

Vorlesung: Klassische Theoretische Physik I

M. Zirnbauer
Institut für Theoretische Physik
Universität zu Köln

Sommersemester 2015

Contents

1	Newton'sche Mechanik	3
1.1	Affine und Euklidische Räume	3
1.2	Galilei-Raum-Zeit	5
1.3	Galilei-Transformationen	8
1.4	Newtonsches Bewegungsgesetz	11
1.5	Galileisches Relativitätsprinzip	12
1.6	Erhaltungssätze im abgeschlossenen N -Körpersystem	15
1.6.1	Impuls- und Schwerpunktsatz	15
1.6.2	Drehimpulssatz	16
1.6.3	Energiesatz	18
1.7	Hamiltonsche Systeme	19
1.8	Autonome Hamiltonsche Systeme mit einem Freiheitsgrad	22
1.9	Das Zweikörper-Problem mit Zentralkräften	26
1.9.1	Abtrennen der Schwerpunktbewegung	26
1.9.2	Invariante Ebene der Relativbewegung	27
1.9.3	Reduktion auf Radialbewegung	28
1.9.4	Untersuchung der Bahnkurven	29
1.9.5	Kepler-Problem	30
2	Starre Körper	32
2.1	Exkurs über die Drehgruppe	32
2.1.1	Infinitesimale Drehungen in 3 Dimensionen	35
2.1.2	Eigentliche Drehungen in 3 Dimensionen	36
2.2	Kinematik starrer Körper: Winkelgeschwindigkeit	38
2.3	Kinematik: Trägheitstensor	40
2.4	Der freie Kreisel: geometrische Konstruktion	44
2.5	Die Eulerschen Gleichungen	45

2.5.1	Kräftenergie symmetrischer Kreisler	47
2.6	Unsymmetrischer Kreisler	49
3	Kleine Schwingungen	51
3.1	Gleichgewichtslagen	51
3.2	Stabilität von Gleichgewichtslagen	52
3.3	Linearisierung	52
3.4	Normalschwingungen	53
3.5	Beispiel: Gekoppelte Pendel	56
4	Networks	58
4.1	Chains on 1-complexes	58
4.2	Cochains and coboundary operator	59
4.3	2-complexes: $d \circ d = 0$	62
4.4	Resistive networks	64
4.5	Capacitive networks	68
4.5.1	Math tutorial: quotient of vector spaces	73
4.5.2	Math tutorial: annihilator space	73
4.6	Boundary-value problems	74
5	Elektrostatik	
5.1	Grundgesetze	
5.2	Zusammenhang mit kapazitiven Netzwerken	
5.3	Hodge-Sternoperator	
5.4	Elektrisches Feld einer Punktladung	
5.5	Anschlussbedingungen an einer Grenzfläche	
5.6	Messvorschrift für D	
5.7	Poisson-Gleichung & Laplace-Operator	
5.8	Multipolentwicklung (kartesisch)	
5.9	Randwertaufgaben	
5.9.1	Greensche Funktion	
5.9.2	Greensche Identitäten	
5.9.3	Bildladungsmethode für $U = \text{Kugel}$	
5.10	Energiebetrachtungen	

Literatur:

F. Scheck, *Mechanik*, Springer-Verlag (1988)
N. Straumann, *Klassische Mechanik*, Lecture Notes in Physics, vol. 289, Springer (1987)
V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag (1978)

1 Newtonsche Mechanik

1.1 Affine und Euklidische Räume

In Vorbereitung des Galilei-Modells der Raum-Zeit erinnern wir an die Begriffe des affinen Raums und des Euklidischen Vektorraums.

Definition. Sei M eine Menge, V ein reeller Vektorraum und

$$+ : M \times V \rightarrow M, \quad (p, v) \mapsto p + v$$

eine Abbildung. Dann heißt das Tripel $(M, V, +)$ ein **affiner Raum**, wenn die folgenden Axiome gelten:

- (i) $p + (v + w) = (p + v) + w$ (für alle $p \in M$ und $v, w \in V$).
- (ii) Zu jedem Paar $(p, q) \in M \times M$ existiert genau ein Vektor $v \in V$ mit $p = q + v$.

Die Elemente von M heißen **Punkte**. Wir schreiben $p - q := v$ und nennen $p - q$ den **Differenzvektor** zum Punktepaar (p, q) . Unter der Dimension von M versteht man die Dimension von V .

Bemerkung 1. Man beachte, dass hier zwei Operationen “+” im Spiel sind. Im Fall von $v + w$ meint das Pluszeichen die Addition zweier Vektoren des Vektorraums V . Dagegen steht das Pluszeichen in $p + v$ für die Addition des Vektors v zum Punkt p , wodurch ein neuer Punkt $p + v$ bestimmt wird. Das Axiom (i) besagt, dass die beiden Additionen im Sinne von **Assoziativität** miteinander verträglich sind. (Übrigens ist Addition von Punkten nicht erklärt.)

Bemerkung 2. Man kann V als **Translationsgruppe** auffassen und $+ : M \times V \rightarrow M$ als die Wirkung der Translationsgruppe V auf den Punkteraum M . Addition von v zu p bedeutet dann Translation des Punkts p um den Vektor v .

Beispiel. Die Menge aller Punkte in einer Ebene (des physikalischen Ortsraums) zusammen mit dem Vektorraum aller Translationen in dieser Ebene bildet einen 2-dimensionalen affinen Raum.

Aufgabe. Folgere aus den Axiomen (i) und (ii), dass für jedes Tripel von Punkten (p, q, o) eines affinen Raumes gilt:

$$p - q = (p - o) - (q - o).$$

Affine Abbildungen. Ein Abbildung $f : M \rightarrow N$ zwischen affinen Räumen heißt **affin**, wenn sie affine Unterräume auf affine Unterräume abbildet. Das Bild eines Punkts, einer Geraden, einer Ebene usw. unter einer affinen Abbildung ist also wieder ein Punkt bzw. eine Gerade bzw. eine Ebene usw. (wobei Entartung zugelassen ist). Jede affine Abbildung $f : M \rightarrow N$ hat die Form

$$f(p) = f(o) + L(p - o).$$

Hierbei ist o irgendein ausgewählter Punkt (z.B. der Koordinatenursprung; siehe unten) und $L = D_o f = D_p f$ das ortsunabhängige Differential von f . Diese lineare Abbildung L zwischen den Differenzvektorräumen zu M und N wird der **lineare Teil** von f genannt.

Definition. Der reelle Vektorraum V sei jetzt mit einer Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

ausgestattet. Eine solche Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle$ heißt ein **Euklidisches Skalarprodukt**, wenn sie bilinear, symmetrisch und positiv definit ist. Ein Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ mit Euklidischem Skalarprodukt heißt Euklidisch. In einem Euklidischen Vektorraum existiert eine kanonische Norm,

$$|v| := +\sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Man nennt $|v|$ die **Länge** des Vektors v . Der **Winkel** $\angle(u, v)$ zwischen zwei Vektoren u, v ist erklärt durch

$$\cos \angle(u, v) = \frac{\langle u, v \rangle}{|u| |v|}.$$

Zwei Vektoren u, v mit der Eigenschaft $\langle u, v \rangle = 0$ heißen zueinander senkrecht oder **orthogonal**.

Affine Koordinaten. Nach dieser Erinnerung an grundlegende Strukturen wiederholen wir ein paar Aussagen zum praktischen Rechnen. Für unsere Zwecke sind **Koordinaten** x_i immer Funktionen

$$x_i : M \rightarrow \mathbb{R}$$

von dem Raum, für den sie als Koordinaten fungieren, in die reellen Zahlen. Jede Koordinate x_i hat als Funktion ein wohldefiniertes Differential $dx_i : M \rightarrow V^*, p \mapsto (dx_i)_p$.

Für das Rechnen in einem affinen Raum $(M, V, +)$ eignen sich sogenannte affine Koordinaten. Man erhält solche, indem man einen speziellen Punkt, den sog. **Koordinatenursprung** $o \in M$, auszeichnet und eine **Basis** e_1, \dots, e_n des n -dimensionalen Vektorraums V festlegt. Mit diesen Daten werden die affinen Koordinaten $x_1(p), \dots, x_n(p)$ des Punkts p (also die Werte der Funktionen $x_i : M \rightarrow \mathbb{R}$ auf p) durch die Gleichung

$$p = o + (p - o) = o + \sum_{i=1}^n x_i(p) e_i$$

bestimmt. Ändert man das **affine Koordinatensystem** $\{o; e_1, \dots, e_n\}$, so ändern sich die zugehörigen affinen Koordinaten x_i . Die Koordinatendifferentiale dx_i sind von der Wahl von o unabhängig.

Aufgabe. Für einen affinen Raum $(M, V, +)$ seien zwei affine Koordinatensysteme gegeben, nämlich $\{o; e_1, \dots, e_n\}$ und $\{o'; e'_1, \dots, e'_n\}$, mit entsprechenden affinen Koordinaten x_1, \dots, x_n bzw. x'_1, \dots, x'_n . Es existiert dann eine affine Abbildung $f : M \rightarrow M$ mit der Eigenschaft $f(o) = o'$ und $(D_p f)(e_i) = e'_i$ (für alle $p \in M$). Die affinen Koordinaten hängen zusammen über

$$x_i = f^* x'_i \equiv x'_i \circ f.$$

Für $o' = o + \sum_i s_i e_i$ und $e'_j = \sum_i e_i L_{ij}$ folgt die explizite Umrechnungsformel

$$x_i = s_i + \sum_j L_{ij} x'_j, \quad dx_i = \sum_j L_{ij} dx'_j.$$

Kartesische Koordinaten. Sei nun $(M, V, +)$ ein Euklidischer Raum, d.h. ein affiner Raum mit Euklidischem Differenzvektorraum V . In dieser Situation versteht man unter einem Satz kartesischer Koordinaten x_1, \dots, x_n affine Koordinaten $x_i : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit der speziellen Eigenschaft, dass die Basisvektoren e_1, \dots, e_n des zugrunde liegenden affinen Koordinatensystems eine Orthonormalbasis bilden:

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij},$$

also aufeinander senkrecht stehen und alle die Länge Eins haben.

In einem Euklidischen Raum hat man einen Begriff von Abstand zwischen zwei Punkten:

$$d(p, q) := |p - q| = \sqrt{\langle p - q, p - q \rangle}.$$

In kartesischen Koordinaten x_i wird der Abstand $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$d(p, q) = \sqrt{\sum_i (x_i(p) - x_i(q))^2}$$

ausgedrückt. Aus der Koordinatenunabhängigkeit des Abstands folgt, dass die Matrix L_{ij} für den Wechsel zwischen kartesischen Koordinaten x_i und x'_i den Bedingungen

$$\sum_{i=1}^n L_{ij} L_{il} = \delta_{jl}$$

unterliegt. Solche Matrizen heißen orthogonal. Sie bilden die orthogonale Gruppe O_n .

1.2 Galilei-Raum-Zeit

In der (nicht-relativistischen) klassischen Mechanik modelliert man die Struktur von Raum und Zeit durch die sogenannte Galilei-Raum-Zeit. Dieses mathematische Modell taugt, solange die Lichtgeschwindigkeit c als unendlich groß betrachtet werden kann, also für den Zweck der Beschreibung physikalischer Vorgänge mit im Vergleich zu c sehr kleinen Geschwindigkeiten. Das Galilei-Modell wird verbessert durch das Minkowski-Modell der speziellen Relativitätstheorie und schließlich, in Anwesenheit sehr starker Gravitation, durch das dynamische Raum-Zeit-Modell der allgemeinen Relativitätstheorie von Einstein.

Definition. Unter dem Galilei-Modell der Raum-Zeit (kurz: Galilei-Raum-Zeit) verstehen wir einen 4-dimensionalen affinen Raum $(M, V, +)$ mit zwei besonderen Eigenschaften:

- (i) Auf V existiert eine ausgezeichnete Linearform τ , die absolute Zeit.
- (ii) Der Untervektorraum $V_0 = \{v \in V \mid \tau(v) = 0\}$ aller Raum-Translationen ist Euklidisch.

Die folgenden Erläuterungen sollen aufzeigen, was in dieser Definition steckt.

Gleichförmig geradlinige Bewegung. Affine Räume $(M, V, +)$ enthalten affine Unterräume. Die affinen Unterräume der Dimension 1 sind Geraden:

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M, \quad s \mapsto A + sv \quad (v \in V). \tag{1.1}$$

Im Fall der Galilei-Raum-Zeit hat jede solche Gerade (für $\tau(v) \neq 0$) die physikalische Interpretation einer gleichförmig geradlinigen (oder unbeschleunigten) Bewegung. Der Begriff der gleichförmig geradlinigen Bewegung ist im Galilei-Modell also **invariant** (d.h. koordinatenfrei) erklärt und somit physikalisch sinnvoll. Zu seiner Definition – darauf sei hier explizit hingewiesen – wird weder die absolute Zeit τ noch das Euklidische Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ benötigt.

Trägheitsgesetz. Die affine Struktur der Galilei-Raum-Zeit gestattet es, das 1. Newtonsche Gesetz (auch Trägheitsgesetz genannt) koordinatenfrei zu formulieren:

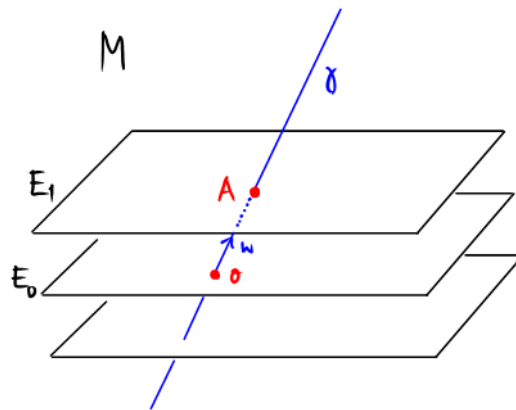
$$\boxed{\text{Kräftefreie Bewegung ist gleichförmig geradlinig.}} \quad (1.2)$$

In Vorbereitung auf die nächsten Überlegungen fügen wir hier noch an, dass jedem Paar von Punkten $(A, B) \in M \times M$ eine (bis auf Reparametrisierung) eindeutige Gerade $\gamma_{B,A} : \mathbb{R} \rightarrow M$ zugeordnet ist. Mit der Konvention $\gamma_{B,A}(0) = A$ und $\gamma_{B,A}(1) = B$ wird sie parametrisiert durch

$$\gamma_{B,A}(s) = A + s(B - A). \quad (1.3)$$

Absolute Zeit. Die “Punkte” der Galilei-Raum-Zeit sind natürlich **Ereignisse** oder Weltpunkte, die durch die Angabe von Ort und Zeit spezifiziert werden. Die Anwendung der Linearform τ auf den Differenzvektor $A - B$ zweier Ereignisse $A, B \in M$ ergibt die **objektive** (d.h. vom Beobachter unabhängige) Zeitdifferenz zwischen A und B .

Mittels der absoluten Zeit τ wird die Galilei-Raum-Zeit in 3-dimensionale affine Unterräume E eingeteilt, in denen jeweils alle gleichzeitigen Ereignisse zusammengefasst sind. Man nennt jeden solchen Unterraum E auch ein Blatt der durch τ gegebenen **Blätterung** der Galilei-Raum-Zeit.



Durch die Wahl (irgend-)einer Geraden, sagen wir $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M, s \mapsto o + sw$, erhalten wir eine **Eins-zu-Eins-Korrespondenz** ($s \leftrightarrow E_s$) zwischen \mathbb{R} und der entsprechenden Blätterung durch

$$E_s := \{A \in M \mid \tau(A - o - sw) = 0\}. \quad (1.4)$$

Per Definition von E_s gilt $A - B \in V_0$ für $(A, B) \in E_s \times E_s$. Somit hat jeder affine Unterraum $E_s \subset M$ den Vektorraum V_0 als Differenzvektorraum, und das auf V_0 gegebene **Skalarprodukt** $\langle \cdot, \cdot \rangle$ stattet jedes Blatt $(E_s, V_0, +)$ mit der Struktur eines 3-dimensionalen Euklidischen Raumes aus, d.h. die Operationen von Längen- und Winkelmessung sind auf jedem E_s erklärt. All diese

Blätter sind **isomorph** (d.h. identische Kopien voneinander), allerdings nicht kanonisch isomorph, wie wir jetzt ausführen werden.

Äther & absoluter Raum. Motiviert durch die Entdeckung **elektromagnetischer Wellen** (und der Frage nach einem Medium, worin sich diese ausbreiten könnten, so wie es Druckwellen in einer Flüssigkeit tun) diskutierten Physiker in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts die mögliche Existenz einer “Ur-Flüssigkeit”, des sogenannten **Äthers**. Obschon die Äther-Idee nach experimenteller und theoretischer Falsifizierung verworfen wurde, soll hier gleichwohl angedeutet werden, welche Konsequenzen die Existenz eines Äthers für die Galilei-Raum-Zeit hätte.

Gäbe es den Äther und seine Konstituenten, dann hätte man mit den Weltlinien der Äther-Teilchen eine ausgezeichnete Form von gleichförmig geradliniger Bewegung (und somit einen Begriff von **absoluter Ruhe**). Die Geradenschar der Äther-Weltlinien gäbe der Galilei-Raum-Zeit eine zweite, räumliche Blätterung (neben der zeitlichen Blätterung durch τ): jede Äther-Weltlinie wäre eine Gerade von Weltpunkten oder Ereignissen, die am gleichen Ort stattfinden.

Die räumliche Blätterung durch den Äther würde es auch ermöglichen, jeder gleichförmig geradlinigen Bewegung in invarianter Weise eine **Geschwindigkeit** zuzuordnen. Das könnten wir dadurch bewerkstelligen, dass wir eine Projektionsabbildung σ einführen:

$$\sigma : V \rightarrow V_0, \quad v \mapsto v - u \frac{\tau(v)}{\tau(u)}, \quad (1.5)$$

wobei $0 \neq u \in V$ irgendein Generator der Schar von Äther-Weltlinien ist. Mit dieser **Projektion** würden wir dann der gleichförmig geradlinigen Bewegung $\gamma_{B,A}$ durch A und B die Geschwindigkeit

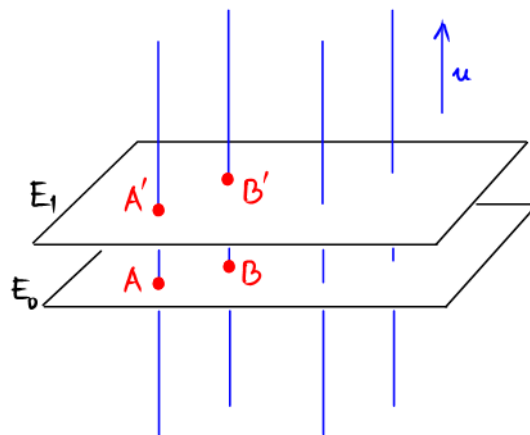
$$v = \sigma(B - A)/\tau(B - A) \quad (1.6)$$

zuweisen. v hätte die physikalische Bedeutung von Geschwindigkeit *relativ zum Äther*.

Schließlich ergäbe der in absoluter Ruhe befindliche Äther einen **kanonischen Isomorphismus**

$$E_s \rightarrow E_{s'}, \quad A \mapsto A + u \frac{s' - s}{\tau(u)} \quad (1.7)$$

zwischen jedem Paar von Blättern E_s und $E_{s'}$ der zeitlichen Blätterung durch τ .



Kein Äther. Nach diesem gedanklichen Ausflug kehren wir zur physikalischen Realität zurück. In der Physik ist man sich heute einig, dass (i) der Äther nicht existiert, (ii) kein Zustand absoluter Ruhe ausgezeichnet ist und (iii) jeder gleichförmig geradlinigen Bewegung nur eine vom

Bezugssystem abhängige Geschwindigkeit zugeordnet werden kann. Diese Einigkeit beruht u.a. auf der Erkenntnis, dass das Galilei-Modell letztendlich durch die Relativitätstheorie zu ersetzen ist (wobei aber mit dem absoluten Raum gleich auch noch die absolute Zeit abgeschafft wird).

1.3 Galilei-Transformationen

Das Thema dieses Abschnitts ist eine spezielle Klasse von Abbildungen $g : M \rightarrow M$ der Galilei-Raum-Zeit auf sich. Diese Klasse wird dadurch charakterisiert, dass ihre Elemente die invariant erklärten Strukturen der Galilei-Raum-Zeit – nämlich die affine Struktur $+$, die absolute Zeit τ und die Euklidische Geometrie $\langle \cdot, \cdot \rangle$ von V_0 – invariant lassen. Solche Abbildungen g heißen **Galilei-Transformationen**. In den folgenden Absätzen werden wir sie näher beschreiben.

1. Invarianz der affinen Struktur. Wie oben erläutert wurde, ist das Galilei-Modell der Raum-Zeit mit einer invariant erklärten affinen Struktur ausgestattet. Als strukturerhaltende Abbildungen haben Galilei-Transformationen $g : M \rightarrow M$ alle affinen Unterräume von M wieder auf ebensolche abzubilden. Insbesondere müssen gleichförmig geradlinige Bewegungen (kurz: Geraden in M) wieder in ebensolche überführt werden. Jede Galilei-Transformation ist also **affin**.

Wie wir schon wissen, lässt sich jede affine Abbildung $g : M \rightarrow M$ in der Form

$$g(p) = g(o) + L(p - o) \quad (o \in M \text{ beliebig, aber fest gewählt}) \quad (1.8)$$

ausdrücken. Hierbei ist $L : V \rightarrow V$ das Differential $L = D_{\bullet}g$ von g .

Aufgabe. Zeige, dass das Bild einer Ebene

$$S : \mathbb{R}^2 \rightarrow M, \quad (s, t) \mapsto p + su + tv \quad (u, v \in V), \quad (1.9)$$

unter $g(\bullet) = g(o) + L(\bullet - o)$ wieder eine Ebene ist.

