ eine rechte Hand darstellt, bildet das neue Paar $-\gamma, \tilde{\gamma}$ eine linke Hand. Nach dem gleichen Prinzip wie oben haben wir also

$$\tilde{\gamma} = [-\gamma; \text{links}] \equiv [-\gamma; L] .$$

Aus Gründen der Konsistenz müssen wir deshalb die **Identifikation**

$$[\gamma; R] \equiv [-\gamma; L]$$

vornehmen.

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \uparrow \end{array} \hat{=} \left[\begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} ; \mathcal{R} \right] \equiv \left[\begin{array}{c} \downarrow \\ \uparrow \end{array} ; \mathcal{L} \right] \quad \begin{array}{l} \mathcal{R} = \text{Rechte-Hand-R.} \\ \mathcal{L} = \text{Linke-Hand-R.} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} + \\ \uparrow \\ - \end{array} \hat{=} \left[\begin{array}{c} \text{Zelle mit } \uparrow \\ \text{äußerer Orientierung} \end{array} ; \mathcal{R} \right] \equiv \left[\begin{array}{c} \text{Zelle mit } \uparrow \\ \text{äußerer Orientierung} \end{array} ; \mathcal{L} \right]$$

Hier tritt nun die tiefere Bedeutung der eben eingeführten Notation zutage: ist c eine Zelle mit innerer Orientierung und $\text{Or} \in \{R, L\}$ eine Orientierung des Raumes, dann steht $[c; \text{Or}]$ für die **Äquivalenzklasse**, die aus dem Paar c, Or und dem Paar $-c, -\text{Or}$ besteht:

$$[c; \text{Or}] = [-c; -\text{Or}] .$$

Formal gesprochen wirkt die Gruppe $\mathbb{Z}_2 = \{+1, -1\}$ auf beide Glieder des Paares, und wir bilden Äquivalenzklassen, indem wir durch diese **Gruppenwirkung** teilen. Diese Operation der Bildung von Äquivalenzklassen ist distributiv bzgl. der Addition:

$$[c + c'; \text{Or}] = [c; \text{Or}] + [c'; \text{Or}] ,$$

und linear bzgl. der Skalarmultiplikation:

$$[\lambda c; \text{Or}] = \lambda [c; \text{Or}] \quad (\lambda \in \mathbb{R}) .$$

2.11.2 Differentialformen vom ungeraden Typ

Definition. Unter einer k -Form $\tilde{\omega}$ vom ungeraden Typ (kurz: einer **ungeraden k -Form $\tilde{\omega}$**) versteht man eine Äquivalenzklasse

$$\tilde{\omega} = [\omega; \text{Or}] \equiv [-\omega; -\text{Or}] ,$$

wobei $\omega : X \rightarrow \text{Alt}^k(V)$ eine k -Form und Or eine Orientierung des ambienten Vektorraums V ist.

Bemerkung. Uns wird nur der Spezialfall $X = E_3, V = \mathbb{R}^3$ beschäftigen. In diesem Fall haben wir entweder $\text{Or} = R$ (Rechte-Hand-Regel) oder $\text{Or} = L$ (Linke-Hand-Regel), und wir vereinbaren die Konvention $-R = L$ und $-L = R$.

Definition. Eine ungerade 3-Form im E_3 heißt eine **Dichte**. (Allgemeiner spricht man bei ungeraden n -Formen im n -dimensionalen Raum von Dichten.) Eine ungerade 2-Form im E_3 heißt auch eine Stromdichte oder Flussdichte.

Die Operationen von äußerer Ableitung und äußerem Produkt **übertragen** sich in natürlicher Weise auf ungerade Formen. Im Fall der äußeren Ableitung definiert man

$$d[\omega; \text{Or}] := [d\omega; \text{Or}] ,$$

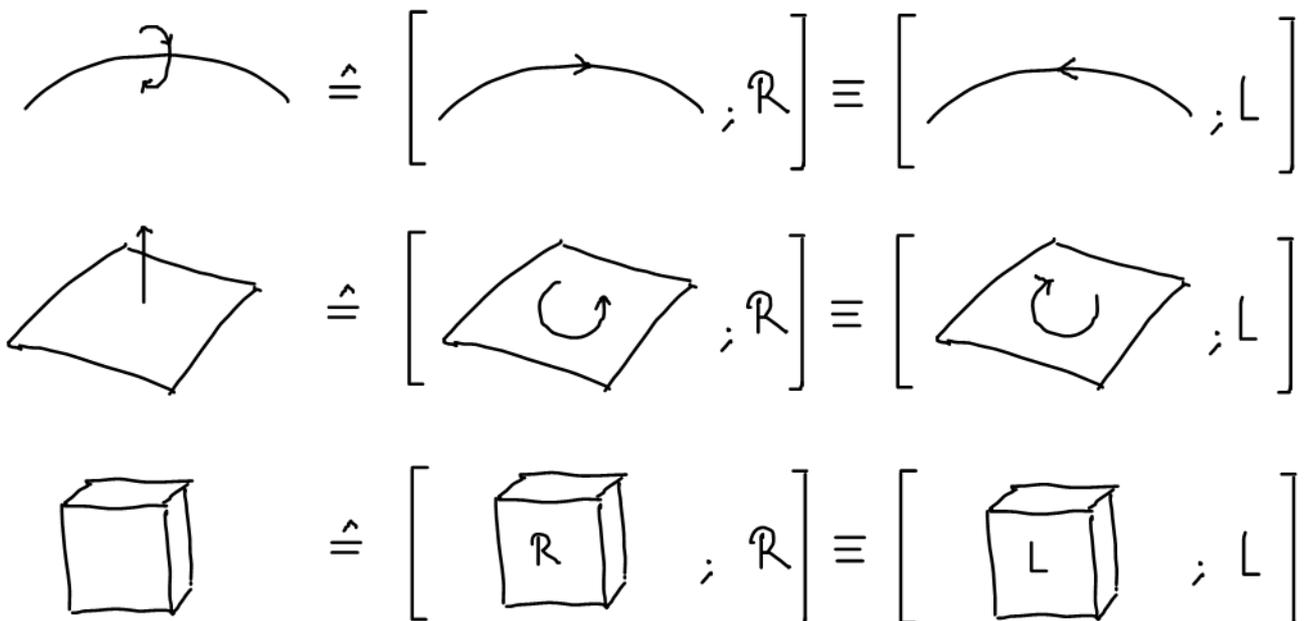
und im Fall des äußeren Produkts

$$\alpha \wedge [\beta; \text{Or}] := [\alpha \wedge \beta; \text{Or}] , \quad [\alpha; \text{Or}] \wedge [\beta; \text{Or}] := \alpha \wedge \beta .$$

Mit $[\beta; -\text{Or}] = [-\beta; \text{Or}]$ folgt insbesondere $[\alpha; \text{Or}] \wedge [\beta; -\text{Or}] = -\alpha \wedge \beta$.

2.11.3 Integration ungerader Formen

Zum Zweck der sinnvollen Integration ungerader Formen müssen wir zuerst die Beschaffenheit der Integrationsmannigfaltigkeit (d.h. der Kurven, Flächen, Gebiete) entsprechend anpassen. Dies geschieht nach dem gleichen Prinzip wie oben:



Definition. Unter einem k -dimensionalen **Integrationsgebiet** ($k = 1$: Kurve, $k = 2$: Fläche, $k = 3$: Raumgebiet, usw.) **mit äußerer Orientierung** versteht man eine Äquivalenzklasse

$$\tilde{c} = [c; \text{Or}] \equiv [-c; -\text{Or}] .$$

Hierbei ist c ein k -dimensionales Integrationsgebiet mit innerer Orientierung (d.h. vom schon bekannten Typ) und Or eine Orientierung des ambienten Vektorraums.

Bemerkung. Für ein n -dimensionales Gebiet in n Dimensionen ist eine äußere Orientierung gleichbedeutend mit gar keiner Orientierung (siehe z.B. die letzte Skizze auf der vorigen Seite).

Definition. Wir erklären das **Integral** einer ungeraden k -Form $\tilde{\omega} = [\omega; \text{Or}]$ über ein k -dimensionales Integrationsgebiet $\tilde{c} = [c; \text{Or}]$ durch

$$\int_{\tilde{c}} \tilde{\omega} = \int_{[c; \text{Or}]} [\omega; \text{Or}] := \int_c \omega .$$

Wir beseitigen also die Orientierung des ambienten Raums sowohl für die ungerade k -Form wie auch für das Integrationsgebiet und drücken somit das neue Integral durch das schon bekannte Integral aus. Im inkongruenten Fall verfahren wir natürlich so:

$$\int_{[c; -\text{Or}]} [\omega; \text{Or}] = \int_{[c; -\text{Or}]} [-\omega; -\text{Or}] = - \int_c \omega .$$

Bemerkung. Wenn wir nur Dichten zu integrieren hätten, ließe sich die Definition deutlich vereinfachen (durch konsequentes Eliminieren von Orientierung jeder Art). Der recht aufwändige Formalismus wird dadurch erzwungen, dass wir zur naturgetreuen Beschreibung physikalischer Vorgänge auch ungerade 2-Formen (also Stromdichten) und ungerade 1-Formen sinnvoll integrieren wollen/müssen. \square

Es folgt jetzt die **Übertragung** aller Integralsätze. Sei dazu $\tilde{\omega} = [\omega; \text{Or}]$ eine ungerade k -Form und $\tilde{c} = [c; \text{Or}]$ ein $(k + 1)$ -dimensionales Integrationsgebiet mit äußerer Orientierung. Der Rand von \tilde{c} wird erklärt durch

$$\partial\tilde{c} := [\partial c; \text{Or}] .$$

Dann haben wir

$$\int_{\tilde{c}} d\tilde{\omega} = \int_{[c; \text{Or}]} [d\omega; \text{Or}] = \int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega = \int_{[\partial c; \text{Or}]} [\omega; \text{Or}] = \int_{\partial\tilde{c}} \tilde{\omega} .$$

Der (Allgemeine) Stokes'sche Satz gilt also auch (mutatis mutandi) für den Fall ungerader Formen.

2.11.4 Beispiele aus der Theorie des Elektromagnetismus

Beispiel 1: elektrische Ladungsdichte. Die elektrische Ladungsdichte ρ im E_3 ist eine ungerade 3-Form:

$$\rho = f [dx \wedge dy \wedge dz; R] = f [-dx \wedge dy \wedge dz; L] .$$

Wir schreiben in diesem Fall auch

$$\rho = f |dx \wedge dy \wedge dz| ,$$

oder noch kürzer:

$$\rho = f \, dx \, dy \, dz .$$

Das Integral $Q(U) := \int_U \rho$ berechnet die gesamte im Raumgebiet U befindliche elektrische Ladungsmenge.

Bemerkung. In physikalischen Lehrbüchern wird meist die Größe f als die elektrische Ladungsdichte bezeichnet. Wir reservieren den Namen “Ladungsdichte” für die bedeutsamere (weil invariant erklärte) Größe ρ . Zur besseren Unterscheidung nennen wir f die Ladungsdichtefunktion.

Deutung des Dichteintegrals. Die Ladungsdichte ρ bestehe aus Ladungen q_i and den Orten p_i , also $\rho = \sum_i q_i p_i$. Dann ist

$$Q(U) = \int_U \rho = \sum_{i: p_i \in U} q_i .$$

Wir bilden also die Summe aller Ladungen q_i , die sich an Orten p_i innerhalb des Gebiets U befinden. (Beachte: Längeneinheiten und Volumenmessung gehen hier nicht ein!)

Beispiel 2: elektrische Erregung. Die elektrische Erregung (oder elektrische Flussdichte) D ist im E_3 eine ungerade 2-Form:

$$D = \sum_{i < j} D_{ij} [dx_i \wedge dx_j ; R] = \sum_{i < j} D_{ij} [dx_j \wedge dx_i ; L] .$$

Das Integral $\int_S D$ heißt der elektrische Fluss durch die Fläche S (mit äußerer Orientierung). Es gilt das Gauss'sche Gesetz:

$$dD = \rho .$$

Durch Integration über ein beliebiges Raumgebiet $U \subset E_3$ (ohne Orientierung) folgt:

$$\int_{\partial U} D = \int_U \rho .$$

Die elektrische Ladung im Gebiet U ist also gleich dem elektrischen Fluss durch die Oberfläche ∂U . Hieraus resultiert die Vorstellung, dass elektrische Ladungen die Quellen des elektrischen Flusses sind. Insbesondere hat elektrischer Fluss die physikalische Dimension von Ladung.

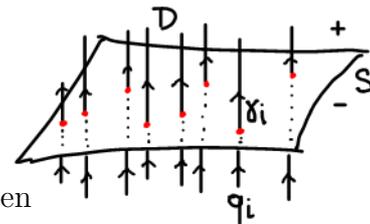
Deutung des Flussintegrals. D bestehe aus Linienstücken γ_i mit Gewichtsfaktoren q_i der physikalischen Dimension von elektrischem Fluss oder Ladung, also $D = \sum q_i \gamma_i$. Dann ist

$$\int_S D = \sum_{i: \gamma_i \cap S} \pm q_i .$$

Die Summe läuft über alle Linienstücke γ_i , die S kreuzen.

Jedes Linienstück γ_i trägt zur Summe mit seinem elektrischen

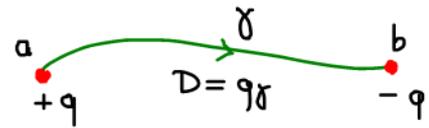
Fluss $\pm q_i$ bei, und das Vorzeichen wird wie immer durch Orientierungsvergleich ermittelt.



Deutung (anschaulich) des Gauss'schen Gesetzes. Nun besprechen wir eine besonders simple Konfiguration, die das Gauss'sche Gesetz $dD = \rho$ befriedigt. Sei dazu $D = q\gamma$, d.h. D bestehe aus einer einzigen Linie γ , die den elektrischen Fluss q trägt. Die Linie beginne im Punkt a und ende im Punkt b . In Formeln: $\partial\gamma = b - a$. Der Rand von γ besteht also aus dem Endpunkt

b mit Gewicht $+1$ und dem Anfangspunkt a mit Gewicht -1 . In dieser Situation verlangt das Gauss'sche Gesetz, dass eine Ladung $+q$ im Punkt a und eine Ladung $-q$ im Punkt b vorliegen muss: $\rho = qa + (-q)b$. In der Tat gilt hiermit

$$dD = d(q\gamma) = q(-\partial\gamma) = qa + (-q)b = \rho.$$



Warnung: dieses Bild illustriert das Gauss'sche Gesetz (nämlich: ist D bekannt, so erhält man die elektrische Ladungsdichte ρ aus $dD = \rho$) und sonst nichts! Die elektrische Erregung eines realen Dipols mit Ladungen wie im Bild entsteht durch lineare Überlagerung einer Vielzahl elektrischer Flusslinien, die alle in der positiven Ladung des Dipols beginnen und in der negativen enden.

Beispiel 3: magnetische Erregung. Die **magn. Erregung H** ist (im E_3) eine ungerade 1-Form:

$$H = \sum_{i=1}^3 H_i [dx_i; R] = \sum_{i=1}^3 H_i [-dx_i; L].$$

Das Integral $\int_{\gamma} H$ (längs einer Kurve mit äußerer Orientierung) heißt die **magnetische Spannung** längs γ . In der Magnetostatik gilt das **Ampere'sche Gesetz:**

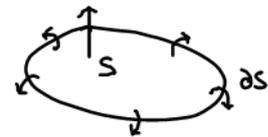
$$dH = j, \quad j = \sum_{k < l} j_{kl} [dx_k \wedge dx_l; R].$$

Hierbei ist j die **elektrische Stromdichte** (eine ungerade 2-Form). Das Ampere-Gesetz in Komponenten ausgedrückt lautet:

$$\frac{\partial H_l}{\partial x_k} - \frac{\partial H_k}{\partial x_l} = j_{kl}.$$

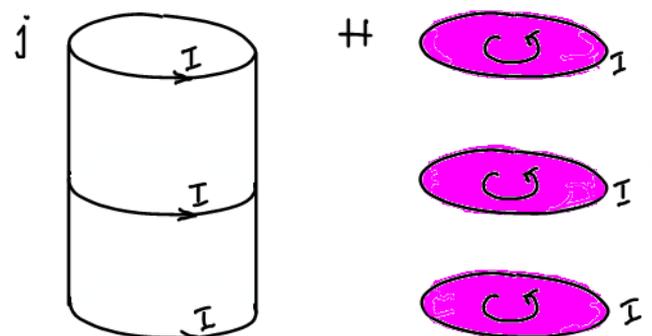
Integralversion des Ampere'schen Gesetzes. Sei $\gamma = \partial S$ die Randkurve einer Fläche S mit äußerer Orientierung. Dann folgt:

$$\int_{\partial S} H = \int_S dH = \int_S j = I(S).$$

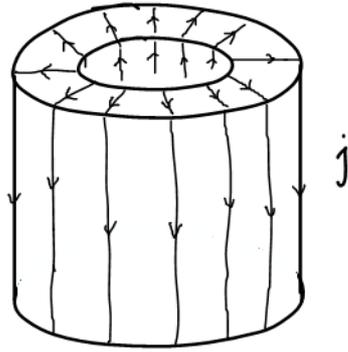


Der elektrische Strom $I(S) = \int_S j$ durch die Fläche S ist also gleich der magnetischen Ringspannung $\int_{\partial S} H$ längs der Randlinie $\gamma = \partial S$.

Visualisierung. Wegen der Bedeutung der äußeren Ableitung d als Randoperator bedeutet das Ampere-Gesetz $dH = j$ anschaulich gesprochen, dass die Flächenstücke der 1-Form H durch die Stromlinien der 2-Form j berandet werden. Für eine lange, dünne, stromtragende Spule zum Beispiel haben wir uns H als einen Stapel von Kreisscheiben vorzustellen, auf deren Rändern die Stromlinien der Spule liegen (die Zeichnung zeigt der Übersichtlichkeit halber nur eine dünne Auswahl des dichten Stapels von Kreisscheiben):



Als **zweites Beispiel** betrachten wir zwei konzentrisch angeordnete metallische Zylindermäntel, die durch zwei ringförmige Scheiben (oben und unten) zu einer geschlossenen Oberflächen verbunden werden.