2. Invarianz von τ . Im Unterschied zu allgemeinen affinen Abbildungen unterliegen Galilei-Transformationen g zweitens der Forderung, dass sie die absolute Zeit τ (und somit auch die durch τ gegebene Blätterung der Galilei-Raum-Zeit) invariant lassen. Zwei Ereignisse A und B mit dem zeitlichen Abstand $\tau(B - A)$ werden also auf zwei Ereignisse $g(A)$ und $g(B)$ mit der **gleichen Zeitdifferenz** $\tau(g(B) - g(A)) = \tau(B - A)$ abgebildet. In Formeln gilt (mit dem Hinweis, dass τ als Linearform auf V nicht mit g sondern dem Differential L von g zu transformieren ist):

$$L^*\tau \equiv \tau \circ L = \tau. \quad (1.10)$$

Insbesondere ändert sich die Äquivalenzrelation der Gleichzeitigkeit von Ereignissen nicht, und jede Raumtranslation $v \in V_0$ bleibt eine Raumtranslation $Lv \in V_0$, also

$$LV_0 \subset V_0. \quad (1.11)$$

Warnung. In Vorschau auf die Lorentz-Transformationen des Minkowski-Modells der speziellen Relativitätstheorie ersetzen die Lehrbücher oft $L^*\tau = \tau$ durch die schwächere Bedingung $L^*\tau^2 =$

τ^2 , also $L^*\tau = \pm\tau$. Man erlaubt somit, dass Galilei-Transformationen die Zeitrichtung umkehren. Ohne großen Verlust verzichten wir hier auf diese Allgemeinheit und arbeiten nur mit dem **orthochronen** Teil der Galilei-Gruppe (ohne Zeitumkehr).

3. Invarianz von $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Wegen $LV_0 \subset V_0$ ist die eingeschränkte Abbildung $R \equiv L|_{V_0}$ eine lineare Abbildung $R : V_0 \rightarrow V_0$. Die dritte und letzte Forderung an Galilei-Transformationen lautet, dass die durch $\langle \cdot, \cdot \rangle$ gegebene **Euklidische Geometrie** invariant bleibt. Man verlangt demnach

$$\langle Rv, Rv' \rangle = \langle v, v' \rangle \quad (\text{für alle } v, v' \in V_0), \quad (1.12)$$

woraus folgt, dass R eine orthogonale Transformation (oder **Drehung**) von V_0 ist.

Resumée. Wir fassen kurz zusammen. 1) Jede Galilei-Transformation $g : M \rightarrow M$ ist eine affine Abbildung. 2) Der lineare Teil $L = D_\bullet g$ transformiert den Unterraum $V_0 \subset V$ räumlicher Translationen in sich. 3) Der eingeschränkte lineare Teil $R = L|_{V_0}$ ist eine Drehung.

Aufgabe. Zeige, dass die Menge der Galilei-Transformationen eine Gruppe bildet. \square

Um den Ausdruck für Galilei-Transformationen weiter aufzuschlüsseln, benötigen wir eine **Raum-Zeit-Zerlegung**, d.h. eine Zerlegung von V in V_0 und einen zu V_0 komplementären Vektorraum V_1 der Dimension Eins. Leider gibt es keine kanonische Wahl von V_1 . (Beachte: da das Euklidische Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ zwar auf dem Vektorraum V_0 der Raum-Translationen invariant erklärt ist, nicht aber auf dem Vektorraum V aller Raum-Zeit-Translationen, haben wir keine Handhabe für die Konstruktion eines orthogonalen Komplements von V_0 in V . Abhilfe würde hier der Äther schaffen ...) Um weiter zu kommen, müssen wir irgendein V_1 willkürlich auswählen. Wir setzen $V_1 = \mathbb{R}v$ für ein beliebiges, aber festes $v \in V$ mit $\tau(v) \neq 0$ und schreiben

$$V = V_0 \oplus V_1 \quad (\text{direkte Summe}). \quad (1.13)$$

Physikalisch gesprochen bedeutet die willkürliche Wahl von V_1 die Entscheidung für ein Bezugssystem; genauer: die Auszeichnung einer gleichförmig geradlinigen Bewegung mit Weltrichtung v .

Durch die Wahl (1.13) wird der lineare Teil $L : V \rightarrow V$ der Galilei-Transformation in vier Stücke zerlegt:

$$L|_{V_0 \rightarrow V_0} = R, \quad L|_{V_0 \rightarrow V_1} = \mathbf{0}, \quad L|_{V_1 \rightarrow V_0} =: w, \quad L|_{V_1 \rightarrow V_1} = 1. \quad (1.14)$$

Die letzte (wie die zweite) Gleichung ist eine Konsequenz von $L^*\tau = \tau$. In **Blockform** haben wir

$$L = \begin{pmatrix} R & w \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

Untergruppen. Für den späteren Gebrauch seien hier zwei ausgesuchte Untergruppen der Galilei-Gruppe erwähnt. (i) Die Gruppe Euklidischer Bewegungen g (kurz: **Euklidische Gruppe**) ergibt sich durch die Einschränkung $w \equiv \mathbf{0}$ und die Forderung, dass g jedes Blatt der τ -Blätterung in sich transformiert (also nur Raumtranslationen zugelassen sind). (ii) Die Wahl $R \equiv \text{Id}_{V_0}$ zusammen mit der Forderung $g(o) = o$ definiert die Untergruppe **spezieller Galilei-Transformationen**.

Nach der Präsentation der Galilei-Gruppe und zweier Untergruppen aus invarianter Sicht wenden wir uns nun der Beschreibung in **Koordinaten** zu. Sei dazu $x_0, x_1, x_2, x_3 : M \rightarrow \mathbb{R}$ ein Satz von Koordinatenfunktionen. Wir können den Effekt einer Galilei-Transformation g rechnerisch erfassen, indem wir sie auf die Koordinaten (anstelle des Ereignisraums M) anwenden. Bekanntlich geht jede Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ (so auch jede Koordinatenfunktion) unter einer Abbildung $g : M \rightarrow M$ in ihren durch $(g^*f)(p) := f(g(p))$ definierten **Pullback** g^*f über. Wir betrachten jetzt also

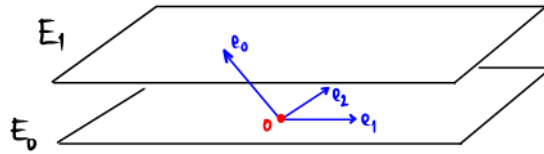
$$g^*x_\mu = x_\mu \circ g \quad (\mu = 0, 1, 2, 3). \quad (1.16)$$

Für die Konkretisierung von g^*x_μ mittels der oben etablierten Eigenschaften von g ist es geschickt, gut angepasste Koordinaten zu verwenden. Hierzu zunächst eine Vorbereitung.

Definition. Wir nennen ein affines Koordinatensystem $\{o; e_0, e_1, e_2, e_3\}$ von $(M, V, +)$ ein **Galilei-System**, wenn die folgenden Zusatzeigenschaften erfüllt sind:

- (i) $\tau(e_0) = 1, \quad \tau(e_1) = \tau(e_2) = \tau(e_3) = 0,$
- (ii) $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3).$

In Worten: die drei Vektoren e_1, e_2, e_3 sind Raumtranslationen und bilden eine Orthonormalbasis von V_0 . Der vierte Basisvektor e_0 bewirkt eine Translation der Zeit um eine Zeiteinheit.



Bemerkung. Die Wahl von e_0 bestimmt eine Raum-Zeit-Zerlegung $V = V_0 \oplus \mathbb{R}e_0$. \square

Wir wählen unsere Raum-Zeit-Koordinaten x_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) jetzt als die affinen Koordinaten eines Galilei-Systems, und wir setzen $Re_j = \sum_i e_i R_{ij}$ und $(Le_0)|_{V_0} = \sum_i w_i e_i$. Zudem bemerken wir, dass gilt $(dx_0)_\bullet = \tau$. Mit $(g^*dx_\mu)_\bullet = L^*(dx_\mu)_\bullet$ folgen dann aus (1.14) die Gleichungen

$$g^*dx_0 = dx_0, \quad g^*dx_i = \sum_j R_{ij} dx_j + w_i dx_0. \quad (1.17)$$

Integration dieser differentiellen Beziehungen führt zum Ergebnis

$$g^*x_0 = x_0 + a_0, \quad g^*x_i = \sum_j R_{ij} x_j + w_i x_0 + a_i. \quad (1.18)$$

Die physikalische Bedeutung der Integrationskonstanten $a_\mu \in \mathbb{R}$ erschließt sich aus

$$x_\mu(g(o)) = (g^*x_\mu)(o) = a_\mu. \quad (1.19)$$

Die Zahlen a_μ sind also die Koordinaten (im gewählten Galilei-System x_μ mit Koordinatenursprung o) des Galilei-transformierten Weltursprungs $g(o)$. Anders ausgedrückt ist a_i (bzw. a_0) die durch g bewirkte Raumtranslation (bzw. Zeittranslation) von o in Richtung von e_i (bzw. e_0).

1.4 Newtonsches Bewegungsgesetz

Bisher haben wir mit dem vollen Galilei-Modell der 4-dimensionalen affinen Raum-Zeit gearbeitet und die Nichtexistenz des Äthers und einer kanonischen Raum-Zeit-Zerlegung stark betont. Um die weitere Behandlung transparent zu gestalten, rücken wir von dieser umfassenden (und letztendlich zu anstrengenden) Gesamtschau ab und lassen uns auf eine konkrete Raum-Zeit-Zerlegung ein. Wir treffen jetzt also irgendeine feste Wahl $V = V_0 \oplus \mathbb{R}e_0$. Außerdem fixieren wir ein Blatt E_0 der τ -Blätterung der Galilei-Raum-Zeit M und erklären dieses Blatt zur **Standardkopie** des dreidimensionalen Euklidischen Raumes: $E_3 \equiv (E_0, V_0, +, \langle \cdot, \cdot \rangle) \subset M$. Mit diesen Festlegungen haben wir dann einen **Isomorphismus**

$$E_3 \times \mathbb{R} \rightarrow M, \quad (p, t) \mapsto p + te_0. \quad (1.20)$$

Über diesen Isomorphismus entsorgen wir M und arbeiten fortan nur noch mit dem Raum-Zeit-zerlegten Galilei-Modell $E_3 \times \mathbb{R}$. Dabei kommt uns zustatten, dass wir den Ausdruck für Galilei-Transformationen nach erfolgter $(E_3 \times \mathbb{R})$ -Zerlegung bereits kennen; siehe (1.14) und (1.18).

Bewegung im E_3 . Unter einer **Bewegung** eines Punktes (d.h. eines ausdehnungslosen Körpers) versteht man primär eine differenzierbare Kurve

$$\Gamma : \mathbb{R} \rightarrow E_3 \times \mathbb{R} \simeq M, \quad s \mapsto (p(s), t(s)). \quad (1.21)$$

Jedoch ist diese Formulierung für diesen meisten Zwecke noch unnötig aufwändig. Um es einfacher zu machen, identifizieren wir nach Reparametrisierung $p(s) \equiv \gamma(t(s))$ die Zeitkoordinate t mit s und schreiben

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow E_3, \quad t \mapsto \gamma(t). \quad (1.22)$$

So erhält der Kurvenparameter t die konkrete Bedeutung der physikalischen Zeit.

Die **Geschwindigkeit** der Bewegung des Punktes ist dann die erste Zeitableitung

$$\dot{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow V_0, \quad t \mapsto \frac{d\gamma}{dt}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}, \quad (1.23)$$

und die **Beschleunigung** der Punktbeugung ist die zweite Zeitableitung

$$\ddot{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow V_0, \quad t \mapsto \frac{d^2\gamma}{dt^2}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+h) - 2\gamma(t) + \gamma(t-h)}{h^2}. \quad (1.24)$$

Das Bild von γ in E_3 heißt auch die **Trajektorie** der Bewegung.

N -Körpersystem. Im Nachfolgenden betrachten wir ein System von N punktförmigen Körpern (oder realistischer: von Körpern mit vernachlässigbar kleiner Ausdehnung; kurz: Punkten), die miteinander wechselwirken, also Kräfte aufeinander ausüben. Wir indizieren die Punkte durch $i = 1, 2, \dots, N$ und bezeichnen die **Masse** des i -ten Punktes mit m_i ; die Bewegung desselben sei durch eine Kurve $\gamma_i : \mathbb{R} \rightarrow E_3$ gegeben. Die Bewegung des Gesamtsystems ist dann die Abbildung

$$\mathbb{R} \rightarrow E_3 \times E_3 \times \dots \times E_3 \equiv (E_3)^N, \quad t \mapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_N(t)). \quad (1.25)$$

Newton'sches Bewegungsgesetz. Für den Fall des eben eingeführten N -Körpersystems lautet das **2. Newtonsche Gesetz** (auch Bewegungsgesetz genannt):

$$m_i \langle \ddot{\gamma}_i(t), \bullet \rangle = F_i(\gamma_1(t), \dots, \gamma_N(t), \dot{\gamma}_1(t), \dots, \dot{\gamma}_N(t); t) \quad (i = 1, \dots, N). \quad (1.26)$$

Hierbei steht F_i für die (fundamental als **Linearform** $F_i : V_0 \rightarrow \mathbb{R}$ erklärte) Kraft auf den i -ten Punkt. Nach dem Bewegungsgesetz ist diese Kraft gleich der ins Euklidische Skalarprodukt eingesetzten und mit der (trägen) Masse m_i multiplizierten Beschleunigung des i -ten Punkts. Die zur Zeit t wirkenden Kräfte F_i sind im allgemeinen abhängig von den Orten $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ der Massenpunkte zur Zeit t , von ihren Geschwindigkeiten $\dot{\gamma}_1, \dots, \dot{\gamma}_N$ zur Zeit t , und von der Zeit t selbst. Von den Beschleunigungen und höheren Zeitableitungen hängen die Kräfte nicht ab.

Prinzip der Determiniertheit. Unter dem **Zustand** des N -Körpersystems verstehen wir die Gesamtheit seiner Orte $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ und Geschwindigkeiten $\dot{\gamma}_1, \dots, \dot{\gamma}_N$. Mit dieser Vokabel (und gewissen Einschränkungen an die Kräfte, so dass der einschlägige Existenz- und Eindeutigkeitsatz aus der Lösungstheorie für Differentialgleichungen anwendbar wird) resultiert aus dem Newton'schen Bewegungsgesetz das Prinzip der Determiniertheit: *die Bewegung eines N -Körpersystems ist durch seinen Anfangszustand (d.h. den Zustand zu einer Anfangszeit t_0) völlig bestimmt.*

1.5 Galileisches Relativitätsprinzip

Ausgestattet mit dem in Abschnitt 1.3 erarbeiteten Verständnis der Galilei-Gruppe (und unter Zugrundelegung des Galilei-Modells für den Raum und die Zeit) formulieren wir jetzt das **Galileische Relativitätsprinzip**:

$$\boxed{\text{Die Naturgesetze sind Galilei-invariant.}} \quad (1.27)$$

(Galilei-Invarianz meint hier die Invarianz unter der Wirkung aller Galilei-Transformationen.) Dieses Prinzip wollen wir anhand des Newton'schen Bewegungsgesetzes für N -Körpersysteme erläutern. Sei dazu

$$\gamma : t \mapsto (\gamma_1(t), \dots, \gamma_N(t)) \quad (1.28)$$

eine N -Körperbewegung, die dem Newton'schen Bewegungsgesetz genügt, d.h. die Differentialgleichung (1.26) löst. Dann verlangt das Galileische Relativitätsprinzip, dass mit der Bewegung γ auch jede Galilei-transformierte Bewegung $g \circ \gamma$ eine Lösung von (1.26) ist.

Um dieses Postulat konkret umzusetzen, müssen wir verstehen, was genau mit $g \circ \gamma$ gemeint ist und was mit den Kräften F_i auf der rechten Seite von (1.26) unter Galilei-Transformationen passiert. Leider gestalten sich die nötigen Erläuterungen etwas umständlich, wenn wir an der koordinatenfreien Formulierung festhalten. (Wir haben die allgemeine Galilei-Transformation (1.8) in **$(E_3 \times \mathbb{R})$ -Zerlegung** anzuwenden. Das geht mittels (1.18) schneller als mittels (1.14), wo zum angegebenen linearen Teil noch der konstante, translatorische Anteil hinzuzufügen wäre.) Aus diesem Grund – und auch aus anderen auf der Hand liegenden pädagogischen Gründen – begeben wir hier den Stilbruch, zur koordinatenabhängigen Formulierung zu wechseln.

Koordinatendarstellung. Seien also x_μ die affinen Koordinaten zu einem fest gewählten Galilei-System $\{o; e_0, e_1, e_2, e_3\}$. Wir setzen $x_0 \equiv t$ und schreiben (1.18) in **Matrix- und Spaltenvektor-**Notation um:

$$g^*t = t + b, \quad g^*\mathbf{x} = R\mathbf{x} + \mathbf{w}t + \mathbf{a}. \quad (1.29)$$

Die neuen Symbole stehen für

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{32} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad (1.30)$$

und $b \equiv a_0$. Natürlich ist \mathbf{x} ein Spaltenvektor von Koordinatenfunktionen, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ hingegen ein Spaltenvektor von Zahlen. Weiter setzen wir

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{x} \circ \gamma_i. \quad (1.31)$$

Per Konstruktion ist jedes \mathbf{r}_i ($i = 1, \dots, N$) eine Abbildung $\mathbf{r}_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Die Geschwindigkeit $\dot{\gamma}_i$ und Beschleunigung $\ddot{\gamma}_i$ des i -ten Punkts werden jetzt ausgedrückt durch

$$\dot{\mathbf{r}}_i(t) = (d\mathbf{x})_\bullet(\dot{\gamma}_i(t)), \quad \ddot{\mathbf{r}}_i(t) = (d\mathbf{x})_\bullet(\ddot{\gamma}_i(t)). \quad (1.32)$$

Außerdem rechnen wir die Kraftformen $F_i \in V_0^*$ in Spaltenvektoren $\mathbf{F}_i \in \mathbb{R}^3$ um:

$$F_i =: \langle \vec{F}_i, \bullet \rangle \quad \text{und} \quad \mathbf{F}_i := (d\mathbf{x})_\bullet(\vec{F}_i). \quad (1.33)$$

Das Newtonsche Bewegungsgesetz nimmt dann die folgende Gestalt an:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i(t) = \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_N(t), \dot{\mathbf{r}}_1(t), \dots, \dot{\mathbf{r}}_N(t); t) \quad (i = 1, \dots, N). \quad (1.34)$$

Eine Galilei-Transformation g wirkt auf Zeit, Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung in dieser Koordinatendarstellung wie

$$g : t \mapsto t + b, \quad \mathbf{r}_i \mapsto R\mathbf{r}_i + \mathbf{w}t + \mathbf{a}, \quad \dot{\mathbf{r}}_i \mapsto R\dot{\mathbf{r}}_i + \mathbf{w}, \quad \ddot{\mathbf{r}}_i \mapsto R\ddot{\mathbf{r}}_i. \quad (1.35)$$

Abgeschlossene Systeme. Wir sind jetzt fast soweit, dass wir eine konkrete Folgerung aus dem Galileischen Relativitätsprinzip für N -Körpersysteme ziehen können. Als letzte Vorbereitung benötigen wir hierzu noch eine Definition: ein N -Körpersystem heißt **abgeschlossen**, wenn die Kräfte, die zwischen den N Körpern des Systems und weiteren (in der mathematischen Beschreibung nicht explizit enthaltenen) Körpern wirken, vernachlässigt werden können. Zum Beispiel darf die Erde für manche Zwecke (wenn die Gezeitenwirkung des Mondes keine Rolle spielt, usw.) in brauchbarer Näherung als abgeschlossenes N -Körpersystem betrachtet werden.

Galilei-Äquivalenz der Kräfte. Die obige Rephrasierung des Galileischen Relativitätsprinzips, nämlich dass Lösungen der Newtonschen Bewegungsgleichung (1.34) unter Galilei-Transformationen wieder Lösungen ergeben müssen, trifft genau gesprochen dann und nur dann zu, wenn das N -Körpersystem abgeschlossen ist. Unter der Annahme der Abgeschlossenheit stellen wir jetzt

eine Bedingung auf, welche die Form der zwischen den N Körpern des Systems wirkenden Kräfte einschränkt. Dazu setzen wir die allgemeine Galilei-Transformation in Koordinatendarstellung (1.35) in die Newtonsche Bewegungsgleichung (1.34) ein und multiplizieren beide Seiten der Gleichung mit R^{-1} . Aus dem Galileischen Relativitätsprinzip folgt dann die Bedingung

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N; t) = \\ R^{-1} \mathbf{F}_i(R \mathbf{r}_1 + \mathbf{w}t + \mathbf{a}, \dots, R \mathbf{r}_N + \mathbf{w}t + \mathbf{a}, R \dot{\mathbf{r}}_1 + \mathbf{w}, \dots, R \dot{\mathbf{r}}_N + \mathbf{w}; t + b) \end{aligned} \quad (1.36)$$

an die Kräfte eines abgeschlossenen Systems. In der Tat wird hierdurch gesichert, dass zwischen Lösungen und Galilei-transformierten Lösungen eine Eins-zu-Eins-Korrespondenz besteht, wie es das Relativitätsprinzip verlangt. Mathematisch gesprochen besagt (1.36), dass die Kräfte \mathbf{F}_i **äquivariant** bezüglich Galilei-Transformationen (kurz: Galilei-äquivariant) sein müssen.

Zum Ausschlichten der Bedingung (1.36) ist es geschickt, **Spezialisierungen** auf geeignete Untergruppen der Galilei-Gruppe vorzunehmen: (i) Aus der Invarianz unter Zeittranslationen $t \rightarrow t + b$ folgt sofort, dass die Kräfte \mathbf{F}_i nicht explizit von der Zeit abhängen. (ii) Aus der Invarianz unter Raumtranslationen $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{a}$ folgt, dass die \mathbf{F}_i von den Orten nur über deren Differenzen $\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l$ abhängen. (iii) Nimmt man jetzt noch die Invarianz unter speziellen Galilei-Transformationen $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{w}t$ hinzu, dann folgt, dass die \mathbf{F}_i auch von den Geschwindigkeiten nur über deren Differenzen $\dot{\mathbf{r}}_j - \dot{\mathbf{r}}_l$ abhängen. (iv) Aus der Äquivarianz bezüglich Drehungen R folgt, dass sich \mathbf{F}_i kurz gesagt “wie ein Vektor transformiert”.

Ergänzung. Um die letzte Aussage zu vertiefen, betrachten wir ein abgeschlossenes System von 2 Punkten, \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 . Infolge der Invarianz unter Zeittranslationen, Raumtranslationen und speziellen Galilei-Transformationen existiert nach dem Obigen eine Funktion $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, welche die funktionale Abhängigkeit von \mathbf{F}_{12} folgendermaßen ausdrückt:

$$\mathbf{F}_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2; t) = \Phi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2). \quad (1.37)$$

Die geforderte Dreh-Äquivarianz impliziert dann für die Hilfsfunktion Φ die Bedingung

$$R \Phi(u, v) = \Phi(Ru, Rv). \quad (1.38)$$

Hieraus folgt (unter Zuhilfenahme der Theorie von Invarianten der Drehgruppe)

$$\Phi(u, v) = u \varphi_1(u, v) + v \varphi_2(u, v), \quad (1.39)$$

mit zwei drehinvarianten Funktionen φ_j ($j = 1, 2$), die nur vom Abstand $|u| = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$, vom Absolutbetrag der Geschwindigkeitsdifferenz $|v| = |\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2|$ und vom Skalarprodukt $\langle u, v \rangle = \langle \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2 \rangle$ abhängen. Im Fall einer geschwindigkeitsunabhängigen Kraft resultiert

$$\mathbf{F}_{12} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \varphi(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|). \quad (1.40)$$

Beispiel. Nach dem universellen **Gravitationsgesetz** von Newton wirkt zwischen zwei Punkt-massen die Kraft

$$\mathbf{F}_{12} = -Gm_1m_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}. \quad (1.41)$$

1.6 Erhaltungssätze im abgeschlossenen N -Körpersystem

Nach dem obigen Ausflug in die Koordinatensprache setzen wir unsere koordinatenunabhängige Untersuchung von N -Körpersystemen fort und setzen Abgeschlossenheit fürs erste nicht voraus. Wie zuvor bezeichnen wir Bahnkurven mit $t \mapsto \gamma(t) \in E_3$.

1.6.1 Impuls- und Schwerpunktsatz

Definition. Ein Punkt der Masse m am Ort $\gamma(t)$ mit der Geschwindigkeit $v = \dot{\gamma}$ hat den **Impuls** $p = \langle mv, \cdot \rangle$. Der Gesamtimpuls eines Systems von Massenpunkten ist die Summe $P = \sum_i p_i$.

Bemerkung. Geschwindigkeit ist ein Vektor (oder **kontravarianter** Vektor) $v \in V$ im Vektorraum der Raumtranslationen $V \simeq \mathbb{R}^3$. Hingegen ist Impuls eine Linearform oder **kovarianter** Vektor, $p \in V^*$ (Dualraum). Für die invariante Paarung zwischen der Linearform p und dem Vektor v schreiben wir

$$V^* \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad (p, v) \mapsto p(v) \equiv p \cdot v \equiv p_a v^a, \quad (1.42)$$

wobei im letzten Ausdruck die Summenkonvention gilt, d.h. es wird über das Produkt der Komponenten bzgl. einer Basis von V bzw. der Dualbasis von V^* summiert ($a = 1, 2, 3$). \square

Das Newtonsche **Bewegungsgesetz** lautet $\dot{p} = F$. Die Zeitableitung des Impulses ist also gleich der Kraft (ebenfalls eine Linearform). Für ein System von N Massenpunkten haben wir N Gleichungen

$$\dot{p}_i = F_i \quad (i = 1, \dots, N). \quad (1.43)$$

Es ist nun zweckmäßig, die auf den i -ten Massenpunkt wirkende Kraft F_i in zwei Teile aufzuspalten: einen **internen** Anteil, der von den übrigen $N - 1$ Massenpunkten des Systems an den Orten $\gamma_j(t)$ ($j \neq i$) herrührt, und einen **externen** Anteil, der mögliche Kraftwirkungen von außerhalb des Systems berücksichtigt. Wir schreiben F_{ij} für die Kraft des j -ten Punkts auf den i -ten Punkt. Die auf den i -ten Punkt wirkenden externen Kräfte fassen wir in F_i^{ext} zusammen. Die Newtonsche Bewegungsgleichung (1.43) für den i -ten Massenpunkt lautet dann

$$\dot{p}_i = \sum_{j \neq i} F_{ij} + F_i^{\text{ext}}. \quad (1.44)$$

An dieser Stelle ist ein Einschub fällig.

Actio = Reactio. In seinen *Principia* schreibt Newton: “Kräfte treten immer paarweise auf. Übt ein Körper A auf einen Körper B eine Kraft aus (*actio*), so wirkt eine gleich große, aber entgegen gerichtete Kraft von Körper B auf Körper A (*reactio*).” Diese Aussage heißt auch das **3. Newtonsche Gesetz**. In unserem Kontext wird es durch die folgende Formel ausgedrückt:

$$\boxed{F_{ij} = -F_{ji}}. \quad (1.45)$$

Das dritte ist vielleicht das tiefste der Newtonschen Gesetze; jedenfalls behält es (richtig interpretiert) seine Gültigkeit auch außerhalb des Gültigkeitsbereichs der Newtonschen Mechanik.

Bemerkung. Für identische Teilchen folgt (1.45) aus (1.39) in Verbindung mit der Symmetrie unter Teilchenaustausch.

Impulssatz. Summieren wir nun beide Seiten von (1.44) über den Körperindex i und benützen $F_{ij} = -F_{ji}$, so erhalten wir

$$\dot{P} = \sum_{i=1}^N F_i^{\text{ext}}. \quad (1.46)$$

Die Zeitableitung des Gesamtimpulses eines Systems ist also gleich der Summe der auf seine Punkte wirkenden äußeren Kräfte. Da die äußeren Kräfte für ein abgeschlossenes System verschwinden, folgt der Impulssatz:

$$\boxed{\text{Der Gesamtimpuls eines abgeschlossenen Systems ist erhalten.}} \quad (1.47)$$

Definition. Der **Schwerpunkt** Γ eines Systems von Massen m_1, \dots, m_N bestimmt sich als Lösung der Gleichung

$$\sum_{i=1}^N m_i(\gamma_i - \Gamma) = \mathbf{0}, \quad (1.48)$$

d.h. die mit den Massen m_i gewichtete Summe von Differenzvektoren $\gamma_i - \Gamma$ verschwindet.

Schwerpunktsatz. Durch zweimaliges Differenzieren der Gleichung (1.48) nach der Zeit und Einsetzen ins Skalarprodukt entsteht (mit $M = \sum m_i$ der Gesamtmasse)

$$\langle M\ddot{\Gamma}, \cdot \rangle = \sum_i \langle m_i \ddot{\gamma}_i, \cdot \rangle = \sum_i \dot{p}_i = \sum_i F_i^{\text{ext}}. \quad (1.49)$$

Offenbar bewegt sich der Schwerpunkt eines N -Körpersystems so, als ob alle Massen an ihm konzentriert wären und alle äußeren Kräfte an ihm angreifen würden. Für ein abgeschlossenes System ($F_i^{\text{ext}} = 0$) folgt $\ddot{\Gamma} = 0$ und somit

$$\Gamma(t) = \Gamma(0) + t\dot{\Gamma}(0). \quad (1.50)$$

Dieses Resultat nennt man den Schwerpunktsatz:

$$\boxed{\text{Der Schwerpunkt eines abgeschlossenen Systems bewegt sich gleichförmig geradlinig.}} \quad (1.51)$$

1.6.2 Drehimpulssatz

In jedem Euklidischen Vektorraum V hat man durch die Operation des Einsetzens ins Euklidische Skalarprodukt einen kanonischen Isomorphismus zwischen Vektoren und Linearformen. Im Folgenden bezeichnen wir diesen **Isomorphismus** mit \mathcal{I} ; also

$$\mathcal{I} : V \rightarrow V^*, \quad v \mapsto \langle v, \cdot \rangle \equiv \mathcal{I}(v). \quad (1.52)$$

Infinitesimale Drehungen. In aller Kürze nehmen wir hier etwas vorweg, was im Kapitel über starre Körper ausführlich behandelt werden wird. Wie wir schon wissen, ist eine Drehung eine

lineare Abbildung $R : V \rightarrow V$, welche das Skalarprodukt erhält: $\langle Rv, Rv' \rangle = \langle v, v' \rangle$. Betrachten wir nun eine 1-Parametergruppe von Drehungen $R = \exp(\varphi X)$ mit **Generator** X , so gilt

$$\langle e^{\varphi X} v, e^{\varphi X} v' \rangle = \langle v, v' \rangle \quad (1.53)$$

für alle Drehwinkel φ (und alle $v, v' \in V$). Indem wir diese Beziehung nach φ an der Stelle $\varphi = 0$ differenzieren, erhalten wir

$$\langle Xv, v' \rangle + \langle v, Xv' \rangle = 0. \quad (1.54)$$

Aufgabe. Das Tensorprodukt $V \otimes V^*$ taugt bekanntlich als Modell für die linearen Abbildungen $\text{End}(V)$. Zeige, dass jedes $X \in V \otimes V^* \simeq \text{End}(V)$ der Form

$$X = u \otimes \mathcal{I}(u') - u' \otimes \mathcal{I}(u) \quad (1.55)$$

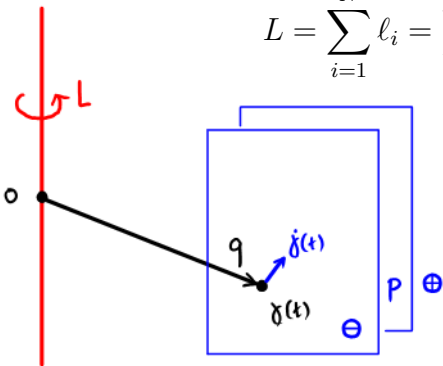
die Gleichung (1.54) löst, also der Generator einer Drehung von V ist.

Definition. Wähle einen **Referenzpunkt** o des Euklidischen Raumes. Der Drehimpuls (bzgl. o) eines Massenpunkts am Ort γ mit dem Impuls $p = \mathcal{I}(m\dot{\gamma})$ ist der durch

$$\ell = p \otimes q - \mathcal{I}(q) \otimes \mathcal{I}^{-1}(p), \quad q = \gamma - o, \quad (1.56)$$

erklärte Tensor zweiter Stufe $\ell \in V^* \otimes V$. Der **Gesamtdrehimpuls** (bzgl. o) eines Systems von N Massenpunkten an den Orten γ_i mit Impulsen $p_i = \mathcal{I}(m_i \dot{\gamma}_i)$ ist die Summe

$$L = \sum_{i=1}^N \ell_i = \sum_{i=1}^N (p_i \otimes q_i - \mathcal{I}(q_i) \otimes \mathcal{I}^{-1}(p_i)), \quad q_i = \gamma_i - o. \quad (1.57)$$



Bemerkungen. (i) Es ist zu beachten, dass der Drehimpuls über die Differenzvektoren $q_i = \gamma_i - o$ von der Wahl des Bezugspunkts o abhängt. Ändert man den Bezugspunkt, so ändert sich der Drehimpuls. (ii) Mit der obigen Aufgabe (und der offensichtlichen Transkription $V \leftrightarrow V^*$) lässt sich der Drehimpuls $L \in V^* \otimes V \simeq \text{End}(V^*)$ als der Generator einer Drehung von V^* interpretieren. (iii) Der Drehimpuls ist in Euklidischen Räumen beliebiger Dimension (nicht nur im E_3) definiert. (iv) Die obige Definition stimmt nur für Kräfte, die von der Geschwindigkeit unabhängig sind. Wir setzen deshalb im Folgenden geschwindigkeitsunabhängige Kräfte voraus.

Aufgabe. Im E_3 hat man eine alternative Formel für den Drehimpuls. Zeige mit dem Ortsvektor \mathbf{r}_i von Abschnitt 1.5 und dem entsprechenden Impulsvektor \mathbf{p}_i , dass der ebenfalls als Vektor aufgefasste Drehimpuls \mathbf{l}_i als Vektorprodukt geschrieben werden kann:

$$\mathbf{l}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i. \quad (1.58)$$

Drehimpulssatz. Wir differenzieren den Drehimpuls des i -ten Punkts nach der Zeit. Von den vier entstehenden Termen heben sich die zwei mit \dot{q}_i wegen $\mathcal{I}(m\dot{q}_i) = p_i$ weg. Unter Verwendung von $\dot{p}_i = F_i$ resultiert

$$\dot{\ell}_i = \dot{p}_i \otimes q_i - \mathcal{I}(q_i) \otimes \mathcal{I}^{-1}(\dot{p}_i) = D_i, \quad (1.59)$$

wobei D_i das am Punkt i angreifende **Drehmoment** bzgl. o ist:

$$D_i = F_i \otimes q_i - \mathcal{I}(q_i) \otimes \mathcal{I}^{-1}(F_i). \quad (1.60)$$

Wir benützen jetzt wieder die Zerlegung der Kraft ($F_i = \sum_{j \neq i} F_{ij} + F_i^{\text{ext}}$) und summieren über i . Zunächst betrachten wir den Beitrag zu $\dot{L} = \sum \dot{\ell}_i$ von den inneren Kräften F_{ij} :

$$\sum_{i \neq j} (F_{ij} \otimes q_i - \mathcal{I}(q_i) \otimes \mathcal{I}^{-1}(F_{ij})) = \sum_{i < j} (F_{ij} \otimes (q_i - q_j) - \mathcal{I}(q_i - q_j) \otimes \mathcal{I}^{-1}(F_{ij})).$$

Der rechte Ausdruck resultiert aus dem linken durch Verwenden von $F_{ij} = -F_{ji}$ und paarweises Zusammenfassen von Termen. Dieser rechte Ausdruck verschwindet, denn für geschwindigkeitsunabhängige Kräfte gilt nach Gleichung (1.40) die lineare Abhängigkeit $F_{ij} \propto \mathcal{I}(q_i - q_j)$. Somit tragen nur die äußeren Kräfte zu \dot{L} bei, und es entsteht

$$\dot{L} = \sum_{i=1}^N D_i^{\text{ext}}, \quad D_i = F_i^{\text{ext}} \otimes q_i - \mathcal{I}(q_i) \otimes \mathcal{I}^{-1}(F_i^{\text{ext}}). \quad (1.61)$$

Die Zeitableitung des Gesamtdrehimpulses (bzgl. o) ist also gleich der Summe der äußeren Drehmomente (bzgl. o). Als Korollar folgt der Drehimpulssatz:

Der Gesamtdrehimpuls eines abgeschlossenen Systems ist erhalten.

(1.62)

Aufgabe. Verschwindet der Gesamtimpuls P eines N -Körpersystems, so ist sein Gesamtdrehimpuls L von der Wahl des Bezugspunkts o unabhängig.

1.6.3 Energiesatz

Als letzten Erhaltungssatz des abgeschlossenen N -Körpersystems behandeln wir den Energiesatz. Für diesen Zweck wollen wir annehmen, dass die inneren Kräfte **konservativ** sind. (Der Energiesatz für den Fall allgemeiner Kraftformen wird in der Lagrange- und Hamilton-Mechanik aufgestellt.) Wir setzen

$$F_{ij} = -(d_i U_{ij})_{(\gamma_i, \gamma_j)}, \quad U_{ij}(\gamma_i, \gamma_j) = \phi(|\gamma_i - \gamma_j|) \quad (\phi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}), \quad (1.63)$$

wobei $d_i U_{ij}$ das Differential der Funktion $U_{ij}: E_3 \times E_3 \rightarrow \mathbb{R}$ bezüglich des linken Orts bezeichnet.

Definition. Die **kinetische Energie** eines Punkts γ_i der Masse m_i ist durch $\frac{1}{2}m_i|\dot{\gamma}_i|^2 \equiv \frac{1}{2}m_i\langle \dot{\gamma}_i, \dot{\gamma}_i \rangle$ gegeben. Die kinetische Energie eines Systems ist $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\dot{\gamma}_i|^2$. \square

Durch Bilden der Zeitableitung der kinetischen Energie und Verwenden der Newtonschen Bewegungsgleichung erhalten wir

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^N \langle m_i \ddot{\gamma}_i, \dot{\gamma}_i \rangle = \sum_{i=1}^N F_i \cdot \dot{\gamma}_i. \quad (1.64)$$

Um den Beitrag von den inneren Kräften $\sum_{i \neq j} F_{ij}$ zu berechnen, benützen wir die Kettenregel:

$$(d_i U_{ij})_{(\gamma_i, \gamma_j)} = (d\phi)_{|\gamma_i - \gamma_j|} \circ d| \bullet - \gamma_j | = -(d_j U_{ji})_{(\gamma_j, \gamma_i)}.$$

Hiermit gilt

$$\sum_{i \neq j} F_{ij} \cdot \dot{\gamma}_i = - \sum_{i < j} (d_i U_{ij})_{(\gamma_i, \gamma_j)} \cdot (\dot{\gamma}_i - \dot{\gamma}_j) = - \sum_{i < j} (d\phi)_{|\gamma_i - \gamma_j|} \frac{d}{dt} |\gamma_i - \gamma_j| = - \frac{dU}{dt},$$

wobei $U = \sum_{i < j} U_{ij}$ die (innere) **potentielle Energie** des Systems heißt. Insgesamt haben wir $dT/dt = -(dU/dt) + \sum F_i^{\text{ext}} \cdot \dot{\gamma}_i$ oder mit der Gesamtenergie $E = T + U$:

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^N F_i^{\text{ext}} \cdot \dot{\gamma}_i. \quad (1.65)$$

Die zeitliche Änderung der Gesamtenergie eines Systems ist also gleich der Summe der Leistungen der äußeren Kräfte an seinen Punkten. Durch Spezialisierung folgt der Energiesatz:

Die Gesamtenergie eines abgeschlossenen Systems ist erhalten.

(1.66)

Mitteilung. Es wurde gezeigt, dass abgeschlossene Systeme mindestens 10 erhaltene Größen haben; es sind dies die Energie E und die (jeweils drei) Komponenten des Drehimpulses L , des Impulses P und des Schwerpunkts $\Gamma - t\mathcal{I}^{-1}(P)/M$ im Ruhesystem. Wie später im Kontext des **Noether-Theorems** (“Symmetrien bedingen Erhaltungssätze und umgekehrt”) erläutert werden wird, erwartet man genau diese Mindestzahl – nämlich zehn – wegen der Gültigkeit des Galileischen Relativitätsprinzips für abgeschlossene Systeme und der 10-Parametrigkeit der Galilei-Gruppe.

1.7 Hamiltonsche Systeme

(Auszug aus der Straumannschen Adaption, Seiten 35–50, des Textbuches von Arnold, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Springer 1980.)

Definition. Ist auf einem Teilraum $M \subset \mathbb{R}^n$ ein zeitabhängiges Vektorfeld X gegeben,

$$X : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x, t) \mapsto X(x, t), \quad (1.67)$$

so heißt die Gleichung $\dot{x} = X(x, t)$ – in Komponenten ausgedrückt:

$$\dot{x}_i = X_i(x_1, \dots, x_n, t) \quad (i = 1, \dots, n), \quad (1.68)$$

ein **dynamisches System**. Eine differenzierbare Abbildung $\gamma : I = [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ heißt **Lösung** des dynamischen Systems, wenn für alle $t \in I$ die Beziehung $\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t), t)$ erfüllt ist. Der Graph von γ heißt dann eine **Integralkurve** des Vektorfeldes X . \square

Die Newtonschen Bewegungsgleichungen sind Differentialgleichungen von zweiter Ordnung in der Zeit. Jedoch nehmen sie die Form eines dynamischen Systems gemäß der obigen Definition

an, wenn wir sie folgendermaßen aufschreiben. Wir verwenden die Koordinatendarstellung von Abschnitt 1.5, also $\mathbf{r}_i = \mathbf{x} \circ \gamma_i$ und $\mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{r}}_i$. Die Bewegungsgleichungen lauten dann

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{p}_i/m_i, \quad \dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1/m_1, \dots, \mathbf{p}_N/m_N, t) \quad (i = 1, \dots, N). \quad (1.69)$$

Fassen wir jetzt die Größen $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N$ zu einer Größe $x \in \mathbb{R}^{6N}$ zusammen, so entsteht ein dynamisches System (1.68) mit $n = 6N$.

Der Raum, den die Gesamtheit aller Orte und Impulse durchläuft, heißt **Phasenraum**. Der Phasenraum hat immer gerade Dimension: $n = \dim M = 2f$. Die Zahl f der Ortskoordinaten heißt auch die **Zahl der Freiheitsgrade**. Für ein System von N Punkten im E_3 ist $f = 3N$. Für ein System von N Punkten im E_3 mit Zwangsbedingungen (siehe später) ist $f \leq 3N$.

Definition. Ein Vektorfeld X_H der speziellen Form

$$X_H = \left(\frac{\partial H}{\partial x_{f+1}}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x_{2f}}, -\frac{\partial H}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial x_f} \right) \quad (1.70)$$

mit H einer differenzierbaren Funktion $H : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{2f} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Hamiltonsch*. Das zugehörige dynamische System $\dot{x} = X_H(x, t)$ heißt **Hamiltonsches System** (mit Hamilton-Funktion H).