Auf dem inneren Mantel fließe elektrischer Strom von unten nach oben, auf dem äußeren von oben nach unten (siehe Bild). Der Stromfluss sei stationär und habe Zylindersymmetrie bezüglich der z -Achse. In diesem Fall besteht H aus dem zylindersymmetrisch angeordneten Kranz von Rechtecken mit konstantem Polarwinkel ($\theta = \text{const}$), die sich im leeren Raum zwischen den beiden Zylindermänteln erstrecken. In Zylinderkoordinaten $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, z haben wir den Ausdruck

$$H = \begin{cases} (I/2\pi) [d\theta; R] & \text{im Zwischenraum,} \\ 0 & \text{außerhalb,} \end{cases}$$

wobei I den Gesamtstrom bezeichnet

Hinweis. Diese magnetische Erregung ist nur eine Lösung des Ampere-Gesetzes. Aus Symmetriegründen ist es aber die physikalisch richtige Lösung, für die auch gilt: $dB = 0$ (siehe das nächste Beispiel zum magnetischen Materialgesetz).

Beispiel 4: Materialgesetze. Die elektrische Feldstärke E und die elektrische Erregung D sind zwei verschiedene Charakterisierungen des elektrischen Feldes (ähnlich wie wir den Bewegungszustand eines Körpers mit Masse $m \neq 0$ entweder durch seine Geschwindigkeit oder durch seinen Impuls charakterisieren können.) E und D hängen durch das sogenannte elektrische **“Materialgesetz”** (im Vakuum) miteinander zusammen. In kartesischen Koordinaten x, y, z lautet es

$$E = E_z dz \quad \Leftrightarrow \quad D = \varepsilon_0 E_z [dx \wedge dy; R],$$

also $D_{xy} = \varepsilon_0 E_z$, plus zwei weitere Relationen vom gleichen Typ, in denen x, y, z zyklisch vertauscht sind. ε_0 heißt die **dielektrische Konstante** des Vakuums. Die physikalische Dimension von ε_0 ist

$$[\varepsilon_0] = \text{Ladung}/(\text{Spannung} \times \text{Länge}) = \text{Kapazität}/\text{Länge}.$$

Ein Kondensator aus zwei großen, ebenen, parallelen Metallplatten mit Abstand a und Fläche A hat (im Vakuum) die Kapazität $\varepsilon A/a$.

Die anschauliche Vorstellung zum elektrischen Materialgesetz ist, dass zu jedem Flächenstück S von E (mit Spannung V) ein dazu senkrecht Linienstück γ von D (mit elektrischem Fluss Q) gehört. Dabei muss folgende Relation erfüllt sein:

$$\varepsilon_0 V \times \text{Fläche}(S) = Q \times \text{Länge}(\gamma).$$

Eine analoge Gesetzmäßigkeit gilt für das Magnetfeld in Form der magnetischen Erregung H und der magnetischen Feldstärke B :

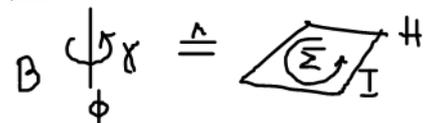
$$H = H_z [dz ; R] \Leftrightarrow B = \mu_0 H_z dx \wedge dy$$

(plus zwei Relationen, in denen die kartesischen Koordinaten zyklisch vertauscht sind). Die Naturkonstante μ_0 heißt die **magnetische Permeabilität** des Vakuums. Sie hat die physikalische Dimension

$$[\mu_0] = \text{Magnetfluss}/(\text{Strom} \times \text{Länge}) = \text{Induktivität}/\text{Länge} .$$

Eine lange, dünne Spule mit Querschnittsfläche A und einer Spulenwindung pro Strecke a hat die (Selbst-)Induktivität $\mu_0 A/a$.

Auch mit diesem **magnetischen "Materialgesetz"** können wir eine anschauliche Vorstellung verbinden: zu jedem Flächenstück Σ von H mit magnetischer Spannung I gehört ein Linienstück γ von B mit Magnetfluss ϕ . Dabei muss die folgende Relation erfüllt sein:

$$\phi \times \text{Länge}(\gamma) = \mu_0 I \times \text{Fläche}(\Sigma) .$$


Lichtgeschwindigkeit. Das Produkt $\varepsilon_0 \mu_0$ has die physikalische Dimension

$$[\varepsilon_0 \mu_0] = (\text{Ladung}^2/(\text{Energie} \times \text{Länge})) \times (\text{Energie}/(\text{Strom}^2 \times \text{Länge})) = \text{Zeit}^2/\text{Länge}^2 .$$

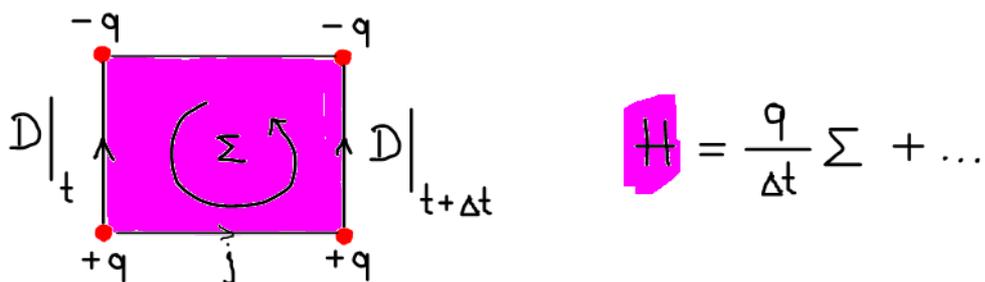
In der Elektrodynamik lernt man, dass es sich bei diesem Produkt von Naturkonstanten um das inverse Quadrat der Lichtgeschwindigkeit handelt.

2.11.5 Ampere-Maxwell-Gesetz

In der Elektrodynamik wird das Ampere-Gesetz der Magnetostatik durch das sogenannte **Ampere-Maxwell-Gesetz** ersetzt:

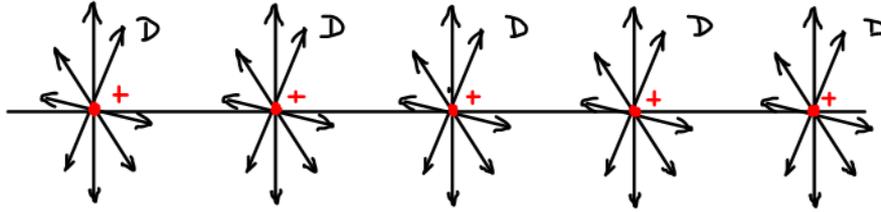
$$dH = j + \dot{D} .$$

Seine anschauliche **Deutung** erfolgt völlig analog zum Faraday'schen Induktionsgesetz, wie folgt. Elektrische Flusslinien (die Linien von D) beginnen auf positiven und enden auf negative Ladungen (gemäß Gauss-Gesetz). Die bei der Bewegung der D -Linien überstrichenen Flächenstücke sind (momentane) Flächenstücke von H :



Als simples Anwendungsbeispiel dieser Deutung betrachten wir die magnetostatische (!) Situation eines langen, geraden, dünnen, stromtragenden Metalldrahts. Der Draht ist elektrisch neutral, weil es zu jedem Elektron (negativ geladen) ein entsprechend positiv geladenes Metallion

gibt. Die elektrischen Flusslinien der Metallionen-Komponente können wir uns als eine Art lange, zylindersymmetrische “Haarbürste” vorstellen (mit “Borsten”, die senkrecht zur Drahtachse nach außen gerichtet stehen und bis ins Unendliche reichen):



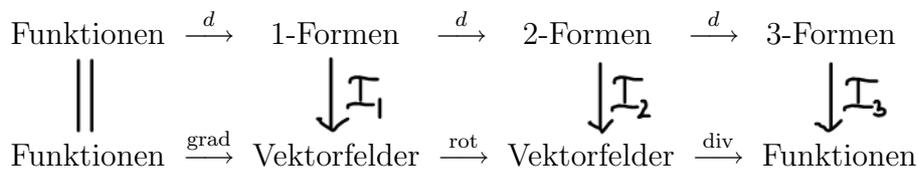
Die Metallionen befinden sich im Zustand der Ruhe. Damit ruhen auch die zugehörigen elektrischen Flusslinien. Diese ruhenden Flusslinien überstreichen keine Flächen und erzeugen deshalb auch kein Magnetfeld.

Nun sind aber die Elektronen im Zustand der Bewegung. Das Bild ihrer Flusslinien sieht so aus wie für die Metallionen, obschon die Richtung des elektrischen Flusses jetzt von außen nach innen zeigt. Wegen der umgekehrten Flussrichtung wird der elektrische Fluss der Metallionen durch den elektrischen Fluss der Elektronen kompensiert, so dass kein elektrisches Feld übrig bleibt. Allerdings haben wir uns jetzt vorzustellen, dass sich die elektrischen Flusslinien der Elektronen mit den Elektronen mitbewegen. Diese Flusslinien überstreichen Flächen und erzeugen somit magnetische Erregung. Die überstrichenen Flächen sind offenbar Halbebenen ($\theta = \text{const}$), die an der Drahtachse ansetzen und sich ins Unendliche erstrecken. Quantitative Umsetzung dieser Deutung ergibt das bekannte Ergebnis (in Zylinderkoordinaten):

$$H = I[d\theta; R] = I \left[\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}; R \right].$$

2.11.6 Abschließende Bemerkungen

Die Differenzialoperatoren der Vektoranalysis im E_3 lassen sich in dem folgenden **kommutativen Diagramm** zusammenfassen:



Die Kommutativität des Diagramms bedeutet, dass es nur auf Anfangs- und Endraum ankommt, nicht aber auf den Weg von Abbildungen dazwischen. Wir haben also

$$\mathcal{I}_1 \circ d = \text{grad}, \quad \mathcal{I}_2 \circ d = \text{rot} \circ \mathcal{I}_1, \quad \mathcal{I}_3 \circ d = \text{div} \circ \mathcal{I}_2.$$

Die generelle Regel

$$d \circ d = 0$$

ergibt speziell:

$$\text{div} \circ \text{rot} = 0, \quad \text{rot} \circ \text{grad} = 0.$$

Mit der Deutung der äußeren Ableitung als Randoperator hat die Regel $d \circ d = 0$ eine anschauliche Deutung: "der Rand vom Rand ist immer Null".

Zum Schluss präsentieren wir jetzt noch eine Verfeinerung des obigen Diagramms. Die erste Zeile gibt es genau gesagt zweimal (für ungerade wie für gerade Formen). Dementsprechend gibt es auch die zweite Zeile zweimal:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{Funktionen} & \xrightarrow{\text{grad}} & \text{Vektorfelder} & \xrightarrow{\text{rot}} & \text{Vektorfelder} & \xrightarrow{\text{div}} & \text{Funktionen} \\
 (\text{skalar}) & & (\text{polar}) & & (\text{axial}) & & (\text{pseudoskalar}) \\
 \phi_e & & E & & B & & \rho_m
 \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{Funktionen} & \xrightarrow{\text{grad}} & \text{Vektorfelder} & \xrightarrow{\text{rot}} & \text{Vektorfelder} & \xrightarrow{\text{div}} & \text{Funktionen} \\
 (\text{pseudoskalar}) & & (\text{axial}) & & (\text{polar}) & & (\text{skalar}) \\
 \phi_m & & H & & D & & \rho_e
 \end{array}$$

Erläuterungen. Sei $\pi : E_3 \rightarrow E_3$ eine **Raumspiegelung**, also eine Spiegelung z.B. am Koordinatenursprung o :

$$\pi(p) = \pi(o + (p - o)) = o - (p - o) .$$

Eine **(skalare) Funktion** $f : E_3 \rightarrow \mathbb{R}$ transformiert sich (wir benützen die Notation $f \mapsto \pi^* f$) unter π einfach durch Spiegelung des Arguments:

$$(\pi^* f)(p) = f(\pi(p)) .$$

Hingegen erleidet eine **pseudoskalare** Funktion f einen zusätzlichen Vorzeichenwechsel:

$$(\pi^* f)(p) = -f(\pi(p)) .$$

Ein physikalisches **Beispiel** für eine pseudoskalare Funktion wäre die magnetische Ladungsdichtefunktion (wenn es denn magnetische Ladungen gäbe). Magnetische Ladungen (wenn sie existierten) würden kein positives oder negatives Vorzeichen (wie elektrische Ladungen) tragen, sondern wären rechtshändig oder linkshändig. Unter Raumspiegelung haben wir:

$$\text{rechtshändig} \mapsto \text{linkshändig} = -\text{rechtshändig} .$$

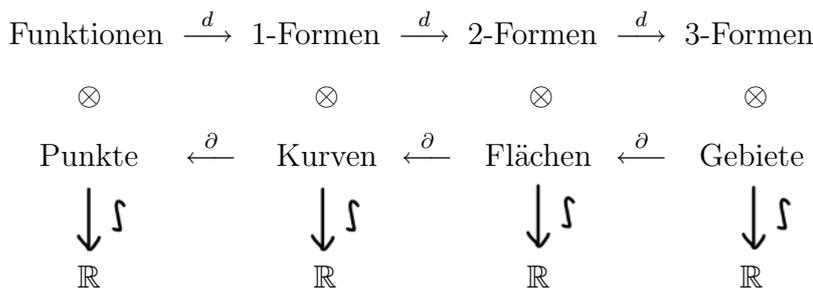
Eine ähnliche Unterscheidung hat man für Vektorfelder zu treffen. Unter einer Raumspiegelung wechseln **polare** Vektoren ihr Vorzeichen:

$$(\pi^* \vec{E})(p) = -\vec{E}(\pi(p)) ,$$

axiale Vektoren hingegen tun dies nicht:

$$(\pi^* \vec{B})(p) = +\vec{B}(\pi(p)) .$$

Ganz zum Schluss kommt jetzt noch eine **Zusammenfassung** der Integralsätze der Vektoranalysis. Man sagt, dass k -Formen ω über die Operation der Integration mit k -dimensionalen Flächenstücken **gepaart** sind:



Es gilt der Allgemeine Stokes'sche Satz:

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega .$$

Im Vektorkalkül spaltet er sich in drei spezielle Sätze auf:

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} \text{grad} f \cdot d\ell &= \int_{\partial\gamma} f := f(b) - f(a) \quad (\partial\gamma = b - a) , \\
 \int_{\Sigma} \text{rot } \vec{E} \cdot ds &= \int_{\partial\Sigma} \vec{E} \cdot d\ell , \\
 \int_U \text{div } \vec{D} \, dx \, dy \, dz &= \int_{\partial U} \vec{D} \cdot ds .
 \end{aligned}$$

3 Einfaches zu Differenzialgleichungen

3.1 Potenzreihen

Für die zahlreichen Hörer dieser Vorlesung, die noch keinerlei Berührung mit Potenzreihen hatten, stellen wir hier einige grundlegende Aussagen zusammen. Da wir aber eigentlich eine andere Agenda verfolgen, müssen wir hier an der Oberfläche bleiben und für einen ordentlichen analytischen Aufbau auf die Mathematik-Vorlesung im kommenden Wintersemester verweisen.

Definition. Eine **Folge** $A_0, A_1, \dots, A_n, \dots$ reeller Zahlen heißt **konvergent** mit Grenzwert A (man sagt auch: die Folge konvergiert gegen A), wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n > N$ gilt: $|A_n - A| < \varepsilon$. Man verwendet dann die Schreibweise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A .$$

Definition. Eine Folge $A_0, A_1, \dots, A_n, \dots$ von (Partial-)Summen

$$A_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

heißt eine **Reihe**. Ist diese Folge konvergent mit Grenzwert A , so heißt auch die Reihe konvergent mit Grenzwert A , und man schreibt

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n =: \sum_{k=0}^{\infty} a_k .$$

3.1.1 Absolute Konvergenz und Konvergenzradius

Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt **absolut konvergent**, wenn die durch Betragnehmen aller Summanden entstehende Folge $B_0, B_1, \dots, B_n, \dots$ (also $B_n = \sum_{k=0}^n |a_k|$) konvergent ist.

Satz. Absolut konvergente Reihen dürfen gliedweise multipliziert werden; d.h. wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergente Reihen sind, dann gilt

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \quad \text{mit} \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

Definition. Eine **Potenzreihe** in der reellen Variablen x ist eine Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Bemerkung. Ob eine Potenzreihe konvergiert oder nicht, hängt im allgemeinen vom Wert der Variablen x ab.

Definition. Unter dem **Konvergenzradius** einer Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ versteht man die größte Zahl $R > 0$ mit der Eigenschaft, dass die Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < R$ konvergiert.

Satz. Jede Potenzreihe ist innerhalb ihres Konvergenzradius (also für $|x| < R$) absolut konvergent.

Satz. Absolut konvergente Potenzreihen dürfen gliedweise differenziert werden, d.h. es gilt

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Beispiel. Der natürliche **Logarithmus** $x \mapsto \ln(1+x)$ hat die Potenzreihe

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

Der Konvergenzradius dieser Reihe ist $R = 1$. Für $|x| < 1$ gilt

$$\frac{d}{dx} \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} = \frac{1}{1+x}$$

(alles bestens). Für $x = 1$ hingegen passiert Folgendes:

$$\ln 2 = \ln(1+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

ist konvergent, aber nicht absolut konvergent. Und tatsächlich würde gliedweises Differenzieren der Reihe für $x = 1$ zu einem Widerspruch führen:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1+x} \Big|_{x=1} = \frac{d}{dx} \ln(1+x) \Big|_{x=1} \stackrel{??}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

(sinnlos, konvergiert nicht). \square

Für die Praxis wichtige Potenzreihen sind

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Alle drei Reihen haben unendlich großen Konvergenzradius. Durch gliedweises Differenzieren verifiziert man sofort:

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x, \quad \frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x), \quad \frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x).$$

Als Anwendungsbeispiel für das Produkt zweier absolut konvergenter Reihen berechnen wir

$$e^x e^y = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^k \frac{x^l}{l!} \frac{y^{k-l}}{(k-l)!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!} = e^{x+y}.$$

3.1.2 Taylorreihe einer analytischen Funktion

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Reihe mit Konvergenzradius R . Dann wird durch

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

für $|x| < R$ eine (unendlich oft) differenzierbare Funktion $x \mapsto f(x)$ erklärt. Offensichtlich gilt $a_0 = f(0)$. Durch wiederholtes gliedweises Differenzieren folgt

$$f'(0) = a_1, \quad f''(0) = 2a_2, \quad \dots, \quad f^{(n)}(0) = \left(\frac{d^n}{dx^n} f \right) (0) = n! a_n, \quad \dots$$

Also haben wir

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!}.$$

Man nennt diese Reihe die **Taylorreihe** (bzgl. $x = 0$) der **analytischen** Funktion f .