Beispiel. Ein System von N Punkten $\mathbf{r} \equiv (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ mit Impulsen $\mathbf{p} \equiv (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$ und konservativen Kräften $\mathbf{F}_i = -\text{grad}_{\mathbf{r}_i} U$ ist Hamiltonsch mit der Energie

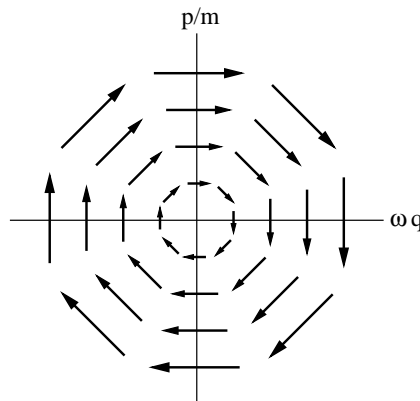
$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \sum_{i=1}^N \frac{|\mathbf{p}_i|^2}{2m_i} + U(\mathbf{r}) \quad (1.71)$$

als Hamilton-Funktion. In diesem Fall hängt H nicht explizit von der Zeit ab.

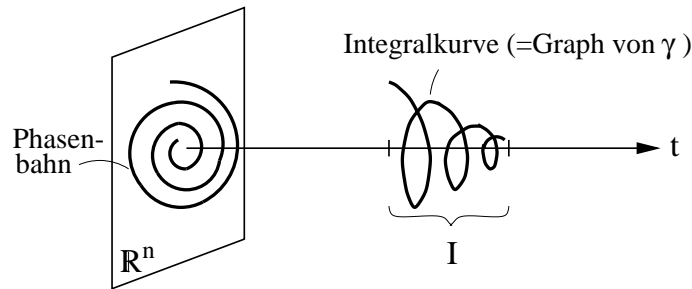
Als besonders einfachen Spezialfall betrachten wir den **harmonischen Oszillator** für $f = 1$. In diesem Fall sind die Hamilton-Funktion H und das Hamiltonsche Vektorfeld X_H gegeben durch

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2} \omega^2 q^2, \quad X_H = \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q} \right) = \left(\frac{p}{m}, -m\omega^2 q \right). \quad (1.72)$$

Das dynamische System $\dot{q} = p/m, \dot{p} = -m\omega^2 q$ erkennt man nach Elimination von p als die Bewegungsgleichung $\ddot{q} = -\omega^2 q$ des eindimensionalen harmonischen Oszillators mit Schwingungsfrequenz ω . Das folgende Bild deutet das Vektorfeld X_H graphisch an:



Definition. Das dynamische System zu einem zeitunabhängigen (bzw. zeitabhängigen) Vektorfeld $X : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ (bzw. $X : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$) heißt **autonom** (bzw. nichtautonom). Unter dem **erweiterten Phasenraum** versteht man das direkte Produkt $M \times \mathbb{R}$. Ist $\gamma : I \rightarrow M$ eine Integralkurve von X , so heißt die Punktmenge $\{\gamma(t) \mid t \in I\} \subset M$ eine **Phasenbahn**.



Bemerkung. Jedes nichtautonome System $\dot{x} = X(x, t)$ hat im erweiterten Phasenraum $M \times \mathbb{R}$ die **autonome Erweiterung** $\dot{x} = X(x, t), \dot{t} = 1$.

Lokale Flüsse. Gegeben sei ein zeitunabhängiges Vektorfeld X auf $M \subset \mathbb{R}^n$ und ein Punkt $x_0 \in M$. Unter einem **lokalen Fluss**, der durch das Vektorfeld X in einer Umgebung von x_0 bestimmt wird, versteht man ein Tripel (I, \mathcal{U}_0, ϕ) , das aus einem Intervall $I = [-\varepsilon, +\varepsilon]$, einer Umgebung \mathcal{U}_0 von x_0 und einer Abbildung $\phi : \mathcal{U}_0 \times I \rightarrow M$ besteht, wobei die folgenden Eigenschaften gelten:

- (1) Für festes $t \in I$ ist die durch $\phi_t(x) := \phi(x, t)$ definierte Abbildung $\phi_t : \mathcal{U}_0 \rightarrow \phi_t(\mathcal{U}_0) \subset M$ ein **Diffeomorphismus**.
- (2) Für festes $x \in \mathcal{U}_0$ ist die durch $\gamma(t) := \phi(x, t)$ definierte Abbildung $\gamma : I \rightarrow M$ eine Lösung von $\dot{x} = X(x)$ zur Anfangsbedingung $\gamma(0) = x$.
- (3) Es gilt (lokal): $\phi_s(\phi_t(x)) = \phi_{s+t}(x)$.

Erläuterungen.

- (i) Eigenschaft (2) impliziert insbesondere $\phi(x, 0) = x$, d.h. $\phi_0 = \text{Id}$.
- (ii) Wenn wir eine feste Zeitspanne t vorgeben und fragen, wohin ein beliebiger Punkt $x \in \mathcal{U}_0$ in dieser Zeitspanne unter der durch $\dot{x} = X(x)$ determinierten Bewegung wandert, dann liefert $\phi_t = \phi(\bullet, t)$ hierzu die Antwort: $x \mapsto \phi_t(x)$. Wenn wir andererseits einen festen Punkt x vorgeben (zur Zeit $t = 0$) und wissen wollen, welcher Phasenbahn er folgt, dann ist dies gerade die Kurve $\gamma(t) = \phi(x, t)$. In diesem Sinn beinhaltet ϕ die (lokal) vollständige Beschreibung der Lösungen von $\dot{x} = X(x)$.
- (iii) Eigenschaft (3) sagt aus, dass die Diffeomorphismen ϕ_t eine (lokale) **1-parametrische Gruppe** mit neutralem Element ϕ_0 bilden.
- (iv) Das Wort "Fluss" erklärt sich daraus, dass wir die den Integralkurven von X folgende Bewegung von Punkten x durch M als das Fließen einer Strömung auffassen können.

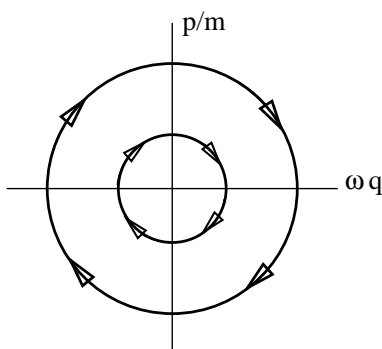
(v) Mitteilung. In der Theorie der Differentialgleichungen lernt man, dass das Vektorfeld X einen lokalen Fluss in einer Umgebung jedes Punktes $x_0 \in M$ bestimmt.

Beispiel 1. Der auf einem affinen Raum durch das konstante Vektorfeld $X(x) = v$ bestimmte Fluss ist $\phi(x, t) = x + vt$.

Beispiel 2. Der durch das Hamiltonsche Vektorfeld $X_H = (p/m, -m\omega^2 q)$ des eindimensionalen harmonischen Oszillators bestimmte Fluss ist

$$\phi(q, p, t) = \left(q \cos \omega t + \frac{p}{m\omega} \sin \omega t, -m\omega q \sin \omega t + p \cos \omega t \right). \quad (1.73)$$

Das ‘‘Fließen der Strömung’’ sieht hier folgendermaßen aus:



1.8 Autonome Hamiltonsche Systeme mit einem Freiheitsgrad

(Straumann, Seiten 50ff.)

In Vorbereitung auf das eigentliche Thema dieses Abschnitts **konstruieren** wir die Lösung γ eines autonomen Systems für $n = 1$,

$$\dot{x} = X(x) \quad (1.74)$$

zu einer Anfangsbedingung $\gamma(t_0) = x_0$.

- (i) Wenn $X(x_0) = 0$ gilt, dann ist die Lösung durch $\gamma(t) = x_0$ gegeben.
- (ii) Sei jetzt $X(x_0) \neq 0$. Wegen $\dot{\gamma}(t_0) = X(x_0) \neq 0$ existiert nach dem **Hauptsatz** über implizite Funktionen die **Umkehrfunktion** $t = \tau(x)$ zu $x = \gamma(t)$ in einer hinreichend kleinen Umgebung von x_0 . Diese Funktion erfüllt $d\tau(x)/dx = 1/X(x)$, und Integration dieser Beziehung liefert

$$\tau(x) - \tau(x_0) = \int_{x_0}^x \frac{dy}{X(y)}. \quad (1.75)$$

Damit ist das Problem der Lösung von (1.74) auf eine **Quadratur** (d.h. die Berechnung eines unbestimmten Integrals) und die Umkehrung einer Funktion zurückgeführt. \square

Nun betrachten wir das zur Newtonschen Bewegungsgleichung $m\ddot{q} = F(q)$ äquivalente autonome System

$$\dot{q} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = F(q). \quad (1.76)$$

Mit $F(q) = -U'(q)$ und $H(q, p) = p^2/2m + U(q)$ wird dies zu

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \quad (1.77)$$

Wenn wir jetzt noch $x = (q, p)$ und $X_H = (\partial H/\partial p, -\partial H/\partial q)$ setzen, dann nimmt dies die Gestalt $\dot{x} = X_H(x)$ eines autonomen dynamischen Systems für $n = 2$ an.

Energiesatz. Sei E die Energie längs einer Lösung $t \mapsto \gamma(t)$ des Hamiltonschen Systems, also

$$E(t) = (H \circ \gamma)(t) = H(q(t), p(t)). \quad (1.78)$$

Die Zeitableitung \dot{E} (ausführlich: **totale Zeitableitung**) der Energie ist

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial H}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial p} \left(-\frac{\partial H}{\partial q} \right) = 0. \quad (1.79)$$

Es folgt der Energiesatz $E(t) = (H \circ \gamma)(t) = \text{const}$; oder in Worten:

Die Energie eines autonomen Hamiltonschen Systems ist erhalten. (1.80)

Definition. Die Punktmenge $\{(q, p) \in \mathbb{R}^2 \mid H(q, p) = E\}$ heißt die **Niveaukurve** von H zur Energie E . (Für $f > 1$ spricht man von Niveauflächen der Energie.) \square

Mit Hilfe des Energiesatzes und des Begriffs von Niveaukurven können wir die Lösungen von (1.77) mit dem eingangs beschriebenen Verfahren konstruieren. Dazu vorweg noch die

Definition. Sei $f : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Ein Punkt $x \in M$, in dem gilt $(df)_x = 0$, heißt **kritischer Punkt** von f .

Lösungsverfahren. Offensichtlich fallen die **Nullstellen** des Vektorfeldes X_H mit den kritischen Punkten von H zusammen. In einer Umgebung jedes nichtkritischen Punktes (q_0, p_0) ist nach dem Hauptsatz über implizite Funktionen die Energieniveaukurve glatt. Lokal können wir dann die Gleichung $E = H(q, p)$ nach dem Impuls oder dem Ort auflösen, $p = f(q, E)$ oder $q = g(p, E)$, und die **Auflösefunktion** in die erste bzw. zweite Gleichung von (1.77) einsetzen:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}(q, f(q, E)) \quad \text{oder} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}(g(p, E), p). \quad (1.81)$$

Beide Probleme sind von der eindimensionalen Form (1.74) und lassen sich somit wie oben beschrieben durch Quadratur und Umkehrung einer Funktion lösen. Das erste Verfahren funktioniert für $p_0 \neq 0$, das zweite für $U'(q_0) \neq 0$.

Phasenporträt. Einen Überblick über das qualitative Verhalten der Lösungen liefert das sogenannte *Phasenporträt*. Zunächst einmal erklären wir den Definitionsbereich $M \subset \mathbb{R}^2$ der Hamilton-Funktion zum Phasenraum des Hamiltonschen Systems. Für eine Lösung $t \mapsto \gamma(t) = (q(t), p(t))$ von (1.77) zur Anfangsbedingung (q_0, p_0) zur Zeit t_0 liegt $\gamma(t)$ für alle Zeiten t in der die Anfangsbedingung (q_0, p_0) enthaltenden **Zusammenhangskomponente** der Energieniveaukurve zu $E = H(q_0, p_0)$, d.h. die Phasenbahnen fallen mit den Zusammenhangskomponenten der Energieniveaukurve zusammen. Für die Phasenbahnen bestehen demnach folgende Möglichkeiten:

(A) Die Phasenbahn fällt mit einem kritischen Punkt zusammen.

Andernfalls ist die Phasenbahn eine glatte Kurve, welche

(B) geschlossen ist, ohne durch einen kritischen Punkt zu laufen;

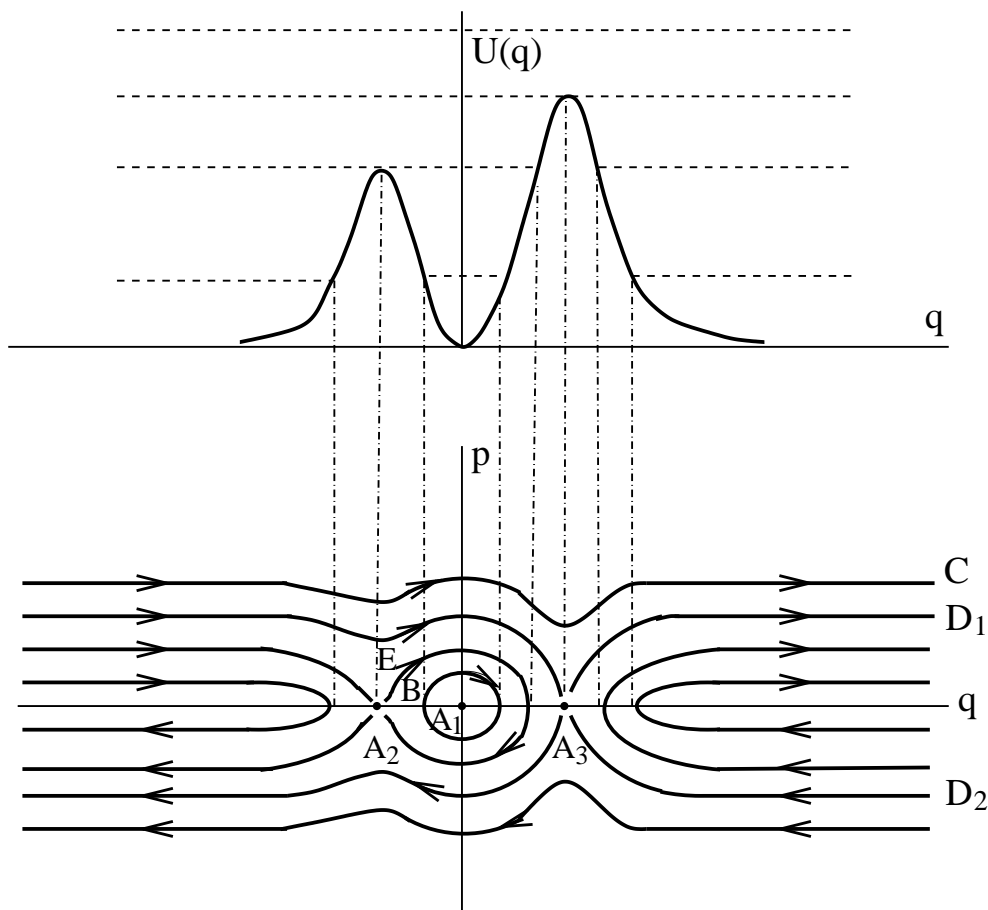
(C) beidseitig ins Unendliche läuft, ohne einen kritischen Punkt zu treffen;

(D) einseitig ins Unendliche läuft und im Endlichen in einem kritischen Punkt endet;

(E) beidseitig in einem (nicht notwendig demselben) kritischen Punkt endet.

Bemerkungen. Der Fall (A) entspricht einer stabilen oder instabilen Gleichgewichtslage. Im Fall (B) ist die Bewegung periodisch. In den Fällen (C) bis (E) erreicht oder verlässt die Lösung $\gamma(t)$ den kritischen Punkt nicht in endlicher Zeit. \square

Die folgende Figur zeigt das Phasenporträt für $H(q, p) = p^2/2m + U(q)$ und $U(q)$ wie skizziert. Die Niveaukurven sind gegeben durch $p = \pm\sqrt{2m(E - U(q))}$ und die kritischen Punkte von H durch $p = 0 = U'(q)$.

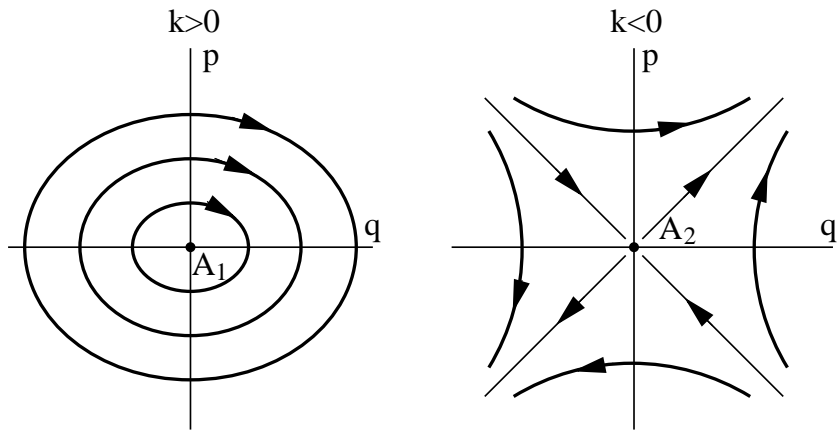


Das Verhalten in der Nähe eines kritischen Punktes $(q_0, p_0 = 0)$, $U'(q_0) = 0$ untersuchen wir gesondert. Dazu entwickeln wir $U(q)$ in eine Taylorreihe um $q = q_0$:

$$U(q) = U(q_0) + \frac{1}{2} U''(q_0)(q - q_0)^2 + \dots \quad (1.82)$$

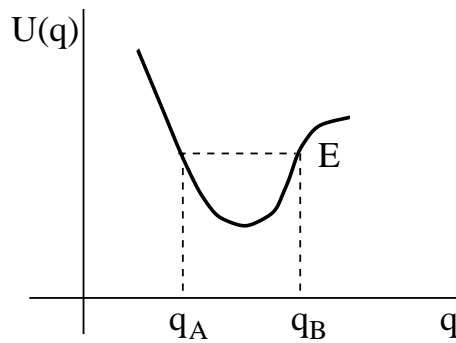
Wir betrachten nur den nichtentarteten (generischen) Fall $U''(q_0) \neq 0$. O.B.d.A. wählen wir $q_0 = 0$ und $U(q_0) = 0$. Die qualitativen Züge des Phasenflusses nahe $(q_0, p_0) = (0, 0)$ werden dann richtig

erfasst, wenn wir $U(q) \equiv kq^2/2$ setzen. Die Niveaulinien zu $H(q, p) = p^2/2m + kq^2/2$ sind **Ellipsen** (bzw. **Hyperbeln**) für $k > 0$ (bzw. $k < 0$).



Der singuläre Punkt A_1 (bzw. A_2) heißt auch *elliptischer* (bzw. *hyperbolischer*) Fixpunkt von X_H .

Schwingungsdauer. Wir betrachten jetzt eine geschlossene Phasenbahn (Typ B von oben), d.h. die Situation sei wie in der folgenden Skizze:



Die durch $E = U(q_i)$ bestimmten Punkte q_A und q_B heißen **Umkehrpunkte**. Die Dauer eines vollständigen Durchlaufs der Phasenbahn – z.B. ausgehend von $(q, p) = (q_A, 0)$ über $(q_B, 0)$ zurück nach $(q, p) = (q_A, 0)$ – heißt **Schwingungsdauer**, τ . Als Funktion der Energie ist sie gegeben durch

$$\tau(E) = 2 \int_{q_A(E)}^{q_B(E)} \frac{dq}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(q))}}. \quad (1.83)$$

Aufgabe. Die Phasenbahnen eines Hamiltonschen Systems mit Hamiltonfunktion

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + U(q), \quad U(q) = \alpha q^h, \quad h \in 2\mathbb{N}, \quad \alpha > 0, \quad (1.84)$$

sind für alle Energien $E > 0$ geschlossen. Die Schwingungsdauer τ variiert in diesem Fall mit der Energie wie $E^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{h}}$. Insbesondere ist die Schwingungsdauer für den eindimensionalen harmonischen Oszillator ($h = 2$) von der Energie unabhängig: $\tau(E) = 2\pi/\omega$, mit der Oszillatorfrequenz $\omega = \sqrt{2\alpha/m}$.

1.9 Das Zweikörper-Problem mit Zentralkräften

Wir untersuchen hier die Newtonschen Bewegungsgleichungen

$$\langle m_1 \ddot{\gamma}_1, \cdot \rangle = F_{12}, \quad \langle m_2 \ddot{\gamma}_2, \cdot \rangle = F_{21}, \quad (1.85)$$

für ein abgeschlossenes System von zwei Punkten $\gamma_1(t), \gamma_2(t) \in E_3$ mit Massen m_1 bzw. m_2 . Dabei treffen wir die Annahme, dass die Kräfte F_{12} und F_{21} nicht von der Geschwindigkeit abhängen; nach Abschnitt 1.5 sind sie dann von der Form

$$F_{12} = -F_{21} = -(d_1 U)_{\gamma_1, \gamma_2} = (d_2 U)_{\gamma_1, \gamma_2}, \quad U(\gamma_1, \gamma_2) = \phi(|\gamma_1 - \gamma_2|). \quad (1.86)$$

Wegen $F_{12} \propto \langle \gamma_1 - \gamma_2, \cdot \rangle$ spricht man auch von einer **Zentralkraft**.

Aus Abschnitt 1.6 wissen wir bereits, dass für solche Systeme zehn Erhaltungssätze gelten. Durch konsequentes Ausnutzen all dieser Erhaltungssätze lässt sich das Problem der Lösung der Bewegungsgleichungen wieder auf Quadraturen zurückführen.

1.9.1 Abtrennen der Schwerpunktbewegung

Der erste Schritt zur Lösung besteht in der **Separation** von Schwerpunkt- und Relativbewegung. Dazu erinnern wir an die Definition des Schwerpunkts Γ durch

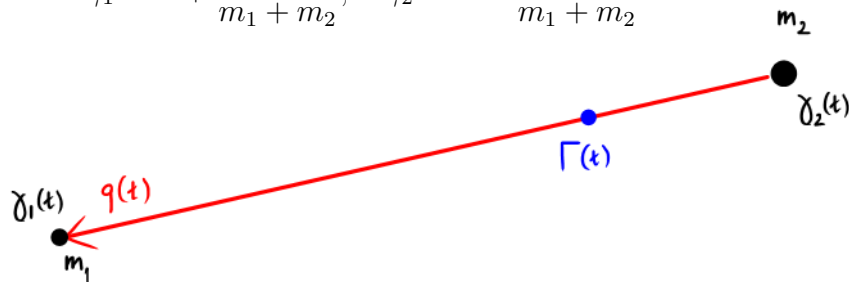
$$m_1(\gamma_1 - \Gamma) + m_2(\gamma_2 - \Gamma) = 0$$

und führen den Orts(-differenz)vektor q der Relativbewegung ein:

$$q = \gamma_1 - \gamma_2. \quad (1.87)$$

Die Umkehrtransformation hierzu lautet

$$\gamma_1 = \Gamma + \frac{m_2 q}{m_1 + m_2}, \quad \gamma_2 = \Gamma - \frac{m_1 q}{m_1 + m_2}. \quad (1.88)$$



Nach dem Schwerpunktsatz für abgeschlossene Systeme (siehe Abschnitt 1.6.1) bewegt sich der Schwerpunkt geradlinig und gleichförmig: $\ddot{\Gamma} = 0$. Hieraus folgt durch zweimaliges Differenzieren der ersten Gleichung in (1.88) die Beziehung $\ddot{\gamma}_1 = (m_1 + m_2)^{-1} m_2 \ddot{q}$ und somit

$$\langle m \ddot{q}, \cdot \rangle = F, \quad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad F \equiv F_{12}, \quad (1.89)$$

wobei m die **reduzierte Masse** heißt. Da über die Schwerpunktbewegung mit $\Gamma(t) = \Gamma(0) + t \dot{\Gamma}(0)$ bereits alles gesagt ist, verbleibt nur das Problem der Lösung der Gleichungen (1.89) für die Relativbewegung. Dieses ist lösbar, weil neben der Energie auch der Drehimpuls erhalten ist.

1.9.2 Invariante Ebene der Relativbewegung

Wir erinnern daran, dass der Drehimpuls $L \equiv L^{(o)}$ von der Wahl eines Bezugspunkts o abhängt.

Definition. Unter dem *Drehimpuls der Relativbewegung* versteht man den Gesamtdrehimpuls $L^{(\Gamma)}$ bezüglich des Schwerpunkts $\Gamma = \Gamma(t)$.

Aufgabe. Im betrachteten Fall von 2 Massenpunkten drückt sich der Gesamtdrehimpuls $L \equiv L^{(\Gamma)}$ bezüglich des Schwerpunkts Γ durch

$$L = p \otimes q - \mathcal{I}(q) \otimes \mathcal{I}^{-1}(p) \quad (1.90)$$

aus, wobei $p = \langle m\dot{q}, \cdot \rangle \equiv \mathcal{I}(m\dot{q})$ der Impuls der Relativbewegung ist. \square

Wie wir bereits wissen, gilt für ein abgeschlossenes System mit beliebig (aber fest) gewähltem Bezugspunkt o der Drehimpulssatz: $\dot{L}^{(o)} = 0$. Aus der Transformationsformel

$$L^{(\Gamma)} = L^{(o)} + P \otimes (\Gamma(t) - o) - \mathcal{I}(\Gamma(t) - o) \otimes \mathcal{I}^{-1}(P) \quad (P = p_1 + p_2) \quad (1.91)$$

folgt mit $P \propto \mathcal{I}(\dot{\Gamma})$, dass auch der Drehimpuls $L^{(\Gamma)}$ der Relativbewegung erhalten ist: $\frac{d}{dt}L^{(\Gamma(t))} = 0$.

Aufgabe. Verifiziere $\frac{d}{dt}L^{(\Gamma(t))} = 0$ durch direkte Rechnung ausgehend von (1.90). \square

Ab jetzt schreiben wir für den zeitlich konstanten Drehimpuls der Relativbewegung kurz $L \equiv L^{(\Gamma(t))}$. Wir betrachten nur den Fall $L \neq 0$ (denn andernfalls liegt geradlinige Bewegung vor und wir können direkt so verfahren wie in Abschnitt 1.8.) Aus Abschnitt 1.6.2 wissen wir, dass der Drehimpuls $L : V^* \rightarrow V^*$ als infinitesimale Drehung aufgefasst werden kann, also als Generator einer 1-Parametergruppe von Drehungen $R = e^{\alpha L}$.

Tatsache. Im Fall von $V \simeq \mathbb{R}^3$ existiert zu jeder infinitesimalen Drehung $L : V^* \rightarrow V^*$ eine Orthonormalbasis $\{f_1, f_2, f_3\}$ mit der Eigenschaft

$$Lf_1 = f_2|L|, \quad Lf_2 = -f_1|L|, \quad Lf_3 = 0. \quad (1.92)$$

Bemerkungen. (i) Der Beweis dieser Tatsache wird im Kapitel über starre Körper geliefert. (ii) Wir nennen die skalare Größe $|L|$ den Betrag des Drehimpulses L . (iii) Die Orthonormalbasis $\{f_1, f_2, f_3\}$ ist nicht eindeutig bestimmt. Basisunabhängig erklärt ist der Kern von L ,

$$A = \ker L = \mathbb{R} \cdot f_3, \quad (1.93)$$

der wegen $e^{\alpha L}f_3 = f_3$ die anschauliche Bedeutung einer *Drehachse* hat. Ebenfalls basisunabhängig erklärt ist das orthogonale Komplement von A , also die zur Drehachse A senkrechte Ebene,

$$A^\perp = \text{span}_{\mathbb{R}}\{f_1, f_2\}. \quad \square \quad (1.94)$$

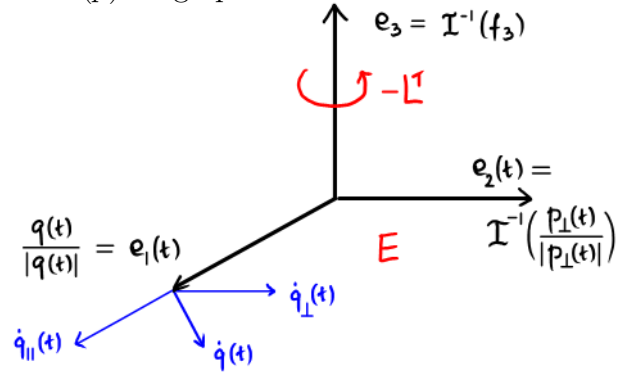
Nun folgt aus der Erhaltung des Drehimpulses L , dass auch die zu L assoziierte Ebene A^\perp erhalten ist, also nicht von der Zeit abhängt. Diese Ebene – genauer: ihr isomorphes Bild

$$E \equiv \mathcal{I}^{-1}(A^\perp) \subset V \quad (1.95)$$

im Vektorraum $V \simeq \mathbb{R}^3$ der Raumtranslationen – nennen wir die invariante Ebene der Relativbewegung; oder kürzer: die **Bewegungsebene**, E .

Aufgabe. Jeder zu q und $\mathcal{I}^{-1}(p)$ senkrechte Vektor in V steht senkrecht auf E . \square

Im Umkehrschluss folgt, dass p und $\mathcal{I}(q)$ auf A senkrecht stehen, also in der invarianten Ebene A^\perp liegen. Da die Linearformen p und $\mathcal{I}(q)$ wegen $L \neq 0$ linear unabhängig sind, spannen sie A^\perp auf. Die Bewegungsebene E wird durch die Vektoren q und $\mathcal{I}^{-1}(p)$ aufgespannt.



1.9.3 Reduktion auf Radialbewegung

Es ist nun zweckmäßig, den zeitabhängigen Impuls in zwei **orthogonale Anteile** zu zerlegen:

$$p(t) = p_\perp(t) + p_\parallel(t), \quad p_\perp(t) \cdot q(t) = 0. \quad (1.96)$$

p_\parallel bzw. p_\perp ist also die zu $\mathcal{I}(q)$ parallele bzw. senkrechte Komponente von p .

Aufgabe. Das zeitabhängige Orthonormalsystem

$$f_1(t) = \frac{\mathcal{I}(q(t))}{|q(t)|}, \quad f_2(t) = \frac{p_\perp(t)}{|p_\perp(t)|}, \quad (1.97)$$

spannt die invariante Ebene A^\perp auf, und es gelten die Relationen

$$L f_1(t) = f_2(t) |L|, \quad L f_2(t) = -f_1(t) |L|, \quad |L| = |q(t)| |p_\perp(t)| = \text{const.} \quad (1.98)$$

Energiesatz im Einsatz. Die Gesamtenergie abgeschlossener Systeme ist bekanntlich erhalten. Diese Aussage gilt für jedes Galilei-System, insbesondere gilt sie im Ruhesystem des Schwerpunkts. Wir bezeichnen die Gesamtenergie im Ruhesystem des Schwerpunkts mit $E \equiv E_{\text{rel}}$.

Mit $P = p_1 + p_2 = 0$ und $p_1 = \mathcal{I}(m_1 \dot{\gamma}_1) = \mathcal{I}(m \dot{q}) = p$ berechnet sich der kinetische Anteil von E_{rel} zu

$$\frac{|p_1|^2}{2m_1} + \frac{|p_2|^2}{2m_2} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \frac{|p_1|^2}{2} = \frac{|p|^2}{2m} = \frac{|p_\parallel|^2}{2m} + \frac{|p_\perp|^2}{2m}. \quad (1.99)$$

Die Gesamtenergie ist

$$E = E_{\text{rel}} = \frac{|p|^2}{2m} + \phi(|q|). \quad (1.100)$$

Wir setzen jetzt $r(t) := |q(t)|$ und lösen die letzte Gleichung in (1.98) nach $|p_\perp|$ auf. Benützen wir auch noch $|p_\parallel| = m\dot{r}$, so entsteht für die Gesamtenergie der Ausdruck

$$E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + V(r), \quad V(r) = \frac{|L|^2}{2mr^2} + \phi(r). \quad (1.101)$$

Die Funktion $V(r)$ heißt das **effektive Potential** der Radialbewegung. Sie beinhaltet neben dem eigentlichen Potential ϕ noch das **Zentrifugalpotential** $|L|^2/2mr^2$, welches abstoßend wirkt und für $r \rightarrow 0$ divergiert.

Offenbar wird die gestellte Aufgabe durch das Ergebnis (1.101) auf ein autonomes Hamiltonsches System mit einem einzigen Freiheitsgrad r reduziert. Letzteres ist von dem in Abschnitt 1.8 behandelten Typ und also über den Energiesatz durch Quadratur lösbar:

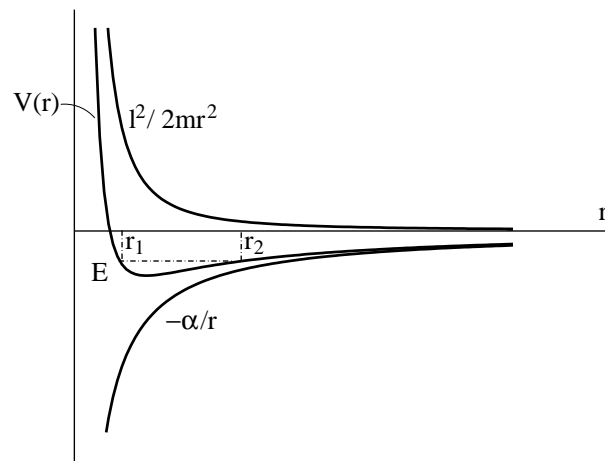
$$\int dt = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dr}{\sqrt{E - V(r)}}. \quad (1.102)$$

Aufgabe. Der in der Bewegungsebene E rotierende Differenzvektor $q(t) = \gamma_1(t) - \gamma_2(t)$ überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

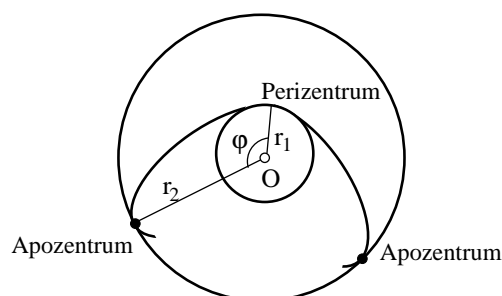
1.9.4 Untersuchung der Bahnkurven

(Arnold, Seiten 34 ff.)

Wir wählen feste Werte für den Betrag $l = |L|$ des Drehimpulses und die Energie E . Man kann sich dann die zeitliche Änderung von r leicht veranschaulichen, indem man den Graphen des effektiven Potentials $V(r)$ zeichnet. Die nächste Figur zeigt $V(r)$ für den Fall von $\phi(r) = -\alpha/r$ ($\alpha > 0$).



Alle Bahnkurven zu den vorgegebenen Werten von $|L|$ und E liegen in dem durch die Ungleichung $V(r) \leq E$ definierten Gebiet. Auf dem Rand dieses Gebiets gilt $V(r) = E$ und somit $\dot{r} = 0$, d.h. die Geschwindigkeit in Radialrichtung verschwindet dort. (Jedoch ist die totale Geschwindigkeit der Relativbewegung auf diesem Rand im allgemeinen von Null verschieden.) Die Ungleichung $V(r) \leq E$ legt ein **ringförmiges Gebiet** $0 \leq r_1 \leq r \leq r_2 \leq \infty$ (oder mehrere solche Gebiete) fest. Gilt $0 \leq r_1 < r_2 < \infty$, so ist die Bewegung beschränkt und spielt sich innerhalb des Rings zwischen den Kreisen mit Radien r_1 und r_2 ab. Der Verlauf einer Bahn ist in der nächsten Figur skizziert:



Wir bezeichnen den **Winkel** zwischen $q(0)$ und $q(t)$ mit φ . Da dieser Winkel eine monotone Funktion der Zeit ist, können wir ihn zur Parametrisierung der Bahnkurven verwenden. Die Bestimmung der (auf die Radialrichtung projizierten) Bahnkurve $r(\varphi)$ erfolgt am schnellsten direkt, indem man die Zeit eliminiert:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = \frac{mr^2}{|L|} \dot{r} = \frac{mr^2}{|L|} \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(r))}, \quad (1.103)$$

was auf die folgende Quadratur führt:

$$\int d\varphi = \frac{|L|}{\sqrt{2m}} \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - V(r)}}. \quad (1.104)$$

Während sich der Winkel φ monoton ändert, oszilliert r periodisch zwischen r_1 und r_2 . Die Punkte, wo $r = r_1$ ($r = r_2$) gilt, heißen **perizentral** (bzw. **apozentral**).

Aufgabe. Jeder Strahl vom Nullpunkt der Bewegungsebene E durch einen perizentralen oder apozentralen Punkt ist eine Symmetrieachse der Bahn. \square

Die Bahn ist im allgemeinen nicht geschlossen: der Winkel $\Delta\varphi$ zwischen aufeinander folgenden Perizentren und Apozentren ist durch

$$\Delta\varphi = \frac{|L|}{\sqrt{2m}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - V(r)}} \quad (1.105)$$

gegeben. Der Winkel zwischen sukzessiven Perizentren ist doppelt so groß. Die Bahn ist genau dann geschlossen, wenn $2\Delta\varphi$ kommensurabel mit 2π ist, d.h. für $2\Delta\varphi = 2\pi m/n$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$. Für $r_1 = r_2$ liegt Entartung zu einer **Kreisbahn** vor.

Wir betrachten jetzt noch den Fall $r_2 = \infty$. Wenn $\lim_{r \rightarrow \infty} \phi(r) = \phi_\infty < \infty$ gilt, existieren Bahnen, die ins Unendliche reichen. Im Fall von $E > \phi_\infty > -\infty$ ist die asymptotische Geschwindigkeit endlich: $\dot{r}_\infty = \sqrt{\frac{2}{m}(E - \phi_\infty)}$.

Mitteilung. Es lässt sich zeigen, dass $\phi(r) = -\alpha/r$ und $\phi(r) = \alpha r^2$ (jeweils mit $\alpha > 0$) die einzigen Potentiale sind, für die alle beschränkten Bahnen geschlossen sind.

1.9.5 Kepler-Problem

Hier geht es um die Bewegung eines Planeten um die Sonne. Dazu spezialisieren wir zum Newtonschen Gravitationspotential,

$$\phi(r) = -\frac{\alpha}{r}, \quad \alpha = Gm_1 m_2 > 0. \quad (1.106)$$

G ist die universelle **Gravitationskonstante**. Das effektive Potential $V(r)$ wurde bereits oben skizziert. Die minimalen und maximalen Radien r_1 und r_2 sind die Lösungen der Gleichung

$$E = V(r_i) = -\frac{\alpha}{r_i} + \frac{|L|^2}{2mr_i^2}. \quad (1.107)$$

Bei der Spezifizierung dieser Radien sind drei **Energiebereiche** zu unterscheiden:

(i) $E = 0$: $r_1 = |L|^2/2m\alpha$ und $r_2 = \infty$.

(ii) $E > 0$: $r_1 = -(\alpha/2E) + \sqrt{(\alpha/2E)^2 + |L|^2/2mE}$ und $r_2 = \infty$.

(iii) $0 > E \geq V_{\min} = -m\alpha^2/2|L|^2$: $r_{1,2} = -(\alpha/2E) \pm \sqrt{(\alpha/2E)^2 + |L|^2/2mE}$.

Für $E \geq 0$ sind alle Bahnen unbeschränkt; für $0 > E \geq V_{\min}$ liegen beschränkte Bahnen vor, von denen wir unten sehen werden, dass sie alle geschlossen sind; für $E = V_{\min}$ ist die Bahn zu einer Kreisbahn mit Radius $r_1 = r_2 = -\alpha/(2E)$ entartet. Das Integral

$$\varphi(r) - \varphi(r_0) = \frac{|L|}{\sqrt{2m}} \int_{r_0}^r \frac{ds}{s^2} \left(E + \frac{\alpha}{s} - \frac{|L|^2}{2ms^2} \right)^{-1/2} \quad (1.108)$$

lässt sich analytisch berechnen. Hierfür ist es geschickt, **dimensionslose Größen** einzuführen. Wir definieren eine charakteristische Länge ρ durch $|L|^2/m\rho^2 = \alpha/\rho$ und setzen $s = \rho \cdot \xi$ und $E = \varepsilon \cdot \alpha/2\rho$. Offenbar ist ξ eine dimensionslose Länge und ε eine dimensionslose Energie. Zu beachten ist auch, dass $E \geq V_{\min}$ der Ungleichung $\varepsilon \geq -1$ entspricht. Mit der Variablensubstitution $\xi = u^{-1}$ wird das obige Integral dann zu

$$\int_{r_0/\rho}^{r/\rho} \frac{d\xi}{\xi^2} \left(\varepsilon + \frac{2}{\xi} - \frac{1}{\xi^2} \right)^{-1/2} = \int_{\rho/r}^{\rho/r_0} \frac{du}{\sqrt{\varepsilon + 2u - u^2}}. \quad (1.109)$$

Nun ergänzen wir quadratisch: $\varepsilon + 2u - u^2 = (\varepsilon + 1) - (1 - u)^2$. Mit der Definition $\varepsilon + 1 = \eta^2$ und der Substitution $v = (1 - u)/\eta$ geht das unbestimmte Integral in $\int dv/\sqrt{1 - v^2} = \arcsin v + c$ über. So gelangen wir zum Resultat

$$\varphi - \varphi_0 = \arcsin(\eta^{-1}(1 - \rho/r)). \quad (1.110)$$

Durch Auflösen nach r folgt

$$r(\varphi) = \frac{\rho}{1 - \eta \sin(\varphi - \varphi_0)}, \quad \rho = \frac{|L|^2}{m\alpha}, \quad \eta = \left(1 + 2E \frac{|L|^2}{m\alpha^2} \right)^{1/2}. \quad (1.111)$$

Nach Übergang zu kartesischen Koordinaten sieht man sofort, dass die durch $r(\varphi)$ beschriebenen Bahnen folgenden Typs sind:

(i) **Parabel** für $\eta = 1$ (oder $E = 0$);

(ii) **Ellipse** für $0 \leq \eta < 1$ (oder $V_{\min} \leq E < 0$);

(iii) **Hyperbel** für $\eta > 1$ (oder $E > 0$).

2 Starre Körper

In diesem Kapitel studieren wir die Kinematik und die Dynamik starrer Körper. Insbesondere untersuchen wir den kräftefreien Kreisel.

2.1 Exkurs über die Drehgruppe

Wir erinnern vorab an ein paar Definitionen aus der linearen Algebra. Im Folgenden seien alle Vektorräume reell und endlich-dimensional.

- (i) Sei V ein n -dimensionaler Vektorraum und $\Omega \in \text{Alt}^n(V)$ ($\Omega \neq 0$) eine alternierende n -lineare Form. Dann ist die **Determinante** einer linearen Abbildung $A : V \rightarrow V$ erklärt durch:

$$\Omega(Av_1, Av_2, \dots, Av_n) = \Omega(v_1, v_2, \dots, v_n) \text{Det}A. \quad (2.1)$$

$\text{Det}A$ hängt nicht von der Wahl der Volumenform Ω ab.

- (ii) Seien U und V Euklidische Vektorräume, also reelle Vektorräume mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_U$ bzw. $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$. Dann ist die zu einer linearen Abbildung $L : U \rightarrow V$ **adjungierte** Abbildung $L^T : V \rightarrow U$ definiert durch:

$$\langle v, Lu \rangle_V = \langle L^T v, u \rangle_U \quad \text{für alle } u \in U, v \in V. \quad (2.2)$$

Im Fall von $U = V$ lassen sich L und L^T direkt vergleichen. Gilt $L^T = L$ (bzw. $L^T = -L$), so heißt L **symmetrisch** (bzw. **schief**).