3.2 Die komplexen Zahlen

3.2.1 Vektormultiplikation in \mathbb{R}^2

Sei der Vektorraum

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\}$$

erklärt durch die übliche Addition:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' \\ b + b' \end{pmatrix}$$

und Skalarmultiplikation

$$r \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r a \\ r b \end{pmatrix}.$$

Zusätzlich führen wir jetzt eine (kommutative) **Vektor-Multiplikation** $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a a' - b b' \\ a b' + b a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Diese Multiplikation hat ein Einselement:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

und zu jedem $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ existiert ein Inverses:

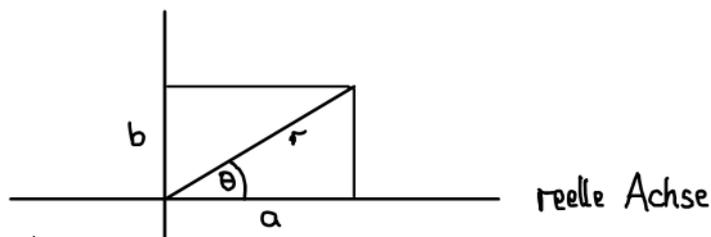
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^{-1} := \begin{pmatrix} (a^2 + b^2)^{-1} a \\ -(a^2 + b^2)^{-1} b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Eigenschaften machen \mathbb{R}^2 mit der erklärten Addition und Multiplikation zu einem sogenannten **Zahlenkörper**. Man nennt den ein-dimensionalen Unterraum $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ die **reelle Achse**, der komplementäre Unterraum $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ heißt die **imaginäre Achse**.

Die geometrische Interpretation der Vektoraddition ist uns schon bekannt und wird hier nicht wiederholt. Zur geometrischen Interpretation der Vektormultiplikation setzt man

$$a = r \cos \theta, \quad b = r \sin \theta, \quad \text{also} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}.$$

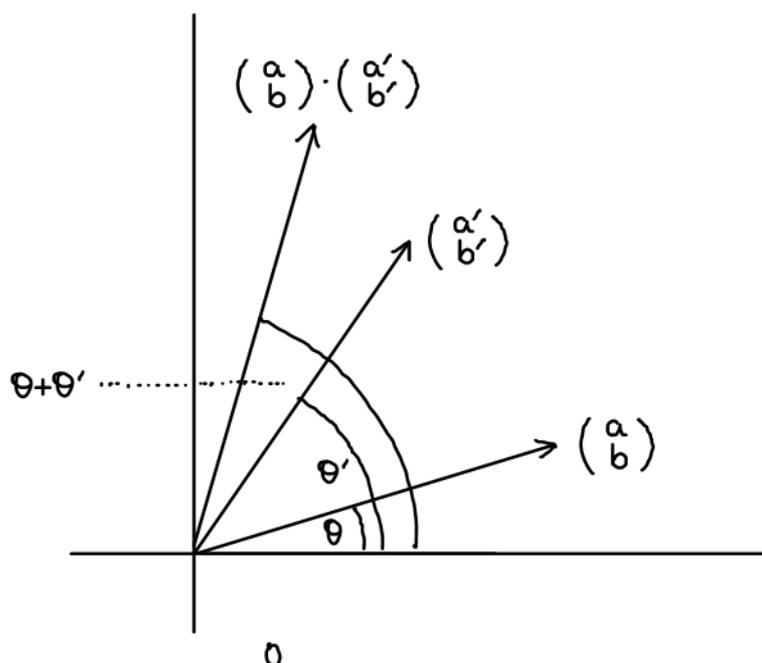
Offensichtlich ist $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ die **Länge** des Vektors $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ in dem mit der Euklidischen Norm ausgestatteten Vektorraum \mathbb{R}^2 , und $\theta = \arctan(b/a)$ ist der **Winkel** mit der reellen Achse:



Hiermit erhält man

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} &= r \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \cdot r' \begin{pmatrix} \cos \theta' \\ \sin \theta' \end{pmatrix} \\ &= rr' \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' \\ \sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta' \end{pmatrix} = rr' \begin{pmatrix} \cos(\theta + \theta') \\ \sin(\theta + \theta') \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Bei der Vektormultiplikation werden also die Längen der Vektoren multipliziert und die mit der reellen Achse gebildeten Winkel addiert:



Bemerkung. Die zwei Dreiecke mit den Eckpunkten $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ sind ähnlich. (Hier betrachten wir \mathbb{R}^2 als affinen Raum $o + \mathbb{R}^2$.) Tatsächlich erkennt man an der obigen Formel, dass es sich bei der Vektormultiplikation um eine **Drehstreckung** handelt. Eine wichtige Beobachtung ist

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(Im \mathbb{R}^2 mit der beschriebenen Vektormultiplikation gibt es also ein Element, dessen Quadrat minus Eins entspricht.)

3.2.2 Isomorphismus $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$

Mit der nun folgenden Änderung der Schreibweise vollziehen wir den Übergang $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto 1, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto i, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto a + ib \equiv a + bi.$$

\mathbb{C} heißt der **komplexe Zahlenkörper**, und die Elemente $a + ib$ von \mathbb{C} heißen komplexe Zahlen. Die spezielle komplexe Zahl i heißt die **imaginäre Einheit**. Ihr Inverses ist

$$i^{-1} \equiv \frac{1}{i} = -i.$$

In der neuen Schreibweise lautet die Addition

$$(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b'),$$

und die Multiplikation

$$(a + ib) \cdot (a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + ba').$$

Für eine komplexe Zahl $z = a + ib$ heißt $a =: \operatorname{Re}(z)$ der **Realteil** und $b =: \operatorname{Im}(z)$ der **Imaginärteil** von z . Die Operation der Spiegelung an der reellen Achse in \mathbb{R}^2 ,

$$\overline{\operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)} := \operatorname{Re}(z) - i\operatorname{Im}(z)$$

wird in \mathbb{C} als **komplexe Konjugation** bezeichnet. Man hat sofort

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}.$$

Falls gilt $z = \bar{z}$ (also $\operatorname{Im}(z) = 0$), so heißt z **reell** und man schreibt $z \in \mathbb{R}$. Falls gilt $z = -\bar{z}$ (also $\operatorname{Re}(z) = 0$), so heißt z **imaginär** und man schreibt $z \in i\mathbb{R}$. Weiter gilt

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

Die Euklidische Länge

$$|z| := \sqrt{\operatorname{Re}^2(z) + \operatorname{Im}^2(z)} = \sqrt{z\bar{z}}$$

des Vektors $\begin{pmatrix} \operatorname{Re}(z) \\ \operatorname{Im}(z) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ heißt der **Betrag** der komplexen Zahl $z = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)$. Das Inverse einer komplexen Zahl $z \neq 0$ ist

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\operatorname{Re}(z) - i\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}^2(z) + \operatorname{Im}^2(z)}.$$

Die Aussagen von Abschnitt 3.1 über Potenzreihen gelten unverändert im komplexen Fall. (Bei der Definition der absoluten Konvergenz von Reihen ersetzen wir natürlich den Betrag der reellen Zahl durch den Betrag der komplexen Zahl.)

3.2.3 Euler-Formel

Die komplexe Exponentialfunktion

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

genügt der Funktionalgleichung

$$e^{z+w} = e^z e^w .$$

Es gilt die **Eulerformel**:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) .$$

Sie folgt sofort aus den Potenzreihen für \exp , \cos und \sin :

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \theta^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \theta^{2n+1} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) .$$

Hierbei wurde verwendet, dass für gerades n gilt

$$i^n = (i^2)^{n/2} = (-1)^{n/2} ,$$

und für ungerades n

$$i^n = i \cdot i^{n-1} = i \cdot (i^2)^{(n-1)/2} = i \cdot (-1)^{(n-1)/2} .$$

3.2.4 Polardarstellung komplexer Zahlen

Unter $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ wird

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

zu

$$z = a + ib = r \cos \theta + i r \sin \theta = r (\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta} .$$

Nun ist

$$\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)} = \frac{r \sin \theta}{r \cos \theta} = \tan \theta .$$

Der Winkel

$$\theta = \arctan \left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)} \right) \equiv \arg(z)$$

$$\begin{array}{l} \operatorname{Re}(z) > 0 : \\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \end{array}$$

heißt das **Argument** der komplexen Zahl z . Die **Polardarstellung** einer komplexen Zahl ist dann

$$z = r e^{i\theta} = |z| e^{i \arg(z)} .$$

3.2.5 Fundamentalsatz der Algebra

Satz. Sei $z \mapsto p(z)$ ein Polynom n -ten Grades in der komplexen Variablen z , also

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 \quad (a_n \neq 0).$$

Dann hat die Gleichung $p(z) = 0$ für $z \in \mathbb{C}$ genau n Lösungen (Multiplizität mitgezählt).

Mitteilung. Der folgende Hinweis ist dem Hörerkreis dieser Vorlesung (noch) nicht verständlich, wir geben ihn aber trotzdem. Die Beweisidee besteht darin, das Integral der singulären 1-Form

$$\frac{p'(z)}{p(z)} dz$$

längs geschlossener Kurven γ zu betrachten. Für einen mit dem Gegenuhrzeigersinn orientierten Kreis γ mit Radius $|z| = R$ hat man

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} \frac{p'(z)}{p(z)} dz = n.$$

Hieraus folgert man, dass n Nullstellen vorliegen müssen.

3.3 Lineare Differenzialgleichungen

3.3.1 Struktur des Lösungsraums

Wir betrachten im Folgenden Differenzialgleichungen für Funktionen einer reellen Veränderlichen:

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto y(x) \in \mathbb{R}.$$

In diesem Kontext ist eine **lineare Differenzialgleichung (DGL) n -ter Ordnung** eine Gleichung der Form

$$a_n(x) \frac{d^n}{dx^n} y(x) + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} y(x) + \dots + a_2(x) \frac{d^2}{dx^2} y(x) + a_1(x) \frac{d}{dx} y(x) + a_0(x) y(x) = f(x).$$

Wir schreiben abkürzend $\mathcal{L} := \sum_{k=0}^n a_k(x) \frac{d^k}{dx^k}$. Ein solches Objekt \mathcal{L} nennt man einen Differenzialoperator n -ter Ordnung. Die DGL lautet jetzt kurz $\mathcal{L}y = f$. Die Funktion f heißt die

Inhomogenität der DGL. Der Differenzialoperator \mathcal{L} ist linear, d.h.

$$\mathcal{L}(y_1 + y_2) = \mathcal{L}y_1 + \mathcal{L}y_2.$$

Offenbar gilt:

- 1) $(\mathcal{L}y_1 = 0 \text{ und } \mathcal{L}y_2 = 0) \Rightarrow \mathcal{L}(y_1 + y_2) = 0.$
- 2) $(\mathcal{L}y_1 = 0, r \in \mathbb{R}) \Rightarrow \mathcal{L}(ry_1) = 0.$

Also sind mit y_1 und y_2 auch $(y_1 + y_2)(x) := y_1(x) + y_2(x)$ und $(ry_1)(x) := ry_1(x)$ Lösungen der homogenen Gleichung $\mathcal{L}y = 0$.

Merke: Der Lösungsraum der (homogenen) DGL $\mathcal{L}y = 0$ (also mit $f = 0$) hat die Struktur eines Vektorraumes. \square

Hingegen hat der Lösungsraum der inhomogenen DGL $\mathcal{L}y = f$ die Struktur eines **affinen Raumes** (mit Differenzvektorraum gleich dem Lösungsraum der homogenen DGL), denn aus $\mathcal{L}y_1 = f$ und $\mathcal{L}y_2 = f$ folgt $\mathcal{L}(y_2 - y_1) = 0$.

Merke: Jede (beliebige) Lösung der inhomogenen DGL $\mathcal{L}y = f$ lässt sich darstellen als eine spezielle Lösung y_1 dieser Gleichung plus eine Lösung der homogenen DGL.

Beweis. Sei y_1 eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL $\mathcal{L}y_1 = f$. Eine beliebige andere Lösung y lässt sich ausdrücken als $y = y_1 + (y - y_1)$, und, wie wir wissen, ist $y - y_1$ Lösung der homogenen DGL.

3.3.2 Homogene lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Wir behandeln die Gleichung

$$a y''(x) + b y'(x) + c y(x) = 0 \quad (a, b, c \in \mathbb{R}).$$

Einsetzen des Ansatzes $y(x) = e^{\lambda x}$ ergibt

$$a \lambda^2 e^{\lambda x} + b \lambda e^{\lambda x} + c e^{\lambda x} = 0.$$

Wegen $e^{\lambda x} \neq 0$ folgt

$$a \lambda^2 + b \lambda + c = 0$$

und somit

$$a \left(\lambda + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2}{4a} - c,$$

also

$$\lambda = \frac{1}{2a} \left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \right).$$

Fallunterscheidung:

(i) $b^2 - 4ac > 0$.

In diesem Fall hat die quadratische Gleichung für λ zwei verschiedene reelle Lösungen:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2a} (b + \sqrt{b^2 - 4ac}), \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2a} (b - \sqrt{b^2 - 4ac}).$$

Die allgemeine Lösung der DGL lautet

$$y(x) = A_1 e^{\lambda_1 x} + A_2 e^{\lambda_2 x}, \quad (A_1, A_2 \in \mathbb{R}).$$

Der Vektorraum von Lösungen ist hier also zweidimensional. Die Lösungen sind entweder exponentiell anwachsend oder exponentiell abfallend.

(ii) $b^2 - 4ac = 0$.

Hier ist $\lambda_1 = \lambda_2 = -b/2a =: \lambda$.

Jetzt sind $e^{\lambda_1 x}$ und $e^{\lambda_2 x}$ linear abhängig. Wir haben also nur eine Lösung $y(x) = A e^{\lambda x}$ mit konstantem Koeffizienten. Wo steckt die zweite Lösung? (Die Dimension des Lösungsraums sollte eine stetige Funktion der Parameter sein.) Dazu beobachtet man, dass für $\lambda_1 \neq \lambda_2$ die Funktion

$$x \mapsto \frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

eine Lösung ist. Im Limes $\lambda_1 \rightarrow \lambda_2 =: \lambda$ ergibt sich

$$\lim_{\lambda_1 \rightarrow \lambda_2 = \lambda} \frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}}{\lambda_1 - \lambda_2} = x e^{\lambda x}.$$

Der Lösungsraum ist also wieder zweidimensional:

$$y(x) = A e^{\lambda x} + B x e^{\lambda x} = (A + Bx) e^{\lambda x}.$$

(iii) $b^2 - 4ac < 0$.

In diesem Fall hat die quadratische Gleichung für λ zwei komplexe Wurzeln:

$$\lambda_{\pm} = -\frac{b}{2a} \pm ik, \quad k = \frac{1}{2a} \sqrt{4ac - b^2}.$$

Die allgemeine Lösung der DGL ist

$$y(x) = e^{-bx/(2a)} (A_+ e^{ikx} + A_- e^{-ikx}).$$

Sie ist reellwertig für $A_- = \overline{A_+}$. Mit der Polardarstellung $A_+ = R e^{i\phi}$ erhält man

$$y(x) = e^{-bx/(2a)} R (e^{ikx+i\phi} + e^{-ikx-i\phi}) = e^{-bx/(2a)} 2R \cos(kx + \phi).$$

Im Spezialfall $b = 0$ (physikalische Bedeutung: keine Reibung) bekommen wir eine harmonische Schwingung

$$y(x) = \tilde{R} \cos(kx + \phi), \quad k = \sqrt{c/a}.$$

3.3.3 Erzwungene Schwingung

Wir betrachten jetzt die **inhomogene DGL**

$$y''(x) + k^2 y(x) = f(x) \quad (\text{getriebener harmonischer Oszillator}).$$

Sie ist von der Form $\mathcal{L}y = f$ mit $\mathcal{L} = \frac{d^2}{dx^2} + k^2$. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $\mathcal{L}y = 0$ ist (siehe oben)

$$y(x) = R \cos(kx + \phi) = A \cos(kx) + B \sin(kx).$$

Gemäß Abschnitt 3.3.1 reicht es, wenn wir eine spezielle Lösung finden.