Aufgaben. (i) $\text{Det}A^T = \text{Det}A$. (ii) Jeder linearen Abbildung $A : V \rightarrow V$ wird durch die Wahl einer Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ von V bekanntlich eine Matrixdarstellung zugeordnet durch $Ae_j = \sum_i e_i A_{ij}$. Aus der Definition der Determinante durch Gleichung (2.1) folgt der explizite Ausdruck

$$\text{Det}A = \sum_{\pi \in S_n} \text{sign}(\pi) A_{\pi(1)1} A_{\pi(2)2} \cdots A_{\pi(n)n} \quad (2.3)$$

als Summe über Permutationen. (iii) Zu jeder linearen Abbildung $L : U \rightarrow V$ zwischen zwei Vektorräumen U und V existiert die transponierte (oder kanonisch adjungierte) Abbildung $L^t : V^* \rightarrow U^*$. Sind U und V Euklidisch, so gilt mit dem Isomorphismus $\mathcal{I}_V : V \rightarrow V^*, v \mapsto \langle v, \cdot \rangle_V$

$$L^T = \mathcal{I}_U^{-1} \circ L^t \circ \mathcal{I}_V. \quad (2.4)$$

(iv) Für ein Produkt AB linearer Abbildungen hat man

$$(AB)^T = B^T A^T, \quad \text{Det}(AB) = \text{Det}A \cdot \text{Det}B. \quad (2.5)$$

Definition. Sei V ein Euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Die **orthogonale Gruppe** (oder Drehgruppe) $O(V)$ besteht aus den linearen Abbildungen $R : V \rightarrow V$, die das Skalarprodukt invariant lassen:

$$\langle Rv, Rv' \rangle = \langle v, v' \rangle \quad \text{für alle } v, v' \in V. \quad (2.6)$$

Die **spezielle** orthogonale Gruppe (oder eigentliche Drehgruppe) $SO(V) \subset O(V)$ ist die Untergruppe der Drehungen R mit Determinante $\text{Det}R = 1$.

Bemerkungen. Die Elemente $R \in O(V)$ werden durch die zu (2.6) äquivalente Bedingung $R^T R = \text{Id}$ charakterisiert. Für jedes $R \in O(V)$ gilt $\text{Det}R \in \{\pm 1\}$. Die Elemente mit $\text{Det}R = -1$ heißen **uneigentliche** Drehungen. Im Folgenden interessiert uns hauptsächlich die Drehgruppe für $V \simeq \mathbb{R}^3$. In diesem Fall ist die Spiegelung $R: V \rightarrow V, v \mapsto -v$ eine uneigentliche Drehung.

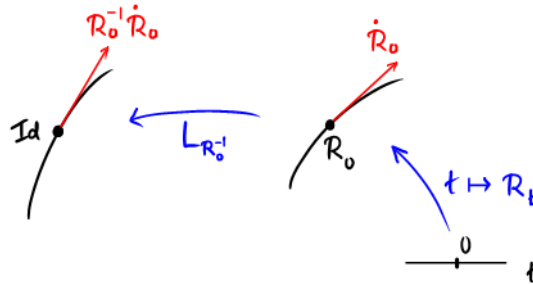
Aufgaben. (i) Für einen Euklidischen Vektorraum V endlicher Dimension liegt eine lineare Abbildung $R: V \rightarrow V$ genau dann in $O(V)$, wenn gilt $RR^T = \text{Id}$. (ii) Ist $Re_j = \sum_i e_i R_{ij}$ die Matrixdarstellung von $R \in O(V)$ bezüglich einer Orthonormalbasis $\{e_1, \dots, e_n\}$, so gilt

$$(R^{-1})_{ij} = R_{ji}. \quad (2.7)$$

Maurer-Cartan-Form. Für eine Kurve $(-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow O(V), t \mapsto R_t$ durch $R_t|_{t=0} = R_0$ betrachten wir die durch

$$A = R_0^{-1} \frac{d}{dt} R_t \Big|_{t=0} \quad (2.8)$$

definierte lineare Abbildung $A: V \rightarrow V$. Wir translatieren also die Kurve durch Linksmultiplikation mit R_0^{-1} in eine Kurve $\gamma: t \mapsto R_0^{-1} R_t$ durch das neutrale Element $\text{Id} = \gamma(0)$ und bilden dann die Ableitung $A = \dot{\gamma}(0)$.



Wir behaupten, dass A schief ist. Zum Nachweis differenzieren wir die Identität $\text{Id} = R_t^{-1} R_t$ nach t an der Stelle $t = 0$ und erhalten:

$$0 = \frac{d}{dt} R_t^{-1} \Big|_{t=0} R_0 + R_0^{-1} \dot{R}_0. \quad (2.9)$$

Hiermit berechnen wir nun ausgehend von $A = R_0^{-1} \dot{R}_0$ die adjungierte Abbildung:

$$A^T = \dot{R}_0^T (R_0^{-1})^T = \frac{d}{dt} R_t^{-1} \Big|_{t=0} R_0 = -R_0^{-1} \dot{R}_0 = -A. \quad (2.10)$$

Selbstverständlich ist es unbedeutend, wo differenziert wird (in $t = 0$ oder anderswo). Insgesamt wird also jedem Paar (R, \dot{R}) eine schiefe lineare Abbildung $A = R^{-1} \dot{R}$ zugeordnet. Diese Zuordnung heißt (in einem etwas allgemeineren Kontext) die **Maurer-Cartan-Form**.

Lie-Algebra $\mathfrak{so}(V)$. Der Vektorraum aller schiefen linearen Abbildungen $A: V \rightarrow V$ wird mit dem mathematischen Symbol $\mathfrak{so}(V)$ bezeichnet. Auf ihm existiert die folgende Zusatzstruktur. Für zwei lineare Abbildungen $A: V \rightarrow V$ und $B: V \rightarrow V$ definiert man eine dritte lineare Abbildung, den sogenannten **Kommutator** $[A, B]: V \rightarrow V$, durch

$$[A, B] = AB - BA = -[B, A]. \quad (2.11)$$

Sind A und B schief, so gilt das gleiche für ihren Kommutator $[A, B]$:

$$[A, B]^T = B^T A^T - A^T B^T = BA - AB = -[A, B]. \quad (2.12)$$

Der Kommutator ist also eine antisymmetrische bilineare Abbildung $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{so}(V) \times \mathfrak{so}(V) \rightarrow \mathfrak{so}(V)$. Dieses nichtassoziative Produkt (oder **Lie-Klammer**) $[\cdot, \cdot]$ erfüllt die sogenannte **Jacobi-Identität**

$$[A, [B, C]] = [[A, B], C] + [B, [A, C]] \quad (2.13)$$

und macht $\mathfrak{so}(V)$ zu einer **Lie-Algebra**.

Das charakteristische Polynom $\chi(\lambda) = \text{Det}(\lambda \cdot \text{Id} - A)$ zu einem Element $A \in \mathfrak{so}(V)$ ist gerade (bzw. ungerade) in gerader (bzw. ungerader) Dimension $n = \dim V$:

$$\chi(\lambda) = \text{Det}(\lambda \cdot \text{Id} - A^T) = \text{Det}(\lambda \cdot \text{Id} + A) = (-1)^n \chi(-\lambda). \quad (2.14)$$

In ungerader Dimension n folgt $\chi(0) = 0$ und somit $\dim \ker A \geq 1$ für jedes $A \in \mathfrak{so}(V)$.

Modell für $\mathfrak{so}(V)$. Wir erinnern an die kanonische Identifikation

$$V \otimes V^* \xrightarrow{\sim} \text{End}(V), \quad u \otimes f \mapsto L, \quad Lv = uf(v). \quad (2.15)$$

Jede schiefe lineare Abbildung $A : V \rightarrow V$ lässt sich in der Form $A = L - L^T$ für eine lineare Abbildung $L : V \rightarrow V$ darstellen. Mit der Identifikation (2.15) und dem Euklidischen Isomorphismus $\mathcal{I} : V \rightarrow V^*$ können wir L und A wie folgt ausdrücken:

$$L = \sum_i u_i \otimes \mathcal{I}(v_i), \quad A = L - L^T = \sum_i (u_i \otimes \mathcal{I}(v_i) - v_i \otimes \mathcal{I}(u_i)). \quad (2.16)$$

Bemerkung. Die lineare Abbildung A von (2.16) wirkt natürlich gemäß der Formel

$$Aw = \sum_i (u_i \langle v_i, w \rangle - v_i \langle u_i, w \rangle). \quad (2.17)$$

Aufgabe. Sei $\text{Alt}^2(V^*)$ der Vektorraum der alternierenden 2-linearen Formen $V^* \times V^* \rightarrow \mathbb{R}$; er wird aufgespannt durch die äußeren Produkte $u \wedge v$ für $u, v \in V$. Die Zuordnung

$$\text{Alt}^2(V^*) \rightarrow \mathfrak{so}(V), \quad u \wedge v \mapsto u \otimes \mathcal{I}(v) - v \otimes \mathcal{I}(u) \quad (2.18)$$

ist ein Isomorphismus (von Vektorräumen). Insbesondere gilt

$$\dim \mathfrak{so}(V) = \dim \text{Alt}^2(V^*) = \frac{1}{2}n(n-1) \quad (n = \dim V). \quad (2.19)$$

Generatoren. Für eine Orthonormalbasis $\{e_1, \dots, e_n\}$ von V liefert die Definition

$$J_{ij} = e_i \otimes \mathcal{I}(e_j) - e_j \otimes \mathcal{I}(e_i) \quad (1 \leq j < i \leq n) \quad (2.20)$$

eine ausgezeichnete Basis von $\mathfrak{so}(V)$. Die Elemente J_{ij} heißen **Generatoren**. Wendet man die Generatoren auf die zugrunde liegende Basis an, so erhält man

$$J_{ij} e_k = e_i \langle e_j, e_k \rangle - e_j \langle e_i, e_k \rangle = e_i \delta_{jk} - e_j \delta_{ik}. \quad (2.21)$$

Es folgen die Kommutator-Relationen

$$[J_{ij}, J_{kl}] = \delta_{jk}J_{il} + \delta_{il}J_{jk} - \delta_{jl}J_{ik} - \delta_{ik}J_{jl}. \quad (2.22)$$

Das negative Quadrat des Generators J_{ij} ist die **Orthogonalprojektion** auf die von e_i und e_j aufgespannte Ebene E_{ij} :

$$-J_{ij}^2 = e_i \otimes \mathcal{I}(e_i) + e_j \otimes \mathcal{I}(e_j) \equiv \Pi_{E_{ij}}. \quad (2.23)$$

2.1.1 Infinitesimale Drehungen in 3 Dimensionen

Im Rest dieses Abschnitts beschäftigen wir uns mit dem für starre Körper relevanten Spezialfall der Drehgruppe $SO(V)$ zum Euklidischen Vektorraum $V \simeq \mathbb{R}^3$ der **Raumtranslationen**. Wir beginnen mit einigen Aussagen über die Lie-Algebra $\mathfrak{so}(V)$.

Im Fall von $V = \mathbb{R}^3$ verwendet man die Kurzschreibweise $\mathfrak{so}(\mathbb{R}^3) = \mathfrak{so}(3)$. Die Dimension der Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3)$ ist $3 \cdot (3 - 1)/2 = 3$. Bezüglich der **Standardbasis**

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

hat man den Satz von Generatoren

$$J_{21} = e_2 \otimes \mathcal{I}(e_1) - e_1 \otimes \mathcal{I}(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes (1 \ 0 \ 0) - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes (0 \ 1 \ 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Aufgabe. Im \mathbb{R}^3 kennt man das **Vektorprodukt** (oder Kreuzprodukt) $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Dieses nichtassoziative Produkt verleiht \mathbb{R}^3 die Struktur einer Lie-Algebra. Die Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathfrak{so}(3), \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

ist ein (nicht kanonisch erklärter) Isomorphismus von Lie-Algebren.

Kern von $A \in \mathfrak{so}(3)$. Das charakteristische Polynom $\chi(\lambda) = \text{Det}(\lambda \cdot \text{Id} - A)$ zu $A \in \mathfrak{so}(V)$ für $\dim V = 3$ ist, wie oben gezeigt, ungerade, also von der Form $\chi(\lambda) = \lambda^3 + c\lambda$. Wenn A von der Null-Abbildung verschieden ist, dann führt die Annahme $c = 0$ schnell zu einem Widerspruch. In diesem Fall gilt also $c \neq 0$ und $\ker A$ ist eindimensional. Sei nun $\text{im} A$ das Bild von V unter A .

Aufgaben. (i) Die Teilräume $\ker A$ und $\text{im} A$ sind A -invariant, orthogonal und spannen V auf:

$$V = \ker A \oplus \text{im} A. \quad (2.27)$$

(ii) Die Einschränkung $A' = A|_E$ von A auf die Ebene $E \equiv \text{im} A$ (für $A \neq 0$) ist schief bezüglich des auf E eingeschränkten Skalarprodukts von V . (iii) Jedes $v \in E$ ist orthogonal zu $A'v \in E$.

Untersuchung von A' . Wir betrachten jetzt die eingeschränkte Abbildung $A' = -(A')^T$ genauer. Vorab stellen wir fest, dass A' (über \mathbb{R}) **nicht diagonalisierbar** ist; in der Tat gibt die Annahme $A'v = \lambda v$ für $v \neq 0$ sofort einen Widerspruch zur Orthogonalität von v mit $A'v$. Als nächstes bemerken wir, dass $\langle u, A'u \rangle = 0$ durch die Substitution $u = A'v$ die Relation $\langle A'v, A'(A'v) \rangle = 0$ nach sich zieht. Wegen $\dim E = 2$ folgt die lineare Abhängigkeit von v und $A'(A'v)$. Jeder Vektor $v \in E$ ist also ein Eigenvektor von A'^2 . Letzteres erzwingt, dass A'^2 ein Vielfaches der Eins ist:

$$A'^2 = \lambda \text{Id}_E. \quad (2.28)$$

Der Eigenwert λ ist immer negativ, denn

$$\lambda|v|^2 = \langle v, A'^2v \rangle = -\langle A'v, A'v \rangle \leq 0. \quad (2.29)$$

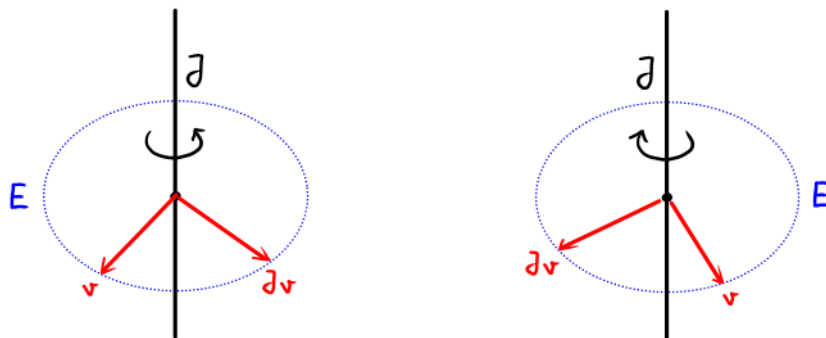
Nun bilden für ein beliebiges, fest gewähltes $v \neq 0$ die Vektoren $e_1 = v/|v|$ und $e_2 = A'v/|A'v|$ eine Orthonormalbasis von E . Mit der Definition $|A| := \sqrt{-\lambda} = |A'v|/|v|$ folgt

$$A'e_1 = e_2|A|, \quad A'e_2 = -e_1|A|. \quad (2.30)$$

Normalform. Wir fassen zusammen. Zu jeder Abbildung $A \in \mathfrak{so}(V)$, $A \neq 0$, für $\dim V = 3$ existieren die folgenden Daten: eine positive Zahl $|A|$, eine zum Kern von A orthogonale Ebene $E = \text{im} A$ (mit Orthogonalprojektor, für den wir die Bezeichnung Π_E einführen) und ein Generator $J = A/|A| \in \mathfrak{so}(V)$ mit Quadrat $J^2 = -\Pi_E$. In diesen Daten ausgedrückt hat A die Normalform

$$A = |A| J. \quad (2.31)$$

Die im Generator J kodierte geometrische Information besteht aus einer **Nullachse** ($\ker A = \ker J$) und einem von zwei möglichen **Drehsinnen** ($Je_1 = e_2$ oder $Je_2 = e_1$).



2.1.2 Eigentliche Drehungen in 3 Dimensionen

Nach der obigen Diskussion von infinitesimalen Drehungen $A \in \mathfrak{so}(V)$ wenden wir uns jetzt den endlichen Drehungen $R \in \text{SO}(V)$ zu. Als erste Aussage zeigen wir:

$$\boxed{\text{Jede eigentliche Drehung in 3 Dimensionen hat eine Drehachse.}} \quad (2.32)$$

Gemeint ist, dass jede Drehung $R \in \text{SO}(V)$ für $\dim V = 3$ einen **invarianten** Vektor besitzt, d.h. einen Vektor $v \in V$ mit $Rv = v$. Zum Beweis betrachten wir wieder das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \text{Det}(\lambda \cdot \text{Id} - R) = \lambda^3 + \dots - \text{Det} R. \quad (2.33)$$

Aus $\chi(0) = -\text{Det}R = -1$ und $\chi(+\infty) = +\infty$ folgt aufgrund der Stetigkeit der Funktion $\lambda \mapsto \chi(\lambda)$ die Existenz (mindestens) eines Eigenwerts im Intervall $(0, \infty)$. Sei $\lambda > 0$ dieser Eigenwert: $Rv = \lambda v$. Mit der Relation $\langle v, v \rangle = \langle Rv, Rv \rangle = \lambda^2 \langle v, v \rangle$ schließen wir dann $\lambda = +1$.

Aufgabe. Der Raum der invarianten Vektoren von $R \in \text{SO}(\mathbb{R}^3)$, $R \neq \text{Id}$, ist eindimensional.

Bestimmung der Drehachse. Wie lässt sich die Drehachse zu einem vorgegebenen R finden? Nun, man löst eben die Gleichung $Rv = v$. Alternativ folgert man aus $Rv = v$ die Gleichung $v = R^{-1}v = R^T v$ und erkennt, dass jeder invariante Vektor $v = Rv$ im Kern der schiefen Abbildung $R - R^T$ liegt. Die Drehachse von R fällt also mit der Nullachse von $R - R^T$ zusammen.

Normalform. Aufbauend auf der Normalform (2.31) für $A \in \mathfrak{so}(V)$ geben wir eine Normalform für eigentliche Drehungen $R \in \text{SO}(V)$ an (immer unter der Annahme $V \simeq \mathbb{R}^3$). Sei dazu A die schiefe lineare Abbildung

$$A := \frac{1}{2}(R - R^T) = |A| J \quad (J^2 = -\Pi_E). \quad (2.34)$$

Mit Hilfe der Orthogonalitätsrelation $R^T R = \text{Id} = R R^T$ verifiziert man leicht, dass der Kommutator von $S := \frac{1}{2}(R + R^T)$ mit J verschwindet, d.h. es gilt $SJ = JS$. Hieraus folgt nach kurzer Rechnung (oder durch geometrische Überlegung), dass die symmetrische lineare Abbildung $S = S^T$ eine Linearkombination der Orthogonalprojektoren auf die Drehebene E und auf die Drehachse (oder Nullachse von $J \propto A$) sein muss:

$$S = c_1 \cdot \Pi_E + c_2 \cdot (\text{Id} - \Pi_E). \quad (2.35)$$

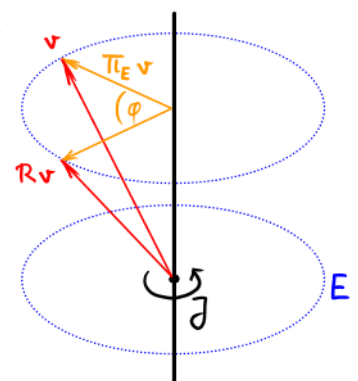
Für $v = Rv = R^T v$ auf der Drehachse hat man $Sv = v$ und $\Pi_E v = 0$ und somit (durch Koeffizientenvergleich) $c_2 = 1$. Insgesamt entsteht also der Ausdruck

$$R = \frac{1}{2}(R + R^T) + \frac{1}{2}(R - R^T) = S + A = \text{Id} - \Pi_E + c_1 \Pi_E + |A| J. \quad (2.36)$$

Mit $J^T = -J$ ergibt sich durch Nullsetzen des Koeffizienten von Π_E in $R^T R - \text{Id} = 0$ die Beziehung $c_1^2 + |A|^2 = 1$. Demgemäß existiert eine eindeutig bestimmte Zahl $\varphi \in [0, \pi]$ mit $c_1 = \cos \varphi$ und $|A| = \sin \varphi$. Hiermit erhalten wir schließlich die folgende **Normalform für R** :

$$R = \text{Id} - \Pi_E + \cos(\varphi) \Pi_E + \sin(\varphi) J. \quad (2.37)$$

Die Geometrie auf der rechten Seite dieses Ausdrucks ist klar: $\text{Id} - \Pi_E$ projiziert auf die durch J kodierte Drehachse, und die verbleibenden zwei Terme bestimmen eine Drehung durch den Winkel φ in der zur Drehachse senkrechten Ebene E mit dem Drehsinn von J .



Aufgabe. Es gilt die Formel $R = \exp(\varphi J)$.

Matrixdarstellung. Sei e_3 ein Einheitsvektor auf der Drehachse von $R \in \text{SO}(V)$, $V \simeq \mathbb{R}^3$, und $\{e_1, e_2 = J e_1\}$ eine Orthonormalbasis für die zur Drehachse $\mathbb{R} \cdot e_3$ senkrechte Ebene E . Dann gilt:

$$R e_1 = e_1 \cos \varphi + e_2 \sin \varphi, \quad R e_2 = -e_1 \sin \varphi + e_2 \cos \varphi, \quad R e_3 = e_3, \quad (2.38)$$

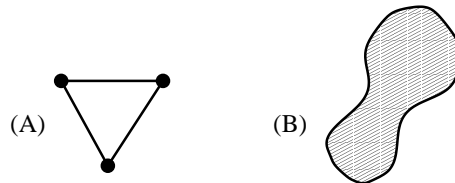
oder in Matrixdarstellung bezüglich $\{e_1, e_2, e_3\}$ als Standardbasis von $V = \mathbb{R}^3$:

$$R = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

2.2 Kinematik starrer Körper: Winkelgeschwindigkeit

Wir betrachten im Folgenden zwei mathematische Idealisierungen realer Körper, die wir den **starreren Körper** nennen:

- (A) Ein System von N Punkten mit Massen m_1, m_2, \dots, m_N , deren Abstände konstant sind.
- (B) Eine starre Massenverteilung ρ .



Die Gesamtmasse ist $M = \sum_{i=1}^N m_i$ im Modell (A) und $M = \int_{\mathbb{R}^3} \rho$ im Modell (B).

Konfigurationsraum. Der koordinatenfreien Untersuchung der Kinematik und Dynamik starrer Körper legen wir den dreidimensionalen Euklidischen Raum E_3 mit Differenzvektorraum $V \simeq \mathbb{R}^3$ zugrunde. Zur Buchführung über die räumliche Lage des starren Körpers treffen wir als erstes die Wahl eines **Aufpunkts**, d.h. eines ausgewählten, mit dem starren Körper fest verbundenen Punkts. Der Ort des Aufpunkts zur Zeit t sei mit $\alpha(t) \in E_3$ bezeichnet. Da alle anderen Punkte $\gamma_i(t)$ des Körpers ($i = 1, \dots, N$ im Modell (A)) mit dem Aufpunkt $\alpha(t)$ starr verbunden sind, ergeben sich ihre Ortsvektoren bzgl. $\alpha(t)$ aus (ein und derselben) Drehung $R(t) : V \rightarrow V$ der Anfangsdifferenz $\gamma_i(0) - \alpha(0)$; somit gilt $\gamma_i(t) - \alpha(t) = R(t)(\gamma_i(0) - \alpha(0))$, oder in aufgelöster Form

$$\gamma_i(t) = \alpha(t) + R(t)(\gamma_i(0) - \alpha(0)). \quad (2.40)$$

Das Paar $(\alpha(t) - \alpha(0), R(t))$ einer Translation $\alpha(t) - \alpha(0) \in V$ des Aufpunkts zusammen mit einer eigentlichen Drehung $R(t) \in \text{SO}(V)$ bestimmt zu jeder festen Zeit t ein Element der Gruppe Euklidischer Bewegungen. Der **Konfigurationsraum** (d.h. der Raum der verallgemeinerten Ortskoordinaten) des starren Körpers ist also die Euklidische Bewegungsgruppe. Er ist sechsdimensional.

Wahl des Aufpunkts. Für die optimale Wahl des Aufpunkts sind dynamische Aspekte zu berücksichtigen. Ist das System abgeschlossen, d.h. wirken auf den starren Körper keine äußeren

Kräfte, so wählt man für den Aufpunkt am besten den Schwerpunkt. Wird der starre Körper an einem seiner Punkte festgehalten, dann liegt es nahe, diesen ausgezeichneten Punkt als Aufpunkt zu wählen. Aus rein kinematischer Sicht ist die Wahl des Aufpunkts allerdings willkürlich.

Hinweis. Ändert man den Aufpunkt (z.B. in α' statt α), dann wird (2.40) zu

$$\gamma_i(t) = \alpha'(t) + R(t)(\gamma_i(0) - \alpha'(0)), \quad \alpha'(t) = \alpha(t) + R(t)(\alpha'(0) - \alpha(0)).$$

Der translatorische Anteil der Euklidischen Bewegung wird also geändert, während der Drehanteil $R(t)$ gleich bleibt. Wie wir schon wissen, gilt die letztere Eigenschaft ganz allgemein für den linearen Teil (oder das Differential) jeder Galilei-Transformation; vgl. Gleichung (1.8).

Winkelgeschwindigkeit. Nun setzen wir $q(t) := \gamma_i(t) - \alpha(t)$, $q := \gamma_i(0) - \alpha(0)$ (für irgendeinen Punkt γ_i des starren Körpers) und bringen (2.40) hiermit in die Form

$$q(t) = R(t)q. \tag{2.41}$$

Differenzieren nach der Zeit gibt $\dot{q}(t) = \dot{R}(t)q = (\dot{R}(t)R(t)^{-1})R(t)q$ oder

$$\dot{q}(t) = \omega(t)q(t), \quad \omega(t) = \dot{R}(t)R(t)^{-1}. \tag{2.42}$$

Mit dem gleichen Argument wie in (2.10) von Abschn. 2.1 ist $\omega(t) = \dot{R}(t)R(t)^{-1} : V \rightarrow V$ schieb:

$$\omega(t)^T = -\omega(t) \in \mathfrak{so}(V). \tag{2.43}$$

Diese schiefe lineare Abbildung $\omega(t)$ heißt die **momentane Winkelgeschwindigkeit** des starren Körpers. Wir betonen, dass $\omega(t)$ wie $R(t)$ invariant erklärt ist und insbesondere (wie $R(t)$) nicht von der Wahl des Aufpunkts abhängt.

Interpretation. Zur unmittelbaren Deutung von ω nehmen wir den Aufpunkt als ruhend an (oder besser: wir betrachten die Bewegung des starren Körpers aus der Perspektive des Aufpunkts). Wir setzen also $\alpha(t) = \alpha(0) = \text{const}$ in Gleichung (2.40). Die Geschwindigkeit $\dot{q} = \omega q$ ist dann identisch zur totalen Geschwindigkeit des Körperpunkts $\gamma(t)$ mit Ortsvektor $q(t) = \gamma(t) - \alpha(0)$ relativ zum Aufpunkt (die Indizierung durch i wird hier unterdrückt). In dieser Situation hat die uns als Normalform bekannte Zerlegung

$$\omega(t) = |\omega(t)|J(t) \tag{2.44}$$

die folgende Bedeutung. Betrachte die von $J(t)$ bestimmte Gerade

$$D(t) = \alpha(0) + \mathbb{R} \cdot \ker J(t) \tag{2.45}$$

durch den ruhenden Aufpunkt $\alpha(t) = \alpha(0)$. Der Ortsvektor $q(t) = \gamma(t) - \alpha(0)$ jedes Punkts $\gamma(t) \in D(t)$ liegt in der Nullachse von $J(t)$. Alle solche Punkte haben Geschwindigkeit $\dot{\gamma}(t) = 0$ und befinden sich somit in einem Zustand momentaner Ruhe. Die Gerade $D(t)$ ist also die **momentane Drehachse** des starren Körpers. Punkte $\gamma(t) \notin D(t)$ haben eine Geschwindigkeit $\dot{\gamma}(t) = |\omega(t)|J(t)q(t)$, die senkrecht zur Drehachse und senkrecht zum projizierten Ortsvektor

$\Pi_{E(t)} q(t)$ steht. Der Betrag der Geschwindigkeit ist das Produkt $|\dot{\gamma}(t)| = |\omega(t)| |\Pi_{E(t)} q(t)|$ aus dem Betrag $|\omega(t)|$ der momentanen Winkelgeschwindigkeit und dem Abstand $|\Pi_{E(t)} q(t)|$ von der momentanen Drehachse.

Hinweis. Man nennt $\omega = \dot{R}R^{-1}$ auch die Winkelgeschwindigkeit bezüglich des **raumfesten** Systems. Hingegen heißt $\tilde{\omega} = R^{-1}\dot{R}$ die Winkelgeschwindigkeit bzgl. des **körperfesten** Systems. Diese Sprechweisen machen Sinn, wenn alle Größen bezüglich eines raumfesten bzw. körperfesten Koordinatensystems ausgedrückt werden (was wir hier nicht tun, da wir koordinatenfrei arbeiten).

Drehimpuls. Wir suchen jetzt noch den Anschluss an eine uns schon bekannte Größe. Für diesen Zweck muss vorab geklärt werden, wie man ein Element $A \in \text{End}(V^*)$ mit einem Element $B \in \text{End}(V)$ paart (dabei ist eine Normierungskonstante zu wählen). Die richtige Antwort lautet

$$A(B) = \frac{1}{2} \text{Tr}(A^t B), \quad (2.46)$$

wobei $\text{Tr}(A^t B)$ die **Spur** der linearen Abbildung $A^t B : V \rightarrow V$ bezeichnet. Hiermit berechnen wir nun die Paarung des in (1.57) definierten Drehimpulses $L \in \mathfrak{so}(3)^*$ mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega \in \mathfrak{so}(3)$. Mit Hilfe der Relationen $(p_i \otimes q_i)^t = q_i \otimes p_i$ und $\text{Tr}((q_i \otimes p_i)\omega) = p_i(\omega q_i)$ erhalten wir

$$L(\omega) \equiv \frac{1}{2} \text{Tr}(L^t \omega) = \frac{1}{2} \sum_i p_i(\omega q_i) - \frac{1}{2} \sum_i \mathcal{I}(q_i) (\omega \mathcal{I}^{-1}(p_i)). \quad (2.47)$$

Der erste Term ist gleich der kinetischen Energie T des starren Körpers:

$$\frac{1}{2} \sum_i p_i(\omega q_i) = \frac{1}{2} \sum_i \langle m_i \dot{q}_i, \omega q_i \rangle = \frac{1}{2} \sum_i m_i |\dot{q}_i|^2 = T, \quad (2.48)$$

und auch der zweite Term gibt diesen Beitrag:

$$- \sum_i \mathcal{I}(q_i) (\omega \mathcal{I}^{-1}(p_i)) = - \sum_i m_i \langle q_i, \omega \dot{q}_i \rangle = + \sum_i m_i \langle \omega q_i, \dot{q}_i \rangle = 2T. \quad (2.49)$$

Insgesamt haben wir also $L(\omega) = 2T$. Dieses Ergebnis macht deutlich, dass Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit in derselben Beziehung zueinander stehen wie Impuls und Geschwindigkeit: die **Paarung** der einen Größe mit der anderen ergibt jeweils die (verdoppelte) kinetische Energie.

2.3 Kinematik: Trägheitstensor

Den nachfolgenden Betrachtungen legen wir fürs erste die mathematische Idealisierung (A) zugrunde. Für die Geschwindigkeit des i -ten Punkts des starren Körpers ergibt sich durch Bilden der Zeitableitung von (2.40) der Ausdruck

$$\dot{\gamma}_i(t) = \dot{\alpha}(t) + \dot{R}(t)(\gamma_i(0) - \alpha(0)). \quad (2.50)$$

Ein zentraler Begriff in der Theorie des starren Körpers ist der des Trägheitstensors. Um ihn einzuführen, betrachten wir (2.50) zunächst für $\dot{\alpha}(t) = 0$, d.h. der Aufpunkt befinde sich in Ruhe. Mit Gleichung (2.42), also mit $\dot{\gamma}_i(t) = \omega(t) q_i(t)$, haben wir dann (wie oben)

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\dot{\gamma}_i|^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i |\omega(t) q_i(t)|^2. \quad (2.51)$$

Wie zuvor sind $q_i(t) = \gamma_i(t) - \alpha(0)$ die zeitabhängigen Ortsvektoren bezüglich des Aufpunkts. Offenbar ist die kinetische Energie T des starren Körpers eine über die Ortsvektoren $q_i(t)$ explizit zeitabhängige quadratische Form in der Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$. Um zu einer zeitunabhängigen Form zu gelangen, wechselt man von der "raumbezogenen" Winkelgeschwindigkeit $\omega = \dot{R}R^{-1}$ zur "körperbezogenen" Winkelgeschwindigkeit $\tilde{\omega} = R^{-1}\dot{R}$ mittels der Relation $|\omega(t) q_i(t)| = |\tilde{\omega}(t) q_i(0)|$:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i |\tilde{\omega}(t) q_i(0)|^2. \quad (2.52)$$

Etwas anders aufgeschrieben haben wir

$$T = \frac{1}{2} I(\tilde{\omega}(t), \tilde{\omega}(t)), \quad I(\xi, \eta) = \sum_i m_i \langle \xi q_i(0), \eta q_i(0) \rangle. \quad (2.53)$$

Definition. Die (zeitunabhängige) symmetrische Bilinearform

$$I^{(\alpha)} \equiv I : \mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{so}(3) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\xi, \eta) \mapsto I(\xi, \eta), \quad (2.54)$$

heißt der *Trägheitstensor* des starren Körpers relativ zum Aufpunkt α . (Wir erinnern daran, dass der Aufpunkt in den Ausdruck in (2.53) über die Ortsvektoren $q_i = \gamma_i - \alpha$ eingeht.) Seinen Wert $I_J \equiv I(J, J)$ auf einem Generator $J \in \mathfrak{so}(3)$ nennen wir das *Trägheitsmoment* bezüglich der J -Achse (d.h. bzgl. der Achse durch α in Richtung des Nullraums $\ker J$).

Bemerkung. Alternativ lässt sich der Trägheitstensor als quadratische Form auffassen. (Übrigens ist I differentialgeometrisch gesprochen eine linksinvariante quadratische Form auf dem Tangentialbündel von $SO(3)$.)

Trägheitsmoment. Zum Generator $J = -J^T \in \mathfrak{so}(3)$ einer Drehung berechnen wir jetzt das Trägheitsmoment I_J bezüglich der J -Achse, wie folgt. Wie zuvor sei $J^2 = -\Pi_E$. Dann ist

$$I_J = I(J, J) = \sum_i m_i |J q_i|^2 = \sum_i m_i \langle q_i, J^T J q_i \rangle = \sum_i m_i \langle q_i, \Pi_E q_i \rangle. \quad (2.55)$$

Benützen wir jetzt noch $\Pi_E = \Pi_E^2$ und $\Pi_E^T = (-J^2)^T = -(J^T)^2 = -J^2 = \Pi_E$, so erhalten wir

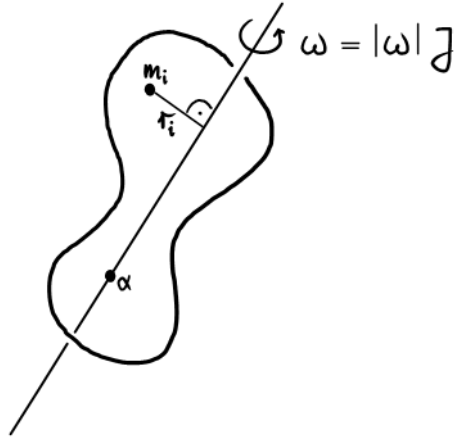
$$I_J = \sum_i m_i \langle q_i, \Pi_E^2 q_i \rangle = \sum_i m_i \langle \Pi_E q_i, \Pi_E q_i \rangle. \quad (2.56)$$

Im Modell (A) resultiert hiermit die Formel

$$T = \frac{1}{2} I_J |\omega|^2, \quad I_J = \sum_i m_i r_i^2, \quad r_i = |\Pi_E q_i|, \quad (2.57)$$

wobei die Größen r_i die *Abstände* von der Drehachse sind. Im Modell (B) ist die Summe über $i = 1, \dots, N$ natürlich durch das Integral gegen die Massendichte ρ (mit dem Quadrat r^2 des Abstands von der Drehachse als Integranden) zu ersetzen:

$$I_J = \int r^2 \rho. \quad (2.58)$$



Satz von Steiner. Wir fragen nun, wie sich der Trägheitstensor I unter einer Verschiebung des Aufpunkts ändert. Diese Frage hat eine einfache Antwort, falls wir vom **Schwerpunkt** Γ als Aufpunkt zu einer beliebigen Stelle α als Aufpunkt übergehen. Seien also $I^{(\Gamma)}$ und $I^{(\alpha)}$ die Trägheitstensoren bezüglich Γ bzw. α . Mit $\alpha = \Gamma + a$ erhalten wir im Modell (A)

$$\begin{aligned} I^{(\alpha)}(\xi, \eta) &= \sum_i m_i \langle \xi (\gamma_i - \Gamma - a), \eta (\gamma_i - \Gamma - a) \rangle \\ &= I^{(\Gamma)}(\xi, \eta) - \sum_i m_i \langle \xi (\gamma_i - \Gamma), \eta a \rangle - \sum_i m_i \langle \xi a, \eta (\gamma_i - \Gamma) \rangle + M \langle \xi a, \eta a \rangle. \end{aligned}$$

Die beiden mittleren Terme in der zweiten Zeile verschwinden wegen $\sum_i m_i (\gamma_i - \Gamma) = 0$ per Definition des Schwerpunkts. Es resultiert somit die Formel **(Steiner)**

$$I^{(\alpha)}(\xi, \eta) = I^{(\Gamma)}(\xi, \eta) + M \langle \xi a, \eta a \rangle. \quad (2.59)$$

Als spezielle Konsequenz hat man: ist $|a_\perp| = |\Pi_E a|$ die Länge des auf die Drehebene E ($J^2 = -\Pi_E$) projizierten Differenzvektors $a = \alpha - \Gamma$, so hängen die Trägheitsmomente bezüglich der Drehachse J wie folgt zusammen:

$$I_J^{(\alpha)} = I_J^{(\Gamma)} + M |a_\perp|^2. \quad \square \quad (2.60)$$

Befindet sich der starre Körper in Bewegung, so sind seine Trägheitsmomente bezüglich raumfester Achsen J im allgemeinen zeitabhängig. Hingegen ist das Trägheitsmoment bezüglich jeder körperfesten Achse zeitunabhängig. Mit elementaren Methoden der linearen Algebra zeigt man:

Satz. Für jeden starren Körper existiert ein Orthonormalsystem von körperfesten (Dreh-)Achsen J_ν ($\nu \in \{21, 13, 32\}$), welches den Trägheitstensor $I^{(\alpha)} \equiv I$ (zum Aufpunkt α) diagonalisiert:

$$I(J_\mu, J_\nu) = I_\nu \delta_{\mu\nu}, \quad \frac{1}{2} \text{Tr}(J_\mu^T J_\nu) = \delta_{\mu\nu}. \quad (2.61)$$

Definition. Wählt man den Schwerpunkt Γ als Aufpunkt, so heißen die Zahlen I_ν ($\nu \in \{21, 13, 32\}$) die **Hauptträgheitsmomente** und die Drehachsen J_ν die **Haupt(trägheits)achsen** des starren Körpers. Den starren Körper mit drei verschiedenen Hauptträgheitsmomenten nennen wir den unsymmetrischen **Kreisel**. Sind zwei Hauptträgheitsmomente gleich, spricht man vom symmetrischen Kreisel. Der total entartete Fall von drei gleichen Hauptträgheitsmomenten heißt der Kugelkreisel.

Bemerkungen. (i) Im Fall des symmetrischen Kreisels und des Kugelkreisels sind die Hauptträgheitsachsen nicht eindeutig bestimmt. (ii) Jeder starre Körper mit kubischer Symmetrie (z.B. ein Würfel) ist ein Kugelkreisel.

Zerlegung von T . Um möglicher Verwirrung vorzubeugen, gehen wir jetzt zu einer aufwändigeren Notation für den Trägheitstensor über. Wir schreiben $I \equiv I^K$ für den bislang betrachteten, körperbezogenen (und zeitunabhängigen) Trägheitstensor. Mit $I^R \equiv I^{R(t)}$ bezeichnen wir sein raumbezogenes (und i.a. explizit zeitabhängiges) Analogon. Zwischen I^K und I^R besteht der **Zusammenhang** $I^R(\omega, \omega) = I^K(\tilde{\omega}, \tilde{\omega})$ oder (mit $\omega R = \dot{R} = R\tilde{\omega}$)

$$I^R(\xi, \eta) = I^K(R^{-1}\xi R, R^{-1}\eta R), \quad (2.62)$$

was die explizite Zeitabhängigkeit (über $R = R(t)$) von I^R sichtbar macht.

Nun legen wir den Aufpunkt α in den **Schwerpunkt** Γ des starren Körpers, und wir erinnern an die Beziehungen

$$\gamma_i(t) = \Gamma(t) + R(t)(\gamma_i(0) - \Gamma(0)), \quad \dot{\gamma}_i - \dot{\Gamma} = \omega(\gamma_i - \Gamma).$$

Die kinetische Energie T des starren Körpers hat dann die Zerlegung

$$T = T_t + T_r, \quad (2.63)$$

wobei $T_t = \frac{1}{2}M|\dot{\Gamma}|^2$ die kinetische Energie der **Translationsbewegung** des Schwerpunkts und $T_r = \frac{1}{2}I^R(\omega, \omega) = \frac{1}{2}I^K(\tilde{\omega}, \tilde{\omega})$ die kinetische Energie der **Drehbewegung** um den Schwerpunkt ist (also mit dem Schwerpunkt als Aufpunkt in der Definition des Trägheitstensors $I \equiv I^K$). Die Zerlegung (2.63) ergibt sich durch kurze Rechnung:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i |\dot{\Gamma} + (\dot{\gamma}_i - \dot{\Gamma})|^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i |\dot{\Gamma} + \omega(\gamma_i - \Gamma)|^2 \\ &= \frac{1}{2}M|\dot{\Gamma}|^2 + \sum_i m_i \langle \dot{\Gamma}, \omega(\gamma_i - \Gamma) \rangle + \frac{1}{2} \sum_i m_i |\omega(\gamma_i - \Gamma)|^2 = T_t + T_r. \end{aligned}$$

Der Mischterm verschwindet wegen $\sum_i m_i(\gamma_i - \Gamma) = 0$ per Definition des Schwerpunkts.