Lösung mittels "Greenfunktion" (ausführliche Theorie später; Philosophie: $y \stackrel{!}{=} \mathcal{L}^{-1}f$). Mit

$$G(x, x') = \begin{cases} k^{-1} \sin(kx - kx') & \text{für } x \geq x', \\ 0 & \text{für } x \leq x', \end{cases}$$

setze

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_{\mathbb{R}} G(x, x') f(x') dx' \\ &= \frac{1}{k} \sin(kx) \int_{-\infty}^x \cos(kx') f(x') dx' - \frac{1}{k} \cos(kx) \int_{-\infty}^x \sin(kx') f(x') dx'. \end{aligned}$$

Nachweis der Lösungseigenschaft. Wir beginnen mit

$$y'(x) = \cos(kx) \int_{-\infty}^x \cos(kx') f(x') dx' + \sin(kx) \int_{-\infty}^x \sin(kx') f(x') dx'.$$

Es folgt

$$y''(x) = -k^2 y(x) + \cos^2(kx) f(x) + \sin^2(kx) f(x) = -k^2 y(x) + f(x).$$

Also gilt $y'' + k^2 y = f$ wie verlangt. Die allgemeine Lösung der DGL $\mathcal{L}y = f$ ist

$$y(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx) + \int_{\mathbb{R}} G(x, x') f(x') dx'.$$

3.3.4 Allgemeine lineare DGL 1. Ordnung

Wir behandeln jetzt die Differentialgleichung

$$y'(x) = a(x) y(x)$$

mit variablem Koeffizienten $a(x)$, also $\mathcal{L}y = 0$ mit dem Differenzialoperator $\mathcal{L} = \frac{d}{dx} - a(x)$. Nach Division durch $y(x)$ haben wir

$$a(x) = \frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{d}{dx} \ln y(x).$$

Per Integration folgt

$$\int_{x_0}^x a(t) dt = \int_{x_0}^x \frac{d}{dt} \ln y(t) dt = \ln y(t) \Big|_{t=x_0}^{t=x} = \ln y(x) - \ln y(x_0) = \ln \frac{y(x)}{y(x_0)}.$$

Demnach gilt

$$\exp\left(\int_{x_0}^x a(t) dt\right) = \frac{y(x)}{y(x_0)}$$

oder

$$y(x) = y(x_0) \exp\left(\int_{x_0}^x a(t) dt\right).$$

(Der Lösungsraum ist hier eindimensional; er wird durch die Konstante $y_0 \equiv y(x_0)$ parametrisiert.)

3.3.5 Variation der Konstanten

Wir wenden uns jetzt der **inhomogenen** Gleichung $\mathcal{L}y = b$ zu; also

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x).$$

Diese löst man durch **“Variation der Konstanten”**, d.h. mittels des Ansatzes

$$y(x) = c(x)e^{A(x)}, \quad A(x) = \int_{x_0}^x a(t) dt.$$

Einmal Differenzieren ergibt

$$y' = c'e^A + cA'e^A = (c' + ca)e^A \quad \text{oder} \quad y' - ay = c'e^A.$$

Es folgt $c'e^A = b$ oder $c' = e^{-A}b$. Die allgemeine Lösung lautet

$$y(x) = y_0 e^{A(x)} + \int_{x_0}^x e^{A(x)-A(t)} b(t) dt.$$

Wir weisen auf die strukturelle Ähnlichkeit zur Lösung der DGL von Abschnitt 3.3.3 hin:

$$y(x) = h(x) + \int_{\mathbb{R}} G(x, t) b(t) dt$$

mit $h(x)$ = Lösung der homogenen Gleichung und der sogenannten **Greenfunktion**

$$G(x, t) = \begin{cases} e^{A(x)-A(t)} & x > t, \\ 0 & x < t. \end{cases}$$

3.3.6 Homogene lineare DGL 2. Ordnung: Wronski-Determinante

In Abschnitt 3.3.3 hatten wir für den Fall des harmonischen Oszillators eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung $\mathcal{L}y = f$ angegeben, ohne allerdings die Form der Lösung zu motivieren oder in einen größeren Kontext zu stellen. Als **Nachtrag** wollen wir dieses Defizit im nächsten Abschnitt ausbügeln. Hier sind wir noch mit Vorbereitungen beschäftigt.

Wir betrachten die allgemeine homogene Differenzialgleichung 2. Ordnung mit variablen Koeffizienten:

$$\mathcal{L}y = 0, \quad \mathcal{L} = \frac{d^2}{dx^2} + a(x)\frac{d}{dx} + b(x).$$

(Ohne großen Verlust an Allgemeinheit haben wir den Koeffizienten der zweiten Ableitung konstant gleich Eins gesetzt.)

Definition. Unter der **Wronski-Determinante** zweier Lösungen y_1, y_2 der homogenen Gleichung $\mathcal{L}y = 0$ versteht man die Funktion

$$W(x) := y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x). \quad \square$$

Kurze Rechnung ergibt folgende Differenzialgleichung für die Wronski-Determinante:

$$W' = y_1 y_2'' - y_2 y_1'' = -y_1 (ay_2' + by_2) + y_2 (ay_1' + by_1) = -aW.$$

Die Lösung hiervon lautet

$$W(x) = W(0) \exp\left(\int_0^x a(t) dt\right).$$

Es folgt, dass $W(x)$ entweder für keinen Wert oder für alle Werte von x verschwindet.

Mitteilung. Die stationäre **Schrödinger-Gleichung** der Quantenmechanik (für die Bewegung eines Teilchens der Masse m und Energie E auf einer Achse mit Koordinate x und Potenzialfunktion $V(x)$) lautet $\mathcal{L}\psi = 0$, wobei

$$\mathcal{L} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x)).$$

(\hbar ist die Plancksche Konstante.) Diese eindimensionale Schrödinger-Gleichung ist also der Spezialfall der hier betrachteten Differenzialgleichung für $a(x) \equiv 0$ und $b(x) = 2m(E - V(x))/\hbar^2$. In diesem Fall hat die skalierte Wronski-Determinante $\frac{\hbar}{m}(y_1 y_2' - y_2 y_1')$ die physikalische Bedeutung des (erhaltenen) **Wahrscheinlichkeitsstromes** im quantenmechanischen Zustand mit komplexwertiger Wellenfunktion $\psi = \operatorname{Re}(\psi) + i \operatorname{Im}(\psi) = y_1 + i y_2$.

Satz. Ist die Wronski-Determinante zweier Lösungen y_1, y_2 von $\mathcal{L}y = 0$ ungleich Null, so sind y_1 und y_2 linear unabhängig, d.h. es existiert kein vom Nullpaar verschiedenes Zahlenpaar c_1, c_2 mit der Eigenschaft $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0$ (Nullfunktion).

Beweis. Sei $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0$ mit $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$. Differenzieren dieser Gleichung liefert

$$c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) = 0.$$

Durch geschicktes Multiplizieren und Addieren von Gleichungen (oder, eleganter, durch einen Satz der linearen Algebra, den wir im nächsten Kapitel kennenlernen werden) folgt

$$W = y_1 y_2' - y_2 y_1' = 0.$$

Die lineare Abhängigkeit von y_1 und y_2 impliziert also $W = 0$. Dieser Schluss ist logisch äquivalent zur Implikation ($W \neq 0 \implies y_1, y_2$ linear unabhängig). \square

Definition. Wenn die Wronski-Determinante zweier Lösungen y_1, y_2 von $\mathcal{L}y = 0$ nicht verschwindet, dann heißt das Paar y_1, y_2 ein **Fundamentalsystem** der DGL.

Satz. Ist y_1, y_2 ein Fundamentalsystem der DGL $\mathcal{L}y = 0$, so lässt sich jede Lösung y derselben als Linearkombination von y_1 und y_2 darstellen.

Beweis. Für eine Lösung y von $\mathcal{L}y = 0$ definieren wir zwei Funktionen $x \mapsto c_j(x)$ ($j = 1, 2$) durch

$$c_j(x) := \frac{y(x) y_j'(x) - y_j(x) y'(x)}{W(x)}.$$

Durch Differenzieren von $x \mapsto c_j(x) W(x)$ erhalten wir

$$c_j' W + c_j W' = y y_j'' - y_j y'' = -a(y y_j' - y_j y') = -a W c_j.$$

Mit $W' = -aW$ folgt $c_j' W = 0$ und somit $c_j(x) \equiv c_j$ (unabhängig von x).

Jetzt multiplizieren wir die Gleichung $c_j W = y y'_j - y_j y'$ für $j = 1$ mit y_2 und dieselbe Gleichung für $j = 2$ mit y_1 und bilden die Differenz. So entsteht

$$(c_1 y_2 - c_2 y_1) W = (y y'_1 - y_1 y') y_2 - (y y'_2 - y_2 y') y_1 = -y W .$$

Es folgt $y(x) = c_2 y_1(x) - c_1 y_2(x)$ mit konstanten Koeffizienten c_1, c_2 , wie behauptet.

3.3.7 Greenfunktion der linearen DGL 2. Ordnung

Wir betrachten nun die inhomogene Differenzialgleichung 2. Ordnung mit variablen Koeffizienten:

$$\mathcal{L} y = f , \quad \mathcal{L} = \frac{d^2}{dx^2} + a(x) \frac{d}{dx} + b(x) .$$

Definition. Sei y_1, y_2 ein Fundamentalsystem der homogenen Differenzialgleichung $\mathcal{L} y = 0$ und $W = y_1 \frac{d}{dx} y_2 - y_2 \frac{d}{dx} y_1$ die zugehörige Wronski-Determinante. Unter der **Greenfunktion** der DGL versteht man

$$G(x, x') = \frac{1}{W(x')} \begin{cases} y_2(x) y_1(x') - y_1(x) y_2(x') & x \geq x' , \\ 0 & x \leq x' . \end{cases}$$

Mitteilung. Ohne Mühe zeigt man, dass diese Greenfunktion von der Wahl des Fundamentalsystems unabhängig ist.

Satz. Das Integral

$$y(x) := \int_{\mathbb{R}} G(x, x') f(x') dx'$$

ist eine spezielle Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung $\mathcal{L} y = f$.

Beweis. Ausgehend von

$$y(x) = y_2(x) \int_{-\infty}^x \frac{y_1(x')}{W(x')} f(x') dx' - y_1(x) \int_{-\infty}^x \frac{y_2(x')}{W(x')} f(x') dx'$$

prüfen wir die Lösungseigenschaft nach. Für die erste Ableitung y' erhalten wir

$$\frac{dy}{dx}(x) = \frac{dy_2}{dx}(x) \int_{-\infty}^x \frac{y_1(x')}{W(x')} f(x') dx' - \frac{dy_1}{dx}(x) \int_{-\infty}^x \frac{y_2(x')}{W(x')} f(x') dx' ,$$

für die zweite Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2}(x) &= \frac{d^2 y_2}{dx^2}(x) \int_{-\infty}^x \frac{y_1(x')}{W(x')} f(x') dx' - \frac{d^2 y_1}{dx^2}(x) \int_{-\infty}^x \frac{y_2(x')}{W(x')} f(x') dx' \\ &\quad + \frac{1}{W(x)} \left(y_1(x) \frac{dy_2}{dx}(x) - y_2(x) \frac{dy_1}{dx}(x) \right) f(x) . \end{aligned}$$

Durch Multiplikation mit den Koeffizienten von \mathcal{L} und Aufsummieren von Gleichungen folgt

$$(\mathcal{L} y)(x) = (\mathcal{L} y_1)(x) \int_{-\infty}^x \frac{y_1(x')}{W(x')} f(x') dx' - (\mathcal{L} y_2)(x) \int_{-\infty}^x \frac{y_2(x')}{W(x')} f(x') dx' + f(x) ,$$

mit $\mathcal{L} y_1 = \mathcal{L} y_2 = 0$ also $\mathcal{L} y = f$ wie behauptet.

Beispiel. Wir betrachten den Spezialfall **(harmonischer Oszillator)** von Abschnitt 3.3.3, nämlich

$$\mathcal{L} = \frac{d^2}{dx^2} + k^2 \quad (k \in \mathbb{R}) .$$

Die Lösungen $y_1(x) = \cos(kx)$ und $y_2(x) = \sin(kx)$ von $\mathcal{L} y = 0$ bilden ein Fundamentalsystem mit konstanter Wronski-Determinante $W(x) = k$. Man erhält dann die in Abschnitt 3.3.3 angegebene Greenfunktion sofort nach obiger Vorschrift.

3.4 Differenzialgleichung mit getrennten Variablen

Wir verlassen das Thema der linearen Differenzialgleichungen und wenden uns einem Typ von nichtlinearer Differenzialgleichung zu:

$$y'(x) = f(x)g(y).$$

Üblicherweise geht man hier per **“Eselbrücke”** vor. Man schreibt $y' = \frac{dy}{dx}$ und verfährt hiermit so, als wäre $\frac{dy}{dx}$ ein Bruch von Zahlen dx und dy : Die Gleichung $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ multipliziert mit $\frac{dx}{g(y)}$ ergibt $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$. (Der Sinn dieser Gleichung bleibt leider im Dunkeln, solange Differenzialformen unbekannt sind.) Mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ gibt Integration

$$G(y(x)) := \int_{y_0}^{y(x)} \frac{ds}{g(s)} = \int_{x_0}^x f(t) dt =: F(x).$$

Diese Gleichung macht wieder für jedermann Sinn, auch ohne Differenzialformen: sie bestimmt y (unter geeigneten Voraussetzungen) als Funktion von x durch Auflösen von $G(y(x)) = F(x)$.

Beispiel 1. Wir betrachten die Newton'sche Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} = -V'(x).$$

Der hieraus resultierende **Energiesatz**

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 + V(x) \right)$$

liefert

$$\frac{m}{2} \dot{x}^2 + V(x) = E = \text{const.}$$

Auflösen nach der Geschwindigkeit ergibt

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}.$$

Das ist eine DGL mit **getrennten Variablen**, wobei

$$y \leftrightarrow x \quad \text{und} \quad x \leftrightarrow t.$$

Sei nun $\dot{x} = +\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))} > 0$. Dann gilt per Eselsbrücke

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))} \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} = dt \\ &\Rightarrow \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x'))}} = \int_{t_0}^t dt' = t - t_0 \quad (\text{mit } x_0 = x(t_0)). \end{aligned}$$

Beispiel 2. Harmonischer Oszillator: $V(x) = m\omega^2 x^2/2$. Es ist $2E = mv_{\max}^2$ und $v_{\max} = \omega x_{\max}$.

Sei nun $t_0 = 0$ und $x_0 = 0$. Dann ergibt sich

$$t = \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{v_{\max}^2 - \omega^2 x'^2}} \stackrel{x'=\xi x_{\max}}{=} \frac{1}{\omega} \int_0^{x/x_{\max}} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}.$$

Nun gilt $(1 - \xi^2)^{-1/2} d\xi = d(\arcsin \xi)$.

Beweis. Zur Erinnerung: $(g \circ f)(x) = x \Rightarrow g'(f(x))f'(x) = 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))}$. Setze nun $g = \sin$, $f = \arcsin$ (Umkehrfunktion des Sinus). Es folgt $g' = \cos = \sqrt{1 - \sin^2}$ und somit $g'(f(x)) = \sqrt{1 - x^2}$, woraus sich schließlich

$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

ergibt. \square

Nun weiter im Beispiel 2:

$$\omega t = \int_0^{x/x_{\max}} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} = \arcsin(\xi) \Bigg|_{\xi=0}^{\xi=x/x_{\max}} = \arcsin(x/x_{\max}) ,$$

also $x(t) = x_{\max} \sin(\omega t)$.

3.4.1 Zurückziehen von Formen

Definition (Zurückziehen einer Funktion). Gegeben sei eine Funktion $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ und eine Abbildung $\psi : M \rightarrow N$. Dann definiert man mittels ψ eine Funktion $\psi^* f : M \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$(\psi^* f)(p) := f(\psi(p)) .$$

Man nennt diese Operation $f \mapsto \psi^* f$ das **Zurückziehen** der Funktion f von N nach M (mittels der Abbildung $\psi : M \rightarrow N$).

Definition. In ähnlicher Weise definiert man die Operation des Zurückziehens von Differenzialformen. Sei β eine 1-Form auf N , und sei die Abbildung $\psi : M \rightarrow N$ jetzt differenzierbar. Dann erklärt man die 1-Form $\psi^* \beta$ auf M durch

$$(\psi^* \beta)_p(v) := \beta_{\psi(p)}((D_p \psi)(v)) .$$

Hierbei ist $D_p \psi$ das Differenzial der Abbildung $\psi : M \rightarrow N$ im Punkt p . Analog definiert man den Rückzug $\psi^* \omega$ einer k -Form ω ($k > 1$) durch

$$(\psi^* \omega)_p(v_1, \dots, v_k) := \omega_{\psi(p)}((D_p \psi)(v_1), \dots, (D_p \psi)(v_k)) .$$

Satz (Transformationsatz, Substitutionsregel): Es sei ω eine k -Form auf N , c eine k -dimensionale Fläche in M und $\psi : M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung. Dann gilt

$$\int_{\psi(c)} \omega = \int_c \psi^* \omega .$$

Bemerkung. Für den Spezialfall $M = N = \mathbb{R}$, $c = [a, b]$ und $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsend erhält man die bekannte **Substitutionsregel**:

$$\int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\psi(x)) \psi'(x) dx .$$

Hierzu setzen wir $\omega = f dx$. Dann ist

$$\int_{\psi(c)}^{\psi(b)} \omega = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(x) dx$$

und die Berechnung von $\psi^*\omega$ ergibt

$$(\psi^*\omega)_p(1) = \psi^*(f dx)_p(1) = f(\psi(p))(dx)_{\psi(p)}(\psi'(p) \cdot 1) = f(\psi(p))\psi'(p) dx(1),$$

also

$$\int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(x) dx = \int_{\psi(c)}^{\psi(b)} \omega \stackrel{\text{Satz}}{=} \int_c \psi^*\omega = \int_a^b f(\psi(x))\psi'(x) dx.$$

3.4.2 Begründung der Eselsbrücke von Abschnitt 3.4

Satz: Die Operationen der äußeren Ableitung und des Zurückziehens von Formen vertauschen. Insbesondere gilt für eine Funktion f und eine differenzierbare Abbildung ψ die Gleichheit

$$\psi^*(df) = d(\psi^*f).$$

Beweis. Wir verifizieren die Aussage für den Fall von Funktionen. Auswertung der linken Seite auf einem Vektor v im Punkt p ergibt (gemäß der Definition der Operation des Zurückziehens der 1-Form df mittels ψ):

$$(\psi^*(df))_p(v) = (df)_{\psi(p)}((D_p\psi)(v)).$$

Auf der rechten Seite erhalten wir unter Verwendung der Kettenregel der Differenzialrechnung

$$(d(\psi^*f))_p(v) = (d(f \circ \psi))_p(v) = ((df)_{\psi(p)} \circ (D_p\psi))(v).$$

Das ist wegen der Assoziativität der Hineinanderausführung von Abbildungen das gleiche Ergebnis wie auf der linken Seite. \square

Nach dieser Vorbereitung wenden wir uns der Begründung der **Eselsbrücke** zu. Die Differenzialgleichung $y' = f(x)g(y)$ bedeutet im Klartext, dass wir eine (Lösungs-)Funktion $x \mapsto \psi(x)$ mit der Eigenschaft $\psi'(x) = f(x)g(\psi(x))$ suchen. Äquivalent hierzu (für $g(\psi(x)) \neq 0$) ist

$$\frac{\psi'(x)}{g(\psi(x))} = f(x).$$

Zur Lösung dieser Gleichung betrachten wir auf $N = \mathbb{R}$ die 1-Form $\beta = \frac{dy}{g(y)}$ und auf $M = \mathbb{R}$ die 1-Form $\alpha = f(x) dx$. Wir suchen eine Abbildung $\psi : M \rightarrow N$ mit der Eigenschaft $\psi^*\beta = \alpha$. Wegen $\psi^*\beta = (1/(g \circ \psi)) d\psi$ löst eine solche Abbildung ψ unsere Gleichung.

Nun sei $\alpha = dF$ und $\beta = dG$, also $F' = f$ und $G' = 1/g$. Dann folgt

$$d(\psi^*G) = \psi^*(dG) = \psi^*\beta = \alpha = dF.$$

Nach Integration von $d(\psi^*G) = dF$ haben wir

$$G \circ \psi = \psi^*G = F + c_0$$

mit einer Integrationskonstanten $c_0 \in \mathbb{R}$. Falls G die Umkehrfunktion G^{-1} hat, folgt $\psi = G^{-1} \circ (F + c_0)$. Das ist die behauptete Lösung für $y = \psi(x)$ in der durch Eselsbrücke erhaltenen Form.

Zum Abschluss **verifizieren** wir die erhaltene Regel ohne Verwendung des Zurückziehens von Differenzialformen. Dazu differenzieren wir $\psi(x) = G^{-1}(F(x) + c_0)$ mit der Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion und erhalten

$$\psi'(x) = \frac{F'(x)}{G' \circ G^{-1}(F(x) + c_0)} = f(x) g(\psi(x)).$$

ψ erfüllt also wie verlangt die Differentialgleichung $\psi'(x) = f(x) g(\psi(x))$.

4 Lineare Algebra

4.1 Lineare Abbildungen

In diesem Abschnitt bezeichnen V und W immer Vektorräume über \mathbb{R} . (Da das Arbeiten mit den komplexen Zahlen für den Studienanfänger noch ungewohnt ist, beschränken wir uns hier auf den Fall reeller Vektorräume. Die Erweiterung auf komplexe Vektorräume bereitet keine Schwierigkeiten.)

Definition (Erinnerung). Eine Abbildung $L : V \rightarrow W$ heißt **linear**, falls gilt

$$L(v + v') = L(v) + L(v') \quad \text{und} \quad L(cv) = c \cdot L(v)$$

für alle $c \in \mathbb{R}$ und $v, v' \in V$. Im Fall einer linearen Abbildung L schreiben wir oft $Lv \equiv L(v)$.

Es folgen einige **Beispiele** linearer Abbildungen.

- Skalare Multiplikation $v \mapsto cv$ mit $c \in \mathbb{R}$ und $v \in V$.
- Linearform $\lambda : V \rightarrow \mathbb{R}$.
- Differenzieren:
 - a) $y \mapsto y'$, wobei y eine differenzierbare Funktion $x \mapsto y(x)$ ist.
 - b) Allgemeiner ist $\mathcal{L} = \sum_{k=0}^n a_k(x) \frac{d^k}{dx^k}$ eine lineare Abbildung auf dem Raum der differenzierbaren Funktionen einer Variablen x .
 - c) Äußere Ableitung $d : k\text{-Formen} \rightarrow (k+1)\text{-Formen}$, $\omega \mapsto d\omega$.
 - d) Sei $f : X \rightarrow Y$ eine differenzierbare Abbildung zwischen normierten affinen Räumen $(X, V, \|\cdot\|)$ und $(Y, W, \|\cdot\|)$. Für jeden Punkt $p \in X$ ist dann das Differential $D_p f : V \rightarrow W$, $v \mapsto (D_p f)(v)$ eine lineare Abbildung.
- Integrieren: $\omega \mapsto \int_c \omega$, wobei ω eine k -Form und c ein geeignetes Integrationsgebiet ist. Hier sind **zwei Sichtweisen** möglich. (i) Für fest gewähltes c ist das Integral $\omega \mapsto \int_c \omega$ eine lineare Abbildung vom Vektorraum der k -Formen in die reellen Zahlen. (ii) Für fest gewähltes ω ist $c \mapsto \int_c \omega$ eine lineare Abbildung vom Vektorraum der k -dimensionalen

Integrationsgebiete (mathematisch gesprochen: dem Vektorraum der k -Ketten mit reellen Koeffizienten) in die reellen Zahlen.

Fakt (Erinnerung). Die Menge der linearen Abbildungen $\text{Hom}(V, W)$ von V nach W ist ein Vektorraum. Dabei wird die Addition von $K, L \in \text{Hom}(V, W)$ durch $(K + L)(v) := K(v) + L(v)$ erklärt, die Skalarmultiplikation mit $c \in \mathbb{R}$ durch $(c \cdot L)(v) := cL(v)$.

Verifikation. Wir überprüfen z.B., dass die Summe $K + L$ wieder eine lineare Abbildung ist:

$$\begin{aligned} (K + L)(a_1v_1 + a_2v_2) &= K(a_1v_1 + a_2v_2) + L(a_1v_1 + a_2v_2) \\ &= a_1K(v_1) + a_2K(v_2) + a_1L(v_1) + a_2L(v_2) = a_1(K + L)(v_1) + a_2(K + L)(v_2) . \end{aligned}$$

Ebenso überprüft man, dass mit L auch $c \cdot L$ eine lineare Abbildung ist.

4.1.1 Kern und Bild einer linearen Abbildung

Definition. Der **Kern** einer linearen Abbildung $L : V \rightarrow W$ ist definiert durch

$$\ker(L) := \{v \in V \mid Lv = 0\} .$$

Beispiel 1. Für eine Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ von V und die zugehörige Dualbasis $\{\vartheta_1, \dots, \vartheta_n\}$ von V^* gilt

$$\ker(\vartheta_1) = \text{span}_{\mathbb{R}}\{e_2, \dots, e_n\} := \{a_2e_2 + \dots + a_n e_n \mid a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}\} .$$

Beispiel 2. Der Kern $\ker(\mathcal{L})$ eines linearen Differenzialoperators \mathcal{L} ist der Lösungsraum der homogenen Differenzialgleichung $\mathcal{L}y = 0$.

Fakt. Der Kern einer linearen Abbildung $L : V \rightarrow W$ ist ein Vektorraum, denn aus

$$L(a_1v_1 + a_2v_2) = a_1L(v_1) + a_2L(v_2) \quad (a_1, a_2 \in \mathbb{R}, v_1, v_2 \in V)$$

folgt, dass mit v_1, v_2 auch jede Linearkombination $a_1v_1 + a_2v_2$ in $\ker(L)$ liegt.

Definition. Das **Bild** einer linearen Abbildung $L : V \rightarrow W$ ist definiert durch

$$\text{im}(L) = \{w \in W \mid \exists v \in V : Lv = w\} .$$

Fakt. Das Bild $\text{im}(L)$ ist ein Vektorraum, denn mit der Linearität von L folgt aus $w_1 = Lv_1 \in \text{im}(L)$ und $w_2 = Lv_2 \in \text{im}(L)$, dass auch jede Linearkombination $b_1w_1 + b_2w_2$ ($b_1, b_2 \in \mathbb{R}$) in $\text{im}(L)$ liegt:

$$b_1w_1 + b_2w_2 = b_1L(v_1) + b_2L(v_2) = L(b_1v_1 + b_2v_2) .$$

Definition. Die Dimension des Bildes,

$$\dim \text{im}(L) =: \text{rk}(L) ,$$

heißt der **Rang** der linearen Abbildung L .

Beispiel 1. Für jede Linearform $0 \neq \lambda \in V^*$ ist $\text{im}(\lambda) = \mathbb{R}$.

Beispiel 2. Für eine Menge $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ von Linearformen in V und eine Menge $\{w_1, \dots, w_n\}$ von Vektoren in W erklären wir die lineare Abbildung $L : V \rightarrow W$ durch

$$L(v) := w_1 \lambda_1(v) + \dots + w_n \lambda_n(v).$$

Falls beide Mengen $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ und $\{w_1, \dots, w_n\}$ linear unabhängig sind, gilt

$$\text{im}(L) = \text{span}_{\mathbb{R}}\{w_1, \dots, w_n\}, \quad \text{rk}(L) = n.$$

Mitteilung. Im allgemeinen Fall der linearen Abbildung L von Beispiel 2 gilt

$$\text{rk}(L) = \min\left\{\dim \text{span}_{\mathbb{R}}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}, \dim \text{span}_{\mathbb{R}}\{w_1, \dots, w_n\}\right\}.$$

4.1.2 Transponierte einer linearen Abbildung

Nun seien $L : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung und $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ eine lineare Funktion. Die Hintereinanderausführung dieser zwei Abbildungen liefert die lineare Abbildung

$$f \circ L : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto f(Lv).$$

Gemäß der Definition des Dualraums ist $f \in W^*$ und $f \circ L \in V^*$.

Definition. Die **transponierte** Abbildung L^t zu $L : V \rightarrow W$ ist definiert durch

$$L^t : W^* \rightarrow V^*, \quad f \mapsto L^t f := f \circ L.$$

Bemerkung. Diese Definition ist insofern universell, als sie außer der Struktur von Vektorraum und Dualraum nichts benutzt. In diagrammatischer Sprache schreiben wir

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{L} & W \\ V^* & \xleftarrow{L^t} & W^* \end{array}.$$

Für den Spezialfall einer linearen Abbildung $L : V \rightarrow V^*$ (also $W = V^*$) ist wegen $(V^*)^* = V$ die Transponierte $L^t : V \rightarrow V^*$ eine lineare Abbildung zwischen den gleichen Vektorräumen. In diesem Fall heißt L **symmetrisch** (bzw. **schief**), falls $L^t = L$ (bzw. $L^t = -L$). \square

Im Folgenden wird die Matrixdarstellung von L^t mit der von L in Zusammenhang gebracht. Für die Matrixdarstellung von $L : V \rightarrow W$ benötigt man eine Basis $\{e_1^V, \dots, e_n^V\}$ von V und eine Basis $\{e_1^W, \dots, e_m^W\}$ von W . Die **Matrixdarstellung** von L ist dann gegeben durch

$$L e_i^V = \sum_{j=1}^m e_j^W L_{ji} \quad \text{und} \quad (L_{ji}) = \begin{pmatrix} L_{11} & \dots & L_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{m1} & \dots & L_{mn} \end{pmatrix}.$$

Seien nun $\{\vartheta_1^V, \dots, \vartheta_n^V\}$ und $\{\vartheta_1^W, \dots, \vartheta_m^W\}$ die Dualbasen von V^* bzw. W^* zu den schon gewählten Basen von V und W . Dann haben wir für L^t die Matrixdarstellung

$$L^t \vartheta_j^W = \sum_{i=1}^n \vartheta_i^V \tilde{L}_{ij} \quad \text{und} \quad (\tilde{L}_{ij}) = \begin{pmatrix} \tilde{L}_{11} & \dots & \tilde{L}_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{L}_{n1} & \dots & \tilde{L}_{nm} \end{pmatrix}.$$

Wie hängen nun die Matrizen von L und L^t miteinander zusammen? Zur Beantwortung dieser Frage benützen wir, dass sich die Matrixelemente L_{ji} und \tilde{L}_{ij} auch folgendermaßen darstellen lassen:

$$L_{ji} = \vartheta_j^W(L e_i^V), \quad \tilde{L}_{ij} = (L^t \vartheta_j^W)(e_i^V).$$

Nun gilt aber per Definition der Operation des Transponierens die Gleichheit

$$(L^t \vartheta_j^W)(e_i^V) = \vartheta_j^W(L e_i^V).$$

Damit folgt

$$\tilde{L}_{ij} = L_{ji}.$$

In Matrixdarstellung bedeutet Transponieren einer linearen Abbildung also ‘Spiegeln der Matrix an der Diagonalen’.

Beispiel. Eine schiefe Abbildung $L : V \rightarrow V^*$ sei erklärt durch

$$L(v) := (\vartheta_1 \wedge \vartheta_2)(v, \cdot) = \vartheta_1(v) \vartheta_2(\cdot) - \vartheta_2(v) \vartheta_1(\cdot).$$

Die Matrix von L sieht dann so aus:

$$(L_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix von L^t ist das Negative hiervon.

Definition. Der **Kokern** einer linearen Abbildung $L : V \rightarrow W$ ist definiert durch

$$\text{coker}(L) := \ker(L^t) = \{f \in W^* \mid \forall v \in V : f(Lv) = 0\}.$$

Beispiel (heuristisch). Die differenzierbaren k -Formen (z.B. eines affinen Raums M) bilden einen unendlich-dimensionalen Vektorraum. Die äußere Ableitung $d : (k-1)\text{-Formen} \rightarrow k\text{-Formen}$ ist eine lineare Abbildung. Nun bestimmt jede k -dimensionale Fläche c eine lineare Abbildung

$$c : k\text{-Formen} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \omega \mapsto \int_c \omega \equiv c(\omega),$$

liegt also (gewissermaßen) im Dualraum zu den k -Formen. Wie oben erklären wir die transponierte Abbildung d^t durch

$$(d^t c)(\omega) := c(d\omega).$$

Mit dem Allgemeinen Stokes’schen Satz folgt dann

$$(d^t c)(\omega) = c(d\omega) = \int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega = (\partial c)(\omega),$$

also $d^t = \partial$. Der Kokern der äußeren Ableitung d ist somit der Kern des Randoperators ∂ . Letzterer besteht aus randlosen k -dimensionalen Flächen, den sogenannten **k -Zykeln**.

4.2 Quotientenraum

Im Folgenden sei $U \subset V$ ein **Unter-Vektorraum** von V , d.h. eine Teilmenge $U \subset V$, welche die Struktur eines Vektorraums hat. (Insbesondere enthält U den Nullvektor von V .) Der Vektorraum V lässt sich dann bezüglich U in **Hyper-Ebenen** (kurz: Ebenen) zerlegen. Dazu ordnen wir jedem Vektor $v \in V$ wie folgt eine Ebene zu:

$$\text{Ebene}(v) = \{v + u \mid u \in U\} .$$

Diese Zuordnung ist natürlich nicht 1-zu-1, denn für $u \in U$ gilt $\text{Ebene}(v) = \text{Ebene}(v + u)$.

Definition. Man nennt $[v] := \text{Ebene}(v)$ die **Äquivalenzklasse** zum **Repräsentanten** v . Die Menge der Äquivalenzklassen (Ebenen) $V/U := \{[v] \mid v \in V\}$ heißt der **Quotientenraum** von V bezüglich des Untervektorraums U .

Bemerkung. Im Spezialfall $U = 0$ (Nullvektorraum) bildet jeder Vektor $v \in V$ seine eigene Äquivalenzklasse. Dagegen liegen im Spezialfall $U = V$ alle Vektoren von V in einer einzigen Äquivalenzklasse. Der interessante Fall ist $0 < \dim U < \dim V$. \square

Wir geben jetzt eine zweite, leicht veränderte **Perspektive** zum Begriff des Quotientenraums V/U . Hierfür vereinbaren wir die folgende Sprechweise: zwei Vektoren v_1 und v_2 in V werden als äquivalent betrachtet (in Symbolen: $v_1 \sim v_2$), wenn ihre Differenz in U liegt; also

$$v_1 \sim v_2 \iff v_1 - v_2 \in U .$$

Wir können den obigen Sachverhalt dann auch so formulieren: eine Äquivalenzklasse $[v]$ besteht aus allen zu v äquivalenten Vektoren. Manchmal bezeichnen wir die Äquivalenzklasse $[v]$ des Vektors (oder Repräsentanten) v auch mit $v + U$.

Die Menge V/U der Äquivalenzklassen $[v]$ ist zunächst nur eine Menge. Sie lässt sich aber auf naheliegende Weise mit der Struktur eines **Vektorraums** ausstatten: man erklärt eine Skalarmultiplikation durch

$$a \cdot [v] := [av] \quad (a \in \mathbb{R})$$

und eine Vektoraddition durch

$$[v_1] + [v_2] := [v_1 + v_2] .$$

Wir überprüfen als nächstes, ob diese Definitionen **sinnvoll** sind.

1. Im Fall der Skalarmultiplikation muss geprüft werden, ob gilt:

$$[v] = [v'] \implies [av] = [av'] .$$

Dazu bemerken wir, dass aus $[v] = [v']$ die Existenz eines Vektors $u \in U$ folgt mit $v' = v + u$. Hiermit sehen wir, dass die Skalarmultiplikation tatsächlich wohldefiniert ist:

$$[av] = [av + au] = [a(v + u)] = [av'] .$$

Dabei haben wir benützt, dass U ein Vektorraum ist, also mit u auch au in U liegt und somit gilt $av + au \sim av$.

2. Im Fall der Vektoraddition muss geprüft werden, ob gilt:

$$[v_1] = [v'_1], [v_2] = [v'_2] \implies [v_1 + v_2] = [v'_1 + v'_2].$$

Wir argumentieren ähnlich wie zuvor. Aus $[v_i] = [v'_i]$ folgt die Existenz von $u_i \in U$ mit $v'_i = v_i + u_i$ ($i = 1, 2$). Mit der Untervektorraum-Eigenschaft von U resultiert dann wieder das gewünschte Ergebnis:

$$[v'_1 + v'_2] = [(v_1 + u_1) + (v_2 + u_2)] = [(v_1 + v_2) + (u_1 + u_2)] = [v_1 + v_2],$$

denn mit $u_1 \in U$ und $u_2 \in U$ ist auch $u_1 + u_2 \in U$.

Insgesamt haben wir also auf der Menge V/U der Äquivalenzklassen $[v] = v + U$ die wohldefinierten Operationen von Skalarmultiplikation und Vektoraddition. Dadurch wird der Quotientenraum V/U zu einem Vektorraum. Der Nullvektor des Vektorraums V/U ist natürlich die Äquivalenzklasse $[0] = U$ des Nullvektors $0 \in V$.

4.2.1 Dimension des Quotientenraums

Wir behaupten, dass der Vektorraum V/U die Dimension

$$\dim(V/U) = \dim V - \dim U$$

hat. Zum **Beweis** sei $\{e_1, \dots, e_m\}$ eine Basis von U . Diese Basis ergänzen wir zu einer Basis $\{e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n\}$ von V . Dann betrachten wir die $n - m$ Äquivalenzklassen $[e_{m+1}], \dots, [e_n]$. Sie bilden ein linear unabhängiges System, denn aus

$$\sum_{j=m+1}^n a_j \cdot [e_j] = [0]$$

folgt

$$[0] = \left[\sum_{j=m+1}^n a_j e_j \right] \implies \sum_{j=m+1}^n a_j e_j \in U \implies a_{m+1} = \dots = a_n = 0.$$

Außerdem lässt sich jede Äquivalenzklasse $[v]$ als Linearkombination von $[e_{m+1}], \dots, [e_n]$ schreiben:

$$[v] = \left[\sum_{i=1}^n v_i e_i \right] = \left[\sum_{j=m+1}^n v_j e_j \right] = \sum_{j=m+1}^n v_j \cdot [e_j].$$

Folglich ist $[e_{m+1}], \dots, [e_n]$ eine Basis von V/U und wir haben

$$\dim(V/U) = n - m = \dim V - \dim U,$$

also die Behauptung.

4.2.2 Isomorphismus $V/\ker(L) \rightarrow \text{im}(L)$

Es sei jetzt eine lineare Abbildung $L : V \rightarrow W$ gegeben. Der Kern von L ist ein Untervektorraum $\ker(L) \subset V$. Wir betrachten auf dem Quotientenraum $V/\ker(L)$ die lineare Abbildung

$$\tilde{L} : V/\ker(L) \rightarrow W, \quad [v] \mapsto Lv.$$

Wir prüfen wieder kurz, ob diese Abbildung \tilde{L} Sinn macht. Sei dazu $[v] = [v']$. Dann existiert $u \in \ker(L)$ mit $v' = v + u$, und wir sehen aus der Rechnung

$$Lv' = L(v + u) = Lv + Lu = Lv,$$

dass $\tilde{L}([v']) = \tilde{L}([v])$ in der Tat wohldefiniert ist.

\tilde{L} ist **injektiv**, denn

$$\mathbf{0} = \tilde{L}([v]) = Lv \implies v \in \ker(L) \implies [v] = \ker(L) = [\mathbf{0}].$$

Wir schränken jetzt \tilde{L} im Bildraum W auf $\text{im}(L)$ ein und betrachten

$$L' : V/\ker(L) \rightarrow \text{im}(L), \quad [v] \mapsto Lv.$$

Die so erklärte lineare Abbildung L' ist nicht nur injektiv, sondern per Definition auch noch **surjektiv**, also bijektiv. Demnach ist die Dimension des Quotienten $V/\ker(L)$ gleich der Dimension von $\text{im}(L)$. Mit der Formel von Abschnitt 4.2.1 für die Dimension von $V/\ker(L)$ folgt

$$\dim V = \dim \ker(L) + \dim \text{im}(L).$$

4.3 Determinante

4.3.1 Definition der Determinante

Sei V ein Vektorraum der Dimension n . Für eine Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ von V bezeichnen wir mit $\{\vartheta_1, \dots, \vartheta_n\}$ wie üblich die zugehörige Dualbasis von V^* . Im Folgenden machen wir von der Tatsache Gebrauch, dass der Raum $\text{Alt}^n(V)$ der alternierenden n -linearen Formen auf V eindimensional ist. [Jedes Element $\Omega \in \text{Alt}^n(V)$ ist ein Vielfaches von $\vartheta_1 \wedge \vartheta_2 \wedge \dots \wedge \vartheta_n$.]

Sei nun V, W ein Paar von Vektorräumen der gleichen Dimension n . Beide Vektorräume seien mit einem von Null verschiedenen Generator $\Omega_V \in \text{Alt}^n(V)$ bzw. $\Omega_W \in \text{Alt}^n(W)$ ausgestattet. Dann betrachten wir $\text{Hom}(V, W)$, also den Vektorraum aller linearen Abbildungen $L : V \rightarrow W$. Die **Determinante** $\text{Det}_{V,W}$ zum Paar V, W ist die Abbildung

$$\text{Det}_{V,W} : \text{Hom}(V, W) \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{oder } \mathbb{C}),$$

die folgendermaßen erklärt wird.

Wir ziehen die alternierende n -lineare Form Ω_W mittels der linearen Abbildung $L \in \text{Hom}(V, W)$ von W nach V zurück:

$$(L^* \Omega_W)(v_1, \dots, v_n) := \Omega_W(Lv_1, \dots, Lv_n).$$

Wegen $\dim \text{Alt}^n(V) = 1$ ist $L^*\Omega_W \in \text{Alt}^n(V)$ proportional zu Ω_V ; d.h. es existiert eine Zahl k mit der Eigenschaft

$$L^*\Omega_W = k \Omega_V .$$

Diese Zahl ist die zu erklärende **Determinante** von L ; also

$$L^*\Omega_W = \text{Det}_{V,W}(L) \Omega_V .$$

(Beachte, dass $\text{Det}_{V,W}(L)$ sich ändert, wenn wir die Wahl von Ω_V oder Ω_W ändern.)

Ein wichtiger **Spezialfall**, der uns im Folgenden fast ausschließlich beschäftigen wird, ist $V = W$. In diesem Fall wählt man natürlich $\Omega_W \equiv \Omega_V =: \Omega$. Die Determinante hängt dann nicht mehr von der Wahl von Ω ab, denn es gilt

$$L^*\Omega = k \Omega \Leftrightarrow L^*\Omega' = k \Omega' \quad (\Omega' = r \Omega, r \neq 0) .$$

Es existiert also eine wohlbestimmte Zahl $\text{Det}(L) \equiv \text{Det}_{V,V}(L)$ mit der Eigenschaft

$$\text{Det}(L) \Omega = L^*\Omega \quad (\Omega \neq 0) .$$

Das ist die Determinante von $L : V \rightarrow V$.

4.3.2 Leibniz-Formel

Wir leiten jetzt einen expliziten **Ausdruck** für die Determinante einer linearen Abbildung $A : V \rightarrow V$ her. Dazu sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ wieder eine Basis von V und $\{\vartheta_1, \dots, \vartheta_n\}$ die Dualbasis von V^* . Die Matrixelemente A_{ji} von A bezüglich dieser Basis sind erklärt durch

$$A e_i = \sum_{j=1}^n e_j A_{ji} .$$

Für die transponierte lineare Abbildung $A^t : V^* \rightarrow V^*$ gilt dann

$$A^t \vartheta_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} \vartheta_j .$$

Nun wählen wir $\Omega := \vartheta_1 \wedge \vartheta_2 \wedge \dots \wedge \vartheta_n$. Aus der Definition von $A^*\Omega$ folgt dann sofort

$$A^*\Omega = (A^t \vartheta_1) \wedge (A^t \vartheta_2) \wedge \dots \wedge (A^t \vartheta_n) ,$$

und Einsetzen der obigen Formel für $A^t \vartheta_i$ ergibt

$$A^*\Omega = \left(\sum_{j_1=1}^n A_{1j_1} \vartheta_{j_1} \right) \wedge \left(\sum_{j_2=1}^n A_{2j_2} \vartheta_{j_2} \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{j_n=1}^n A_{nj_n} \vartheta_{j_n} \right) .$$

Jetzt verwenden wir die Distributivität des äußeren Produkts, um die Summen nach außen zu ziehen:

$$A^*\Omega = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n=1}^n A_{1j_1} A_{2j_2} \dots A_{nj_n} \vartheta_{j_1} \wedge \vartheta_{j_2} \wedge \dots \wedge \vartheta_{j_n} .$$

Wegen $\vartheta_j \wedge \vartheta_{j'} = -\vartheta_{j'} \wedge \vartheta_j$ und insbesondere $\vartheta_j \wedge \vartheta_j = 0$ tragen nur diejenigen Terme zur Summe bei, für die alle Indizes j_1, j_2, \dots, j_n paarweise verschieden sind. Es folgt, dass $\{j_1, j_2, \dots, j_n\}$ eine **Permutation** $\{\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n)\}$ von $\{1, 2, \dots, n\}$ sein muss. Bezeichnet S_n die Menge (tatsächlich: Gruppe) aller solcher Permutationen, so haben wir

$$A^* \Omega = \sum_{\pi \in S_n} A_{1\pi(1)} A_{2\pi(2)} \cdots A_{n\pi(n)} \vartheta_{\pi(1)} \wedge \vartheta_{\pi(2)} \wedge \cdots \wedge \vartheta_{\pi(n)} .$$

Im letzten Schritt bringen wir das äußere Produkt $\vartheta_{\pi(1)} \wedge \vartheta_{\pi(2)} \wedge \cdots \wedge \vartheta_{\pi(n)}$ für jede Permutation π durch Vertauschen der Faktoren in die Standard-Reihenfolge $\vartheta_1 \wedge \vartheta_2 \wedge \cdots \wedge \vartheta_n = \Omega$. Dabei treten Vorzeichenwechsel auf. Jeder paarweise Austausch (auch **Transposition** genannt) verursacht ein Minuszeichen. Wenn die Zahl der für die Permutation π benötigten Transpositionen gerade ist, dann heißt π gerade und man setzt $\text{sgn}(\pi) := +1$; andernfalls heißt π ungerade und man setzt $\text{sgn}(\pi) := -1$. Die (wohlbestimmte) Zahl $\text{sgn}(\pi)$ heißt das **Signum** von π . Das Endergebnis dieser Rechnung, die sogenannte **Leibniz-Formel**, lautet dann $A^* \Omega = \text{Det}(A) \Omega$ mit

$$\boxed{\text{Det}(A) = \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn}(\pi) A_{1\pi(1)} A_{2\pi(2)} \cdots A_{n\pi(n)} .}$$

Wir halten fest: die Determinante einer linearen Abbildung $A : V \rightarrow V$ ist invariant erklärt durch $A^* \Omega = \text{Det}(A) \Omega$; insbesondere ist $\text{Det}(A)$ basisunabhängig. Wählt man eine Basis und drückt die lineare Abbildung A durch ihre Matrix (mit Matrixelementen A_{ij}) bezüglich dieser Basis aus, so lässt sich $\text{Det}(A)$ durch die obenstehende Leibniz-Formel berechnen. Die Wahl der Basis ist hierbei völlig beliebig; die Determinante bleibt immer dieselbe.

Unter der Determinante einer (quadratischen) Matrix versteht man natürlich

$$\text{Det} \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn}(\pi) A_{1\pi(1)} A_{2\pi(2)} \cdots A_{n\pi(n)}$$

(die rechte Seite der Leibniz-Formel).

4.3.3 Beispiele

Im Fall von Dimension **$n = 2$** gilt:

$$\text{Det}(A) = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} .$$

Für Dimension **$n = 3$** gilt:

$$\begin{aligned} \text{Det}(A) &= A_{11}A_{22}A_{33} + A_{12}A_{23}A_{31} + A_{13}A_{21}A_{32} \\ &\quad - A_{12}A_{21}A_{33} - A_{13}A_{22}A_{31} - A_{11}A_{23}A_{32} . \end{aligned}$$

Im Euklidischen Vektorraum \mathbb{R}^3 (mit der Struktur von Euklidischem Skalarprodukt und Vektorprodukt) existiert eine Beziehung zwischen der Determinante einer linearen Abbildung $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ und dem Spatprodukt. Wir erinnern daran, dass das Spatprodukt dreier Vektoren u, v, w im \mathbb{R}^3 durch

$$\Omega(u, v, w) = \langle u \times v, w \rangle$$

definiert ist. (Äquivalent haben wir $\Omega = \vartheta_x \wedge \vartheta_y \wedge \vartheta_z$, wobei $\{\vartheta_x, \vartheta_y, \vartheta_z\}$ die Dualbasis einer rechtshändigen Orthonormalbasis e_x, e_y, e_z ist.)

Zu einem gegebenen Satz von drei Vektoren u, v, w assoziieren wir nun eine lineare Abbildung L durch

$$L(ae_x + be_y + ce_z) = au + bv + cw \quad (a, b, c \in \mathbb{R}).$$

Es gilt dann:

$$\text{Det}(L) = \Omega(u, v, w).$$

Der Beweis ist konzeptionell sehr einfach: man schreibt beide Seiten explizit in Komponenten aus und verifiziert die Gleichheit per Inspektion.

Diese Beziehung zwischen Determinante und Spatprodukt gibt uns auch die Vorlage zur geometrischen **Interpretation** der Determinante. Unsere Abbildung L bildet den Einheitswürfel mit Kanten e_x, e_y, e_z auf den Spat mit Kanten u, v, w ab. Der Einheitswürfel hat Volumen Eins, der Spat mit Kanten u, v, w hat Volumen $|\Omega(u, v, w)|$. Es folgt, dass $|\text{Det}(L)|$ misst, was die lineare Abbildung L **volumenmäßig** bewirkt: ist $|\text{Det}(L)| < 1$, so wirkt L volumenverkleinernd; ist $|\text{Det}(L)| > 1$, so wirkt L volumenvergrößernd. (Diese Aussage gilt übrigens nicht nur im \mathbb{R}^3 , sondern ganz allgemein.)

Die Determinante $\text{Det}(L)$ ist positiv oder negativ (wenn nicht Null). Für $\text{Det}(L) > 0$ gilt

$$\Omega(Le_x, Le_y, Le_z) = \text{Det}(L) \Omega(e_x, e_y, e_z) > 0,$$

In diesem Fall ist mit e_x, e_y, e_z auch Le_x, Le_y, Le_z ein rechtshändiges System. Die lineare Abbildung L heißt dann **orientierungstreu**. Im Fall negativer Determinante $\text{Det}(L) < 0$ ist Le_x, Le_y, Le_z ein linkshändiges System und L heißt orientierungsändernd.

4.3.4 Eigenschaften der Determinante

Die Determinante (einer linearen Abbildung A oder einer Matrix A) hat die folgenden wichtigen **Eigenschaften**:

1. Die Determinante einer Matrix A wechselt das Vorzeichen unter Austausch zweier Spalten; gleichermaßen wechselt sie das Vorzeichen unter Austausch zweier Zeilen.
2. Die Determinante einer Matrix A bleibt unverändert unter Hinzufügen eines Vielfachen einer Zeile (oder Spalte) zu einer **anderen** Zeile (bzw. Spalte).
3. Die Determinante einer linearen Abbildung A oder einer Matrix A ist invariant unter Transposition: $\text{Det}(A) = \text{Det}(A^t)$.
4. Es gilt: $\text{Det}(BA) = \text{Det}(B) \text{Det}(A)$. In der allgemeinen Situation dreier Vektorräume U, V, W mit linearen Abbildungen $A : U \rightarrow V$ und $B : V \rightarrow W$ gilt

$$\text{Det}_{U,W}(BA) = \text{Det}_{U,V}(A) \text{Det}_{V,W}(B).$$

Als Korollar der vierten Eigenschaft haben wir $\text{Det}(A^{-1}) = 1/\text{Det}(A)$ und $\text{Det}(cA) = c^{\dim V} \text{Det}(A)$ ($c \in \mathbb{R}$).

Beweis der vierten Eigenschaft. Sei $BA : U \rightarrow W$ eine Verkettung linearer Abbildungen $A : U \rightarrow V$ und $B : V \rightarrow W$. Für die Operation des Zurückziehens gilt: $(BA)^* = A^*B^*$, denn

$$\begin{aligned} ((BA)^*\Omega)(u_1, u_2, \dots) &= \Omega(BAu_1, BAu_2, \dots) \\ &= (B^*\Omega)(Au_1, Au_2, \dots) = (A^*(B^*\Omega))(u_1, u_2, \dots). \end{aligned}$$

Hiermit berechnen wir nun $\text{Det}_{U,W}(BA)$:

$$\begin{aligned} \text{Det}_{U,W}(BA) \Omega_U &= (BA)^*\Omega_W = A^*(B^*\Omega_W) \\ &= \text{Det}_{V,W}(B) A^*\Omega_V = \text{Det}_{V,W}(B) \text{Det}_{U,V}(A) \Omega_U. \end{aligned}$$

Mit $\Omega_U \neq 0$ folgt die gewünschte Aussage $\text{Det}_{U,W}(BA) = \text{Det}_{U,V}(A) \text{Det}_{V,W}(B)$.

Beweis der zweiten Eigenschaft. Hierzu holen wir etwas aus. Seien V, W Vektorräume. Unter dem **Tensorprodukt** $V \otimes W$ versteht man den Vektorraum der Dimension $\dim(V) \times \dim(W)$, der folgendermaßen erklärt ist.

- Die Elemente von $V \otimes W$ sind **Tensoren** $v \otimes w$ ($v \in V, w \in W$). Das Symbol \otimes bedeutet die Verschiebbarkeit von Skalaren, also $(av) \otimes w \equiv v \otimes (aw)$ für $a \in \mathbb{R}$.
- Sind $\{e_1, \dots, e_m\}$ und $\{f_1, \dots, f_n\}$ Basen von V bzw. W , so ist

$$e_i \otimes f_j \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$$

eine Basis von $V \otimes W$.

- Skalarmultiplikation: $a \cdot (v \otimes w) := (av) \otimes w \equiv v \otimes (aw)$.
- Distributivität (des Tensorprodukts): $(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w$ und $v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2$.

Jetzt betrachten wir wieder den Vektorraum $\text{Hom}(V, W)$ der linearen Abbildungen zwischen V und W . Es existiert ein **kanonischer Isomorphismus**

$$I : W \otimes V^* \rightarrow \text{Hom}(V, W),$$

der wie folgt definiert ist:

$$I(w \otimes \alpha)(v) := \alpha(v) w.$$

Wir ordnen also einem Vektor $w \in W$ und einer Linearform $\alpha \in V^*$ eine lineare Abbildung $I(w \otimes \alpha) : V \rightarrow W$ durch $v \mapsto \alpha(v) w$ zu, d.h. wir machen aus dem Vektor $v \in V$ den Skalar $\alpha(v) \in \mathbb{R}$ und dann den Vektor $\alpha(v) w \in W$.

Um den inversen Isomorphismus explizit angeben zu können, wählen wir eine Basis $\{e_i\}$ von V mit Dualbasis $\{\vartheta_i\}$ von V^* . Dann haben wir für $I^{-1} : \text{Hom}(V, W) \rightarrow W \otimes V^*$ den Ausdruck

$$I^{-1}(A) = \sum_i (Ae_i) \otimes \vartheta_i.$$

Aufgabe. Zeige, dass $I^{-1}(A)$ unabhängig von Basiswahl ist. \square

Wir identifizieren jetzt $V \equiv W$ und beginnen den **Beweis** der zweiten Eigenschaft. Hierfür betrachten wir zu einer linearen Abbildung $A : V \rightarrow V$ die modifizierte lineare Abbildung

$$B := A + cI(Ae_k \otimes \vartheta_l) \quad (k \neq l; c \in \mathbb{R}).$$

Die Matrixelemente von B und A unterscheiden sich wie folgt:

$$B_{ij} = A_{ij} + c A_{ik} \delta_{jl}.$$

Die Matrix von B entsteht also aus der Matrix von A , indem wir das c -fache der k -ten Spalte zur l -ten Spalte hinzufügen.

Nun berechnen wir (für $\dim V = n$)

$$\begin{aligned} \text{Det}(B) \Omega(e_1, \dots, e_n) &= \Omega(Be_1, \dots, Be_n) \\ &= \Omega(Ae_1, \dots, Ae_{l-1}, Ae_l + cAe_k, Ae_{l+1}, \dots, Ae_n) \\ &= \Omega(Ae_1, \dots, Ae_n) + c\Omega(Ae_1, \dots, Ae_{l-1}, Ae_k, Ae_{l+1}, \dots, Ae_n). \end{aligned}$$

Der letzte Summand verschwindet wegen der alternierenden Eigenschaft

$$\Omega(\dots, u, \dots, v, \dots) = -\Omega(\dots, v, \dots, u, \dots) \stackrel{\text{für } u=v}{=} 0,$$

weil der Vektor Ae_k ($k \neq l$) in der Liste seiner Argumente zweimal vorkommt. Folglich gilt

$$\text{Det}(B) \Omega(e_1, \dots, e_n) = \Omega(Ae_1, \dots, Ae_n) = \text{Det}(A) \Omega(e_1, \dots, e_n)$$

und somit die Behauptung $\text{Det}(A) = \text{Det}(B)$.

4.3.5 Entwicklung der Determinante nach einer Spalte oder Zeile

Wir kommen zu einer weiteren Formel für die Determinante einer linearen Abbildung $A : V \rightarrow V$. Wieder sei eine Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ von V gewählt. Mit $A^{(ij)}$ bezeichnen wir dann die $(n-1) \times (n-1)$ Matrix, die aus der $n \times n$ Matrix von A durch Streichen der i -ten Zeile und der j -ten Spalte hervorgeht. Wir behaupten, dass für jedes feste $j \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$\boxed{\text{Det}(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-j} A_{ij} \text{Det}(A^{(ij)}) .}$$

Wir nennen diese Formel die ‘Entwicklung der Determinante nach der j -ten Spalte’.

Beispiel. Für $n = 3$ funktioniert die Entwicklung der Determinante einer Matrix A nach der 1. Spalte wie folgt:

$$\begin{aligned} \text{Det} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} &= A_{11} \text{Det} \begin{pmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \\ &\quad - A_{21} \text{Det} \begin{pmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} + A_{31} \text{Det} \begin{pmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{22} & A_{23} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Beweis der Formel. Mit $\Omega = \vartheta_1 \wedge \dots \wedge \vartheta_n$ machen wir folgende Rechnung:

$$\begin{aligned} \text{Det}(A) &= \text{Det}(A) \Omega(e_1, \dots, e_n) = \Omega(Ae_1, \dots, Ae_n) \\ &= \Omega(Ae_1, \dots, Ae_{j-1}, \sum_i e_i A_{ij}, Ae_{j+1}, \dots, Ae_n) \\ &= \sum_{i=1}^n A_{ij} \Omega(Ae_1, \dots, Ae_{j-1}, e_i, Ae_{j+1}, \dots, Ae_n). \end{aligned}$$

Nun sei $\Omega^{(i)}$ dasjenige Element von $\text{Alt}^{n-1}(V)$, in dem die i -te Basislinearform ϑ_i gestrichen ist:

$$\Omega^{(i)} := \vartheta_1 \wedge \dots \wedge \vartheta_{i-1} \wedge \vartheta_{i+1} \wedge \dots \wedge \vartheta_n.$$

Dann gilt

$$\Omega(Ae_1, \dots, Ae_{j-1}, e_i, Ae_{j+1}, \dots, Ae_n) = (-1)^{i-j} \Omega^{(i)}(Ae_1, \dots, Ae_{j-1}, Ae_{j+1}, \dots, Ae_n)$$

und

$$\begin{aligned} \Omega^{(i)}(Ae_1, \dots, Ae_{j-1}, Ae_{j+1}, \dots, Ae_n) &= (A^* \Omega^{(i)})(e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_n) \\ &= \text{Det}(A^{(ij)}) \Omega^{(j)}(e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_n) = \text{Det}(A^{(ij)}). \end{aligned}$$

Es folgt

$$\text{Det}(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-j} A_{ij} \text{Det}(A^{(ij)}),$$

also die Behauptung.

Bemerkung. Die invariante Betrachtungsweise zur obigen Formel kommt in Abschnitt 4.4.3.

4.4 Lineare Gleichungssysteme

In diesem Abschnitt behandeln wir für eine gegebene lineare Abbildung $A : V \rightarrow W$ und einen gegebenen Vektor $b \in W$ die Gleichung

$$Av = b$$

für den unbekanntem Vektor $v \in V$.

4.4.1 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung

Per Definition des Bildes $\text{im}(A)$ der linearen Abbildung A hat die Gleichung $Av = b$ dann und nur dann Lösung(en) für v , wenn $b \in \text{im}(A)$. Die Lösung ist genau dann eindeutig, wenn der Kern von A verschwindet: $\ker(A) = 0$.

Zum Beweis der zweiten Aussage sei

$$Av_1 = b = Av_2.$$

Durch Subtraktion der Gleichungen folgt mit der Linearität von A die Beziehung

$$A(v_1 - v_2) = 0.$$

Wegen $\ker(A) = 0$ muss $v_1 - v_2$ der Nullvektor sein; also gilt $v_1 = v_2$. \square

Wir konzentrieren uns jetzt auf den wichtigen Spezialfall $V = W$. Aus der Dimensionsformel $\dim(V) = \dim \ker(A) + \dim \operatorname{im}(A)$ (engl. **rank-nullity theorem**) folgt in diesem Fall

$$\ker(A) = \mathbf{0} \iff \operatorname{im}(A) = V.$$

Eine lineare Abbildung $A : V \rightarrow V$ ist also genau dann injektiv, wenn sie surjektiv ist. Deshalb sichert allein $\ker(A) = \mathbf{0}$ schon die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von $Av = b$.

Nun hat man für das Verschwinden des Kerns von A folgendes Kriterium.

Satz. Für $A : V \rightarrow V$ linear gilt:

$$\ker(A) = \mathbf{0} \iff \operatorname{Det}(A) \neq 0.$$

Beweis. Wir beginnen mit $\operatorname{Det}(A) \neq 0 \implies \ker(A) = \mathbf{0}$ und beweisen stattdessen die logisch äquivalente Aussage $\ker(A) \neq \mathbf{0} \implies \operatorname{Det}(A) = 0$. Dazu sei $v_1 \in \ker(A)$, also $Av_1 = \mathbf{0}$, mit $v_1 \neq \mathbf{0}$. Weiter sei $n = \dim(V)$. Dann wählen wir eine Menge von Vektoren v_2, \dots, v_n , so dass v_1, v_2, \dots, v_n ein linear unabhängiges System ist. Mit $\Omega \in \operatorname{Alt}^n(V)$, $\Omega \neq 0$, folgt

$$0 = \Omega(\mathbf{0}, \dots) = \Omega(Av_1, Av_2, \dots, Av_n) = (A^*\Omega)(v_1, \dots, v_n) = \operatorname{Det}(A) \Omega(v_1, \dots, v_n).$$

Da $\Omega(v_1, \dots, v_n)$ nicht Null sein kann, muss $\operatorname{Det}(A)$ verschwinden. Damit ist die Aussage $\operatorname{Det}(A) \neq 0 \implies \ker(A) = \mathbf{0}$ bereits gezeigt.

Wir wenden uns dem Umkehrschluss zu. Sei jetzt also $\ker(A) = \mathbf{0}$. Wir nehmen $\operatorname{Det}(A) = 0$ an und zeigen, dass diese Annahme zu einem Widerspruch führt. Per Annahme gilt

$$0 = \operatorname{Det}(A) \Omega(v_1, \dots, v_n) = \Omega(Av_1, \dots, Av_n)$$

für jeden Satz von n Vektoren v_1, \dots, v_n . Es folgt, dass jedes System Av_1, \dots, Av_n linear abhängig ist. Es gilt also $\operatorname{im}(A) \neq V$ und somit $\dim \operatorname{im}(A) < n$. Aus der Dimensionsformel (rank-nullity theorem) ergibt sich dann $\dim \ker(A) > 0$ und somit ein Widerspruch. Also war die Annahme $\operatorname{Det}(A) = 0$ falsch; richtig ist $\operatorname{Det}(A) \neq 0$. (q.e.d.)

4.4.2 Cramer'sche Regel

Sei $b \in V$ und $A : V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung. Wie wir gelernt haben, besitzt die lineare Gleichung $Av = b$ unter der Annahme $\operatorname{Det}(A) \neq 0$ eine eindeutige Lösung für v . Um diese Lösung zu finden, wählen wir (irgend-)eine Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ von V und entwickeln

$$b = \sum_{i=1}^n b_i e_i, \quad v = \sum_{i=1}^n v_i e_i, \quad Ae_i = \sum_{j=1}^n e_j A_{ji}.$$

Satz (Cramer'sche Regel). Die Komponenten v_i des Lösungsvektors v der linearen Gleichung $Av = b$ sind durch

$$v_i = \frac{\operatorname{Det}(A_i^{(b)})}{\operatorname{Det}(A)}$$

gegeben, wobei $A_i^{(b)}$ die Matrix bezeichnet, die durch Ersetzen der i -ten Spalte der Matrix von A durch die Komponenten des Vektors b entsteht; also

$$A_i^{(b)} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,i-1} & b_1 & A_{1,i+1} & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & \cdots & A_{2,i-1} & b_2 & A_{2,i+1} & \cdots & A_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,i-1} & b_n & A_{n,i+1} & \cdots & A_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Beweis. Wir erinnern daran, dass $A^{(j,i)}$ die $(n-1) \times (n-1)$ Matrix bezeichnet, die aus der $n \times n$ Matrix von A (bzgl. der gewählten Basis) durch Streichen der j -ten Zeile und der i -ten Spalte hervorgeht. Dann behaupten wir, dass die zu A inverse Abbildung A^{-1} die folgenden Matrixelemente hat:

$$\boxed{(A^{-1})_{ij} = (-1)^{i-j} \text{Det}(A^{(j,i)}) / \text{Det}(A)}.$$

Wir beweisen jetzt zunächst diese Behauptung, und zwar einfach durch Nachrechnen. Dazu sei

$$B_{ij} := (-1)^{i-j} \frac{\text{Det}(A^{(j,i)})}{\text{Det}(A)}.$$

Wir haben dann

$$\sum_{j=1}^n B_{ij} A_{jk} = \text{Det}^{-1}(A) \sum_{j=1}^n (-1)^{i-j} A^{(j,i)} A_{jk}.$$

Im Fall $i = k$ gilt

$$\sum_{j=1}^n (-1)^{i-j} \text{Det}(A^{(j,i)}) A_{ji} = \text{Det}(A)$$

gemäß der bekannten Formel für die Entwicklung der Determinante nach der i -ten Spalte; siehe Abschnitt 4.3.5. Es folgt

$$\sum_j B_{ij} A_{ji} = \text{Det}^{-1}(A) \text{Det}(A) = 1.$$

Im Fall $i \neq k$ gilt

$$\sum_{j=1}^n (-1)^{i-j} \text{Det}(A^{(j,i)}) A_{jk} = 0,$$

denn was hier berechnet wird, ist die Determinante einer Matrix, die sich von der Matrix der linearen Abbildung A nur dadurch unterscheidet, dass die i -te Spalte durch die k -Spalte ersetzt ist. Die k -te Spalte kommt also zweimal vor, weshalb die Determinante nach der 1. Eigenschaft von Abschnitt 4.3.4 verschwindet. Insgesamt haben wir also

$$\sum_{j=1}^n B_{ij} A_{jk} = \delta_{ik},$$

womit die (Box-)Formel $B_{ij} = (A^{-1})_{ij}$ für die Matrixelemente von A^{-1} verifiziert ist.

Wir kommen jetzt zum **Beweis** der Cramer'schen Regel. Aus $Av = b$ folgt $v = A^{-1}b$ oder in Komponenten $v_i = \sum_j (A^{-1})_{ij} b_j$. Mit der obigen Formel für $(A^{-1})_{ij}$ erhalten wir

$$v_i = \text{Det}^{-1}(A) \sum_j (-1)^{i-j} \text{Det}(A^{(j,i)}) b_j.$$

Die Summe auf der rechten Seite ist die Entwicklung der Matrix $A_i^{(b)}$ nach der i -ten Spalte:

$$\sum_j (-1)^{i-j} \text{Det}(A^{(j,i)}) b_j = \text{Det}(A_i^{(b)}).$$

Damit ist die Cramer'sche Regel $v_i = \text{Det}(A_i^{(b)}) / \text{Det}(A)$ bewiesen.

4.4.3 Direkte Summe

Sei V ein Vektorraum, $U \subset V$ ein Untervektorraum. Ist noch ein zweiter Untervektorraum $W \subset V$ gegeben, dann können wir die Summe $U + W$ betrachten; sie ist wieder ein Untervektorraum von V . Spannen die Vektoren der Summe von U und W den Vektorraum V auf, so ist $V = U + W$. Die Summe heißt **direkt** (Notation: $V = U \oplus W$), wenn gilt $U \cap W = \mathbf{0}$, d.h. der Nullvektor ist der einzige den beiden Vektorräumen U und W gemeinsame Vektor.

Satz. Gilt $V = U \oplus W$ (direkte Summe), so ist W isomorph zu V/U .

Beweis. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$W \rightarrow V/U, \quad w \mapsto [w] \equiv w + U.$$

Sie ist injektiv, denn aus $[w] = [\mathbf{0}] \equiv U$ folgt, dass der Vektor $w \in W$ auch in U enthalten ist, also nach Voraussetzung (direkte Summe) der Nullvektor sein muss.

Die Abbildung ist auch surjektiv, weil jede Äquivalenzklasse $[v] \in V/U$ aufgrund von $V = U + W$ einen Repräsentanten $w \in W$ enthält. Insgesamt ist die Abbildung also bijektiv, als lineare Abbildung somit ein Isomorphismus. \square

Anwendung. Wir sind jetzt in der Lage, eine invariante Sichtweise zum Thema von Abschnitt 4.3.5 anzubieten. Wir erinnern an das dortige Ziel: zu berechnen war die Determinante einer linearen Abbildung $A : V \rightarrow V$ durch Entwicklung nach einer Spalte.

Dazu zerlegen wir V als direkte Summe $V = V^{(1)} \oplus \dots \oplus V^{(n)}$ von eindimensionalen Vektorräumen $V^{(i)} = \mathbb{R}e_i$. Für ein fest gewähltes j setzen wir $W^{(j)} := \bigoplus_{i \neq j} V^{(i)}$. Jedem i ist dann durch **Einschränkung und Projektion** von A eine lineare Abbildung

$$A^{(ij)} : V/V^{(j)} \longrightarrow W^{(j)} \xrightarrow{A} V \xrightarrow{\sim} V/V^{(i)}$$

zugeordnet. Nun fixieren wir ein $\Omega \in \text{Alt}^n(V)$, $\Omega \neq 0$, und definieren $\Omega^{(i)} \in \text{Alt}^{n-1}(V/V^{(i)})$ durch

$$\Omega^{(i)}([v_1], \dots, [v_{n-1}]) = \Omega(e_i, v_1, \dots, v_{n-1})$$

für alle $i = 1, \dots, n$. Die Determinante von $A^{(ij)} : V/V^{(j)} \rightarrow V/V^{(i)}$ ist erklärt durch $\text{Det}(A^{(ij)}) \Omega^{(j)} = (A^{(ij)})^* \Omega^{(i)}$. Wie immer schreiben wir $Ae_j = \sum e_i A_{ij}$.

Aufgabe. Zeige, dass gilt

$$\text{Det}(A) = \sum_{i=1}^n A_{ij} \text{Det}(A^{(ij)}).$$

Wieso fehlt hier das alternierende Vorzeichen der Formel von Abschnitt 4.3.5?

4.4.4 Annulator eines Untervektorraums

Obwohl der Quotientenraum V/U zu einem gegebenen Untervektorraum $U \subset V$ eindeutig ist, existieren viele $W \subset V$ mit der Eigenschaft $V = U \oplus W$ (direkte Summe). (Man sagt auch, dass es keine kanonische Wahl von W gibt.) Wenn ein Skalarprodukt $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ vorliegt, dann ist unter den vielen direkten Summanden W das orthogonale Komplement von U ausgezeichnet.

In der Praxis kommt es aber vor, dass kein Skalarprodukt vorliegt, und dann sind alle direkten Summanden W ‘gleichberechtigt’. In dieser Situation der Willkür wird durch folgende Begriffsbildung Besserung geschaffen. Wir gehen in den Dualraum V^* von V und betrachten den Untervektorraum $U^\perp \subset V^*$, der durch

$$U^\perp := \{\alpha \in V^* \mid \forall u \in U : \alpha(u) = 0\}$$

erklärt wird. Dieser Vektorraum $U^\perp \subset V^*$ heißt bezeichnenderweise der **Annulator** von U — es wird ja per Definition jedes Element $u \in U$ von jedem $\alpha \in U^\perp$ zu Null gemacht (oder annulliert).

Satz. Der Annulator U^\perp von U in V ist isomorph zum Quotientenraum V/U .

Beweis. Sei $\{e_1, \dots, e_m\}$ eine Basis von U , die wir zu einer Basis $\{e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n\}$ von V ergänzen. Dann ist $\{[e_{m+1}], \dots, [e_n]\}$ eine Basis von V/U . Ist $\{\vartheta_1, \dots, \vartheta_n\}$ die Dualbasis zu $\{e_1, \dots, e_n\}$, so ist $\{\vartheta_{m+1}, \dots, \vartheta_n\}$ eine Basis von U^\perp und die Korrespondenz $[e_j] \leftrightarrow \vartheta_j$ für $j = m + 1, \dots, n$ ist eine lineare Bijektion zwischen V/U und U^\perp . \square

Bemerkung 1. Aus der Existenz einer linearen Bijektion $V/U \leftrightarrow U^\perp$ folgt

$$\dim(U^\perp) = \dim(V/U) = \dim(V) - \dim(U),$$

also Gleichheit der Dimensionen.

Allerdings trifft unsere Konstruktion der Bijektion $V/U \simeq U^\perp$ eine Basiswahl. Ändern wir die Wahl der Basis, so ändert sich der Isomorphismus — letzterer ist also nicht kanonisch.

Bemerkung 2. Die optimale Perspektive zum Isomorphismus $U^\perp \simeq V/U$ ist, dass U^\perp in kanonischer Weise als Dualraum zu V/U angesehen werden kann. Das geschieht über die **Paarung**

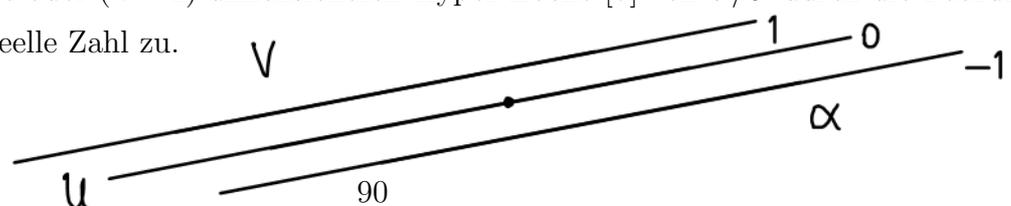
$$U^\perp \otimes V/U \rightarrow \mathbb{R}, \quad \alpha \otimes [v] \mapsto \alpha(v).$$

Diese ist wohldefiniert (denn aus $[v_1] = [v_2]$ folgt $\alpha(v_1) = \alpha(v_2)$), und sie ist **nichtentartet**, d.h. aus $\alpha \otimes [v] \mapsto 0$ für alle $[v] \in V/U$ folgt $\alpha = \mathbf{0}$, und aus $\alpha \otimes [v] \mapsto 0$ für alle $\alpha \in U^\perp$ folgt $[v] = [\mathbf{0}] = U$. Somit ist jedem Element $\alpha \in U^\perp$ eine Linearform $[v] \mapsto \alpha(v)$ auf V/U , also ein Element des Dualraums $(V/U)^*$, eineindeutig zugeordnet. Wir halten fest:

$$U^\perp = (V/U)^*.$$

Aufgabe. Zeige, dass gilt $(V^*/U^\perp)^* = U$.

Bemerkung 3. Übrigens liegt der kanonische Isomorphismus $U^\perp = (V/U)^*$ unseren Bemühungen um Visualisierung in Kapitel 2 zugrunde. Um eine Linearform $\alpha \in V^*$ zu veranschaulichen, benützen wir (für $V = \mathbb{R}^n$) einen $(n - 1)$ -dimensionalen Untervektorraum $U \in V$ mit der Eigenschaft $U^\perp = \mathbb{R}\alpha$ und deuten $\alpha \in U^\perp$ als Linearform $\alpha : V/U \rightarrow \mathbb{R}$. Rechnerisch weist α jeder Äquivalenzklasse oder $(n - 1)$ -dimensionalen Hyper-Ebene $[v]$ von V/U durch die Paarung $\alpha \otimes [v] \mapsto \alpha(v)$ eine reelle Zahl zu.



Eine für Abschnitt 4.4.5 wichtige Tatsache ist, dass einer **Fahne** von Vektorräumen

$$\mathbf{0} \subseteq U_1 \subseteq U_2 \subseteq \dots \subseteq U_k \subseteq V$$

eine Fahne von Annulatoren

$$\mathbf{0}^\perp = V^* \supseteq U_1^\perp \supseteq U_2^\perp \supseteq \dots \supseteq U_k^\perp \supseteq V^\perp = \mathbf{0}$$

entspricht.

4.4.5 Gauß-Algorithmus

Die Cramer'sche Regel (siehe Abschnitt 4.4.2) für die Lösung von $Av = b$ ist von theoretischem Nutzen, aber in der numerischen Praxis unbrauchbar da zu aufwendig. (Es müssen $n + 1$ Determinanten berechnet werden, und das ist numerisch meist zu teuer.) In diesem Abschnitt wollen wir den Gauß-Algorithmus zur Lösung von $Av = b$ kennenlernen; er ist im Unterschied zur Cramer'schen Regel numerisch effizient.

Selbstverständlich gehen wir davon aus, dass unsere lineare Abbildung $A : V \rightarrow V$ nichtverschwindende Determinante hat. Es sei $\dim(V) = n$. Wir wählen eine Basis $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ von V und betrachten mit

$$V_i := \text{span}\{Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_i\}$$

die Fahne von Vektorräumen

$$\mathbf{0} \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_i \subset \dots \subset V_n \equiv V.$$

Ihr entspricht eine Fahne von Annulatoren

$$V^* \supset V_1^\perp \supset V_2^\perp \supset \dots \supset V_i^\perp \supset \dots \supset V_n^\perp \equiv \mathbf{0}.$$

Jetzt wollen wir annehmen, wir verfügten über eine Basis $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ (*nicht* die Dualbasis zu $\{e_1, \dots, e_n\}$) von V^* mit der charakteristischen Eigenschaft

$$V_i^\perp = \text{span}\{\xi_{i+1}, \xi_{i+2}, \dots, \xi_n\} \quad (i = 1, \dots, n-1).$$

Die Konstruktion derselben ist der Hauptteil des Gauß-Algorithmus (siehe unten). Bevor wir uns dieser Konstruktion zuwenden, wollen wir uns überlegen, dass mit der Kenntnis einer solchen Basis die Gleichung $Av = b$ praktisch schon gelöst ist.

Für eine Basis $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ mit der angegebenen Eigenschaft gilt

$$\xi_i(Ae_j) = 0 \quad \text{für } i > j.$$

Somit ist die A zugeordnete Matrix \tilde{A} mit Matrixelementen $\tilde{A}_{ij} = \xi_i(Ae_j)$ von der Struktur

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \dots & \tilde{A}_{1n} \\ 0 & \tilde{A}_{22} & \dots & \tilde{A}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{A}_{nn} \end{pmatrix};$$

alle Matrixelemente unterhalb der Diagonalen verschwinden also identisch. (Beachte, dass alle diagonalen Matrixelemente $\tilde{A}_{ii} = \xi_i(Ae_i)$ von Null verschieden sind; andernfalls hätte man $\text{Det}(A) = \text{Det}(\tilde{A}) = 0$ im Widerspruch zur Annahme $\text{Det}(A) \neq 0$.) Die Lösung von $Av = b$ kann daher sofort durch sog. **Rücksubstitution** erfolgen. Das geht wie folgt.

Wir wenden auf die Gleichung $b = Av$ die Linearform ξ_n an:

$$\xi_n(b) = \xi_n(Av) = \xi_n\left(A \sum_{i=1}^n v_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n v_i \xi_n(Ae_i).$$

Als Basisvektor von V_{n-1}^\perp annulliert ξ_n alle Vektoren Ae_1, \dots, Ae_{n-1} . Somit folgt

$$\xi_n(b) = v_n \xi_n(Ae_n) \implies v_n = \frac{\xi_n(b)}{\xi_n(Ae_n)}.$$

Wir gehen jetzt rekursiv vor. Es sei für einen festen Index $i < n$ angenommen, dass wir alle Komponenten v_j mit $j = i+1, \dots, n$ schon kennen. Dann bestimmen wir v_i folgendermaßen:

$$\xi_i(b) = \xi_i(Av) = \sum_{j=1}^n v_j \xi_i(Ae_j) = 0 + \dots + 0 + v_i \xi_i(Ae_i) + \sum_{j=i+1}^n v_j \xi_i(Ae_j).$$

Durch Auflösen nach der Unbekannten v_i ergibt sich

$$v_i = \left(\xi_i(b) - \sum_{j>i} v_j \xi_i(Ae_j) \right) / \xi_i(Ae_i).$$

Im nächsten Schritt ermitteln wir v_{i-1} , dann v_{i-2} , usw., bis wir bei v_1 ankommen und alle Komponenten des Vektors $v = \sum v_i e_i$ bestimmt sind.

Das war sehr einfach und erfordert keinen nennenswerten numerischen Aufwand. Jetzt kommt das Kernstück des Gauß-Algorithmus: die Bestimmung einer geeigneten Basis $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$. Wir geben zuerst den Algorithmus an und beweisen dann im Nachgang, dass er das Gewünschte liefert.

Gauß-Algorithmus (ohne pivoting):

1. Initialisierung: für $i = 1, \dots, n$ setze $\vartheta_i^{(0)} := \vartheta_i$ (die Dualbasis von $\{e_1, \dots, e_n\}$).

2. Rekursion: für $k = 1, 2, \dots, n-1$ setze

$$\vartheta_i^{(k)} := \begin{cases} \vartheta_i^{(k-1)} & \text{für } i \leq k, \\ \vartheta_i^{(k-1)} - \frac{\vartheta_i^{(k-1)}(Ae_k)}{\vartheta_k^{(k-1)}(Ae_k)} \vartheta_k^{(k-1)} & \text{für } i > k. \end{cases}$$

3. Finales Auslesen: für $i = 1, \dots, n$ setze $\xi_i := \vartheta_i^{(n-1)}$.

Beweis. Wir gehen induktiv vor und beginnen mit dem ersten Schritt ($k = 1$) als Induktionsanfang. Hier haben wir $\vartheta_1^{(1)} = \vartheta_1$ und

$$\vartheta_i^{(1)} = \vartheta_i - \frac{\vartheta_i(Ae_1)}{\vartheta_1(Ae_1)} \vartheta_1 \quad (i = 2, \dots, n).$$

Wir sehen, dass für $i = 2, \dots, n$ gilt: $\vartheta_i^{(1)}(Ae_1) = 0$. Die $n-1$ Linearformen $\vartheta_i^{(1)}$ für $i = 2, \dots, n$ sind linear unabhängig und bilden also eine Basis von $(Ae_1)^\perp = V_1^\perp$.

Sei nun $k \geq 2$. Als Induktionsvoraussetzung nehmen wir an, dass für alle $j = 1, \dots, k-1$ die $n-j$ Linearformen $\vartheta_{j+1}^{(k-1)}, \dots, \vartheta_n^{(k-1)}$ eine Basis des Annulators V_j^\perp bilden. Durch Linearkombination der $n-k+1$ Linearformen $\vartheta_k^{(k-1)}, \dots, \vartheta_n^{(k-1)}$ konstruieren wir jetzt $n-k$ Linearformen, die allesamt Ae_k annullieren und also in V_k^\perp liegen; genau das wird erreicht durch den Rekursionsschritt

$$\vartheta_i^{(k)} := \vartheta_i^{(k-1)} - \frac{\vartheta_i^{(k-1)}(Ae_k)}{\vartheta_k^{(k-1)}(Ae_k)} \vartheta_k^{(k-1)} \quad (i = k+1, \dots, n).$$

Offenbar annullieren alle Linearformen $\vartheta_{k+1}^{(k)}, \dots, \vartheta_n^{(k)}$ den Vektor Ae_k . Da sie linear unabhängig sind und nach Induktionsvoraussetzung außerdem alle Vektoren Ae_1, \dots, Ae_{k-1} annullieren, bilden sie eine Basis von V_k^\perp . Damit folgt der Induktionsschluss, dass die $n-j$ Linearformen $\vartheta_{j+1}^{(k)}, \dots, \vartheta_n^{(k)}$ eine Basis des Annulators V_j^\perp ($j = 1, \dots, k$) bilden.

Die rekursive Prozedur endet für $k = n-1$ mit dem Ergebnis

$$\text{span}\{\vartheta_{j+1}^{(n-1)}, \dots, \vartheta_n^{(n-1)}\} = V_j^\perp \quad (j = 1, \dots, n-1).$$

Also haben die so konstruierten Linearformen $\xi_i := \vartheta_i^{(n-1)}$ die gewünschte Eigenschaft. \square

Bemerkung. Der Gauß-Algorithmus lässt sich auch direkt in Termen der Matrixelemente von A und der Komponenten des Vektors b formulieren. Sei dazu

$$A_{ij}^{(k)} := \vartheta_i^{(k)}(Ae_j), \quad b_i^{(k)} := \vartheta_i^{(k)}(b).$$

Ausgehend von den Initialgrößen $A_{ij}^{(0)} = A_{ij}$ und $b_i^{(0)} = b_i$ veranstalten wir dann die folgende, zum obigen Vorgehen äquivalente Rekursion. Für $k = 1, 2, \dots, n-1$ (und $j = 1, \dots, n$) setzen wir

$$A_{ij}^{(k)} := \begin{cases} A_{ij}^{(k-1)} & \text{für } i \leq k, \\ A_{ij}^{(k-1)} - \frac{A_{ik}^{(k-1)}}{A_{kk}^{(k-1)}} A_{kj}^{(k-1)} & \text{für } i > k, \end{cases} \quad b_i^{(k)} := \begin{cases} b_i^{(k-1)} & \text{für } i \leq k, \\ b_i^{(k-1)} - \frac{A_{ik}^{(k-1)}}{A_{kk}^{(k-1)}} b_k^{(k-1)} & \text{für } i > k. \end{cases}$$

Im k -ten Schritt subtrahieren wir also von der Zeile $A_{ij}^{(k-1)}$ mit Index $i > k$ das $(A_{ik}^{(k-1)}/A_{kk}^{(k-1)})$ -fache der k -ten Zeile $A_{kj}^{(k-1)}$ ($j = 1, \dots, n$). Hierdurch wird erreicht, dass alle Matrixelemente $A_{ik}^{(k)}$ für $i > k$ verschwinden:

$$A_{ik}^{(k)} = A_{ik}^{(k-1)} - \frac{A_{ik}^{(k-1)}}{A_{kk}^{(k-1)}} A_{kk}^{(k-1)} = 0 \quad (i > k).$$

Per Induktion folgt, dass gilt

$$A_{ij}^{(k)} = 0, \quad i > j \geq k.$$

Das Endergebnis der Rekursion ist eine Matrix $\tilde{A}_{ij} := A_{ij}^{(n-1)} \equiv \xi_i(Ae_j)$ von der Gestalt eines **Dreiecks** "rechts oben", d.h. $\tilde{A}_{ij} = 0$ für $i > j$. Das ursprüngliche Gleichungssystem $\sum_j A_{ij} v_j = b_i$ ist äquivalent zum Dreiecks-System $\sum_j \tilde{A}_{ij} v_j = \tilde{b}_i$ mit $\tilde{b}_i := b_i^{(n-1)}$ ($i = 1, \dots, n$). Letzteres lässt sich ganz simpel durch Rücksubstitution lösen.

Gauß-Algorithmus (mit partiellem pivoting). Abschließend beschreiben wir eine Variante des Gauß-Algorithmus, welche die numerische Stabilität (also Stabilität gegen Rundungsfehler) erhöht. Die Reihenfolge der Vektoren Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n ist willkürlich. Da im ersten Schritt durch

$\vartheta_1(Ae_1)$ dividiert werden muss (und Division durch kleine Zahlen mit anschließender Subtraktion zu Rundungsfehlern führen kann), ist es günstig, wenn $|\vartheta_1(Ae_1)|$ einen möglich großen Wert hat. Im Gauss-Algorithmus mit (partiell) pivoting verfährt man deshalb wie folgt. Ist $|\vartheta_1(Ae_1)|$ die größte unter allen Zahlen $|\vartheta_i(Ae_i)|$ ($i = 1, \dots, n$), so bleibt alles wie gehabt. Ist dagegen eine andere Zahl $|\vartheta_i(Ae_i)|$ größer, so nimmt man zuerst den Austausch $Ae_1 \leftrightarrow Ae_i$ vor und verfährt dann wieder wie gehabt. Die bevorzugte Zahl $|\vartheta_i(Ae_i)|$ heißt (engl.) **pivot**. In Vorbereitung des k -ten Schritts der Rekursion wählt man den pivot unter den $n - k + 1$ Zahlen $|\vartheta_k^{(k-1)}(Ae_k)|, \dots, |\vartheta_n^{(k-1)}(Ae_n)|$, ändert die Anordnung der Basisvektoren entsprechend und verfährt dann wieder wie gehabt.