Zerlegung von L . Der Drehimpuls $L \equiv L^{(\alpha)}$ des starren Körpers relativ zum Aufpunkt α hat die Zerlegung

$$L = L_t + L_r, \quad (2.64)$$

wobei $L_t = P \otimes (\Gamma - \alpha) - \mathcal{I}(\Gamma - \alpha) \otimes \mathcal{I}^{-1}(P)$ der Drehimpuls des Schwerpunkts Γ relativ zum Aufpunkt α und $L_r \equiv L^{(\Gamma)}$ der Drehimpuls des starren Körpers relativ zum Schwerpunkt Γ ist. Der Nachweis gelingt wieder durch kurze Rechnung:

$$\begin{aligned} L &= \sum_i p_i \otimes q_i - \sum_i \mathcal{I}(q_i) \otimes \mathcal{I}^{-1}(p_i) = \sum_i m_i \mathcal{I}(\dot{\Gamma} + (\dot{\gamma}_i - \dot{\Gamma})) \otimes ((\Gamma - \alpha) + (\gamma_i - \Gamma)) - \dots \\ &= M\mathcal{I}(\dot{\Gamma}) \otimes (\Gamma - \alpha) + \sum_i m_i \mathcal{I}(\dot{\gamma}_i - \dot{\Gamma}) \otimes (\gamma_i - \Gamma) - \dots = L_t + L_r. \end{aligned}$$

Auch hier verschwinden die Mischterme wegen $\sum_i m_i(\gamma_i - \Gamma) = 0 = \sum_i m_i(\dot{\gamma}_i - \dot{\Gamma})$.

Durch die gleiche Überlegung wie am Ende von Abschnitt 2.2 zeigt man $L_r(\omega) = 2T_r$. Hieraus folgt mit $T_r = \frac{1}{2}I^R(\omega, \omega)$ die Beziehung

$$L_r = I^R(\omega, \cdot). \quad (2.65)$$

In diesem Kontext fungiert der Trägheitstensor als **symmetrische Abbildung** $I^R : \mathfrak{so}(3) \rightarrow \mathfrak{so}(3)^*$, welche die Winkelgeschwindigkeit $\omega \in \mathfrak{so}(3)$ in den Drehimpuls $L_r \in \mathfrak{so}(3)^*$ umwandelt.

2.4 Der freie Kreisel: geometrische Konstruktion

In Abwesenheit von äußeren Kräften bewegt sich der Schwerpunkt des starren Körpers geradlinig und gleichförmig: $\ddot{\Gamma} = 0$. In diesem Fall gilt:

$$\frac{d}{dt} T_t = 0, \quad \frac{d}{dt} L_t = 0. \quad (2.66)$$

Aus den Erhaltungssätzen für Energie ($\dot{T} = 0$) und Drehimpuls ($\dot{L} = 0$) folgt dann:

$$\frac{d}{dt} T_r = \frac{d}{dt} (T - T_t) = 0, \quad \frac{d}{dt} L_r = \frac{d}{dt} (L - L_t) = 0. \quad (2.67)$$

Für das Folgende ist es geschickt, den Bezugspunkt α mit dem Schwerpunkt Γ zu **identifizieren**. Dann ist $T_t = 0$, $L_t = 0$ und $T_r = T$, $L_r = L$. In diesem Fall lassen sich die Erhaltungssätze für die Energie und den Drehimpuls,

$$2T = I^R(\omega, \omega) = L(\omega) = \text{const}, \quad L = I^R(\omega, \cdot) = \text{const}, \quad (2.68)$$

in der folgenden Weise geometrisch deuten.

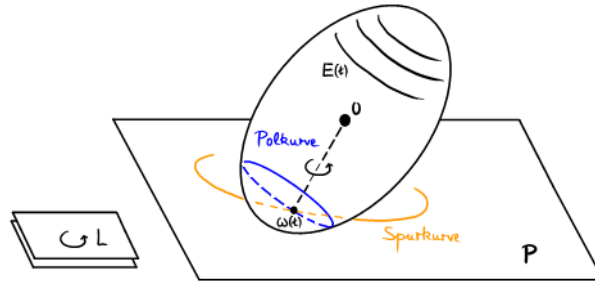
Invariable Ebene. Die Lösungsmenge (für ω als Unbekannte) der Gleichung $L(\omega) = \text{const}$ ist eine Ebene, P , im 3-dimensionalen Raum der Winkelgeschwindigkeiten $\omega \in \mathfrak{so}(3)$. Da der Drehimpuls L nicht von der Zeit abhängt, ist diese Ebene **P invariabel**, d.h. zeitunabhängig.

Energieellipsoid. Der Energiesatz, $2T(\omega) = I^R(\omega, \omega) = \text{const}$, hat als Lösungsmenge (wieder für ω als Unbekannte) eine elliptische Fläche, das sogenannte **“Energieellipsoid”** $E(t)$. Da der raumbezogene Trägheitstensor $I^R = I^R(t)$ mit der Zeit variiert, ist die Lage des Energieellipsoids nicht invariabel, sondern zeitabhängig. Allerdings ist die Gestalt des Energieellipsoids invariabel, denn die Eigenwerte der raumbezogenen quadratischen Form $\omega \mapsto I^R(\omega, \omega) = I^K(R^{-1}\omega R, R^{-1}\omega R)$ sind unabhängig von der Zeit gleich den Hauptträgheitsmomenten I_ν des Trägheitstensors $I \equiv I^K$.

Satz von Poinsot. Die momentane Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ unterliegt also zwei Bedingungen: einerseits liegt sie in der invariablen Ebene P , andererseits in der formfesten aber positionsvariablen Fläche des Energieellipsoids $E(t)$. Wie stehen nun P und $E(t)$ zueinander? Wegen $L = I^R(\omega, \cdot) = (dT)_\omega$ ist die **Tangentialebene** von $E(t)$ im Punkt $\omega(t)$ parallel zur invariablen Ebene P . Da $\omega(t)$ sowohl in P wie in $E(t)$ enthalten ist, folgt aus dieser Parallelität, dass sich P und E in $\omega(t)$ und nur in diesem Punkt berühren. Da $\omega(t)$ zudem in Richtung der momentanen Drehachse (im Ortsraum E_3) zeigt und die gleiche Drehachse (nach Übertragung in den Raum

$\mathfrak{so}(3)$ der Winkelgeschwindigkeiten) die Bewegung des Energieellipsoids steuert, ist der Punkt $\omega(t)$ der Berührung von P und $E(t)$ **momentan in Ruhe** und es gilt (Poincot):

$$\boxed{\text{Das Energieellipsoid rollt ohne Schlupf auf der invariablen Ebene.}} \quad (2.69)$$



Kommentare. Die Kurve, die durch den Berührungspunkt auf dem Energieellipsoid beschrieben wird, heißt **Polkurve**. Die entsprechende Kurve auf der invariablen Ebene nennt man **Spurkurve**. Bei gegebenen Anfangsbedingungen ist es ein rein geometrisches Problem, Spurkurve und Polkurve zu bestimmen. Damit kennt man die Bahn $t \mapsto \omega(t)$, ohne den zeitlichen Verlauf zu kennen. Für den symmetrischen Kreisel ist das Energieellipsoid ein **Rotationsellipsoid**, und Polkurve und Spurkurve sind Kreise. Das Energieellipsoid des Kugelkreisels ist eine Kugeloberfläche. In diesem Fall folgt aus der geometrischen Konstruktion von Poincot: $\omega(t) = \text{const}$; ein kräftefreier Kugelkreisel rotiert also immer um eine feste Achse mit fester Winkelgeschwindigkeit.

Mitteilung. Wie nach der analytischen Lösung im Abschnitt 2.5 klar sein wird, ist die Polkurve geschlossen, während die Spurkurve im allgemeinen nicht geschlossen ist.

2.5 Die Eulerschen Gleichungen

Als Ausgangspunkt für die Herleitung der Eulerschen Bewegungsgleichungen des starren Körpers benutzen wir den Impulssatz und den Drehimpulssatz in der Form

$$M\ddot{\Gamma} = F^{(\text{ext})}, \quad \dot{L} = D, \quad (2.70)$$

wobei $F^{(\text{ext})}$ die Summe der äußeren Kräfte und $D = D^{(\Gamma)}$ und $L \equiv L^{(\Gamma)}$ das gesamte Drehmoment bzw. der gesamte Drehimpuls bezüglich des Schwerpunkts Γ sind. Die Gleichungen (2.70) konstituieren ein System von **sechs Differentialgleichungen** zweiter Ordnung in der Zeitvariablen t für die verallgemeinerten Koordinaten des starren Körpers, nämlich für das Element $(\Gamma(t) - \Gamma(0), R(t))$ der Euklidischen Bewegungsgruppe.

Übertragung. Es ist zweckmäßig, die Gleichung $\dot{L} = D$ ins körperfeste System zu übertragen. Dazu führen wir den **körperbezogenen** Drehimpuls \tilde{L} ein durch

$$\tilde{L}(\tilde{\omega}) = L(\omega) = L(R\tilde{\omega}R^{-1}) = \frac{1}{2}\text{Tr}(R^{-1}L^tR\tilde{\omega}), \quad (2.71)$$

mit dem Ergebnis $\tilde{L} = R^t L (R^t)^{-1}$. Analog hat man für das körperbezogene Drehmoment die Übertragungsformel $\tilde{D} = R^t D (R^t)^{-1}$. Hiermit berechnet man

$$\tilde{D} = R^t \dot{L} (R^t)^{-1} = R^t \frac{d}{dt} \left((R^t)^{-1} \tilde{L} R^t \right) (R^t)^{-1} = \frac{d}{dt} \tilde{L} + \tilde{L} \dot{R}^t (R^t)^{-1} - \dot{R}^t (R^t)^{-1} \tilde{L}. \quad (2.72)$$

Mit $\dot{R}^t (R^t)^{-1} = (R^{-1} \dot{R})^t = \tilde{\omega}^t$ erhalten wir dann die **Eulersche Gleichung**:

$$\frac{d}{dt} \tilde{L} - [\tilde{\omega}^t, \tilde{L}] = \tilde{D}. \quad (2.73)$$

In Komponenten. Seien J_ν die Hauptachsen und $I_\nu = I^K(J_\nu, J_\nu)$ die Hauptträgheitsmomente des starren Körpers bezüglich seines Schwerpunkts. Wir entwickeln nach der **Hauptachsenbasis**:

$$\tilde{\omega} = \sum_\nu \tilde{\omega}_\nu J_\nu, \quad \tilde{L} = - \sum_\nu \tilde{L}_\nu J_\nu^t, \quad \tilde{L}(\tilde{\omega}) = \sum_\nu \tilde{L}_\nu \tilde{\omega}_\nu, \quad \tilde{D} = - \sum_\nu \tilde{D}_\nu J_\nu^t. \quad (2.74)$$

Führen wir weiter die **Strukturkonstanten** $f_{\mu, \nu\lambda}$ der Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3)$ ein:

$$[J_\nu, J_\lambda] = \sum_\mu J_\mu f_{\mu, \nu\lambda}, \quad (2.75)$$

so können wir die Eulersche Gleichung folgendermaßen **in Komponenten** ausdrücken:

$$\frac{d}{dt} \tilde{L}_\mu + \sum_{\nu\lambda} f_{\mu, \nu\lambda} \tilde{\omega}_\nu \tilde{L}_\lambda = \tilde{D}_\mu. \quad (2.76)$$

Aus $\tilde{L} = I^K(\tilde{\omega}, \cdot)$ resultiert die Proportionalität $\tilde{L}_\nu(t) = I_\nu \tilde{\omega}_\nu(t)$. Somit sind (2.76) drei nicht-lineare Differentialgleichungen erster Ordnung in der Zeit für die drei Komponenten $\tilde{\omega}_\nu$ der körperbezogenen Winkelgeschwindigkeit. Wir bringen sie in die folgende **Endform**:

$$\frac{d}{dt} \tilde{\omega}_\mu(t) + \sum_{\nu\lambda} f_{\mu, \nu\lambda} \tilde{\omega}_\nu(t) \tilde{\omega}_\lambda(t) \frac{I_\lambda - I_\nu}{2I_\mu} = \tilde{D}_\mu(t)/I_\mu. \quad (2.77)$$

Hält man die Lösung $t \mapsto \tilde{\omega}_\nu(t)$ der Eulerschen Gleichungen in Händen, so bestimmt man die Kurve $t \mapsto R(t)$ durch Lösen der Gleichung $R(t)^{-1} \dot{R}(t) = \sum \tilde{\omega}_\nu(t) J_\nu$.

Strukturkonstanten. Als Vorbereitung für die folgenden Betrachtungen geben wir eine explizite Beschreibung der Strukturkonstanten der Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3)$. Dazu erinnern wir zunächst an die Generatoren J_{21} , J_{31} und J_{32} von (2.25). Um uns vom Zwang der Indexordnung zu befreien, vereinbaren wir $J_{ij} \equiv -J_{ji}$. Außerdem vereinfachen wir die Indexnotation mit der **Konvention**

$$J_{21} = J_3, \quad J_{32} = J_1, \quad J_{13} = J_2. \quad (2.78)$$

Es sei betont, dass hiermit keine Wahl einer Orientierung von $V \simeq \mathbb{R}^3$ getroffen wird. Tatsächlich mag die zugrunde liegende Orthonormalbasis $\{e_1, e_2, e_3\}$ rechtshändig oder linkshändig sein. Aus der Definition $J_{ij} = e_i \otimes \mathcal{I}(e_j) - e_j \otimes \mathcal{I}(e_i)$ folgt jetzt

$$[J_1, J_2] = [J_{32}, J_{13}] = -[J_{13}, J_{32}] = -J_{12} = J_{21} = J_3. \quad (2.79)$$

Analog erhält man $[J_2, J_3] = J_1$ und $[J_3, J_1] = J_2$. Insgesamt haben wir somit

$$f_{3, 12} = f_{1, 23} = f_{2, 31} = +1, \quad f_{3, 21} = f_{1, 32} = f_{2, 13} = -1. \quad (2.80)$$

Alle anderen Strukturkonstanten (mit doppelt oder dreifach vorkommenden Indizes) sind Null.

2.5.1 Kräftefreier symmetrischer Kreisel

Hier und in den folgenden Unterabschnitten betrachten wir den **kräftefreien Fall**: $F^{(\text{ext})} = 0$ und $D = 0$. Als erstes behandeln wir das relativ einfache Problem des symmetrischen Kreisels.

Wir übernehmen die für die Generatoren soeben getroffene Indexkonvention $J_{21} \equiv J_3$ und schreiben für die Hauptträgheitsmomente entsprechend

$$I_{12} = I_{21} = I_3, \quad I_{23} = I_{32} = I_1, \quad I_{31} = I_{13} = I_2. \quad (2.81)$$

Für den symmetrischen Kreisel mit $I_1 = I_2 \neq I_3$ (und $I_1 \neq 0 \neq I_3$) vereinfacht sich die dritte Eulersche Gleichung zu $\frac{d}{dt} \tilde{\omega}_3 = 0$ an, woraus die Konstanz von $\tilde{\omega}_3$ folgt. Wir setzen

$$\Omega := \tilde{\omega}_3 \frac{I_3 - I_2}{I_1} = \tilde{\omega}_3 \frac{I_3 - I_1}{I_2} = \text{const.} \quad (2.82)$$

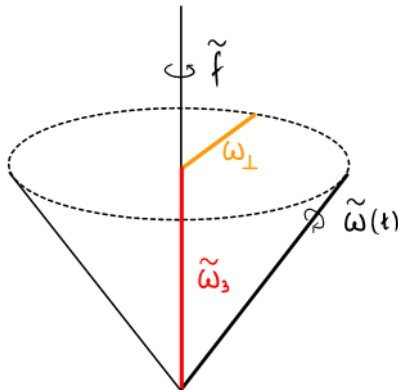
Dann lauten die verbleibenden zwei Gleichungen:

$$\frac{d}{dt} \tilde{\omega}_1(t) = -\Omega \tilde{\omega}_2(t), \quad \frac{d}{dt} \tilde{\omega}_2(t) = +\Omega \tilde{\omega}_1(t). \quad (2.83)$$

Präzessionsbewegung. Die Gleichungen (2.83) haben die allgemeine Lösung

$$\tilde{\omega}_1(t) = \omega_{\perp} \cos(\Omega t + \phi), \quad \tilde{\omega}_2(t) = \omega_{\perp} \sin(\Omega t + \phi), \quad (2.84)$$

wobei ω_{\perp} und ϕ Integrationskonstanten sind. Offenbar gilt: $|\tilde{\omega}(t)|^2 = (\tilde{\omega}_3)^2 + (\omega_{\perp})^2 = \text{const}$, und $\tilde{\omega}$ führt eine sogenannte **reguläre Präzession** mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω um die **Figurenachse** $\tilde{f} = J_3$ aus.



Anwendung (Euler). In der Näherung, dass die Erde als kräftefreier symmetrischer Kreisel angesehen werden kann, präzediert der **kinematische** Nordpol (in Richtung der raumbezogenen Winkelgeschwindigkeit ω) um den **geographischen** Nordpol (in Richtung der körperfesten Figurenachse $\tilde{f} = e_3$) mit der Periode $T_{pr} = 2\pi/\Omega = (2\pi/\tilde{\omega}_3) \cdot I_1/(I_3 - I_1) \simeq 300$ Tage, aufgrund von $(I_3 - I_1)/I_1 \simeq 1/300$ (Abplattung der Erde). Etwas Ähnliches wird auch beobachtet. Die Amplitude der Präzession ist sehr klein: kinematischer und geographischer Nordpol sind nie weiter als 4.5 Meter voneinander entfernt. Die Bahn ist aber sehr unregelmäßig, und die mittlere Periode ist ungefähr 430 Tage. Diese Abweichungen von der Eulerschen Vorhersage werden verschiedenen Störungen zugeschrieben (atmosphärische Bewegungen; Erde nicht starr).

Übertragung ins raumfeste System. Wie sieht nun die Bewegung aus raumfester Sicht aus? Um diese Frage zu beantworten, bringen wir die Vereinfachungen ein, die sich aus $I_1 = I_2$ für den

kräftefreien symmetrischen Kreisel ergeben. Die explizite Konstruktion der Drehoperation $R(t)$ als Lösung der Gleichung $R^{-1}\dot{R} = \tilde{\omega} = \sum_{\nu} \tilde{\omega}_{\nu} J_{\nu}$ lässt sich dann vermeiden.

Wir bemerken, dass wegen $\tilde{L}_1 = I_1 \tilde{\omega}_1$, $\tilde{L}_2 = I_2 \tilde{\omega}_2 = I_1 \tilde{\omega}_2$ und $\tilde{L}_3 = I_3 \tilde{\omega}_3 = I_1 \tilde{\omega}_3 + (I_3 - I_1) \tilde{\omega}_3$ die drei schiefen linearen Abbildungen $J_3, \tilde{\omega}, \tilde{L}^t \in \mathfrak{so}(3)$ linear abhängig sind:

$$I_1 \tilde{\omega} + (I_3 - I_1) \tilde{\omega}_3 J_3 = \sum_{\nu} \tilde{L}_{\nu} J_{\nu} = -\tilde{L}^t. \quad (2.85)$$

Daher sind sie **koplanar**, d.h. sie liegen alle in einer Ebene.

Nun gehen wir zum raumfesten System über:

$$\omega = R \tilde{\omega} R^{-1}, \quad f := R \tilde{f} R^{-1}, \quad L^t = R \tilde{L}^t R^{-1}. \quad (2.86)$$

Da die Operation $X \mapsto R X R^{-1}$ eine lineare Abbildung ist, überträgt sich die Eigenschaft der Koplanarität von $\tilde{f}, \tilde{\omega}, \tilde{L}^t$ auf f, ω, L^t . Die Größen $\omega(t)$ und $f(t)$ sind zeitabhängig, hingegen ist der Drehimpuls $L \in \mathfrak{so}(3)^*$ (und somit auch $L^t \in \mathfrak{so}(3)$) zeitunabhängig.

Aufgabe. Das zum Euklidischen Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ auf $V \simeq \mathbb{R}^3$ passende Skalarprodukt auf der Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3)$ ist $\langle A, B \rangle_{\mathfrak{so}(3)} = \frac{1}{2} \text{Tr}(A^T B)$; vgl. Gln. (2.61) und (2.46). Ist $J \in \mathfrak{so}(3)$ ein Generator ($J^2 = -\Pi_E$) und $A \in \mathfrak{so}(3)$ eine beliebige schiefe lineare Abbildung, so liefert

$$A = A_{\perp} + A_{\parallel}, \quad A_{\perp} = -[J, [J, A]], \quad A_{\parallel} = A + [J, [J, A]], \quad (2.87)$$

die Orthogonalzerlegung von A in zwei Komponenten, die zur J -Achse senkrecht bzw. parallel stehen (A_{\perp} bzw. A_{\parallel}). Der senkrechte Anteil hat die Länge (oder Norm) $|A_{\perp}| = |[J, A]|$. (Hinweis: für $B = [J, A]$ ist die Abbildung $B \mapsto [J, B]$ eine **Isometrie**, d.h. es gilt $|[J, B]| = |B|$.)

Satz. Die Figurenachse $f(t) = R(t) \tilde{f} R(t)^{-1}$ und die momentane Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ des kräftefreien symmetrischen Kreisels liegen zu allen Zeiten koplanar zum (kanonisch adjungierten) Drehimpuls $L^t \in \mathfrak{so}(3)^*$, um den sie eine reguläre Präzession mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω_r ausführen. Ω_r ist der Koeffizient $b > 0$ in der Zerlegung $\omega = a f - b L^t / |L|$.

Beweis. Die Länge von ω ist erhalten: $|\omega(t)| = |R(t) \tilde{\omega}(t) R(t)^{-1}| = |\tilde{\omega}(t)| = \text{const}$. Ebenso sind die Winkel zwischen f, ω und L^t erhalten, denn die Paarungen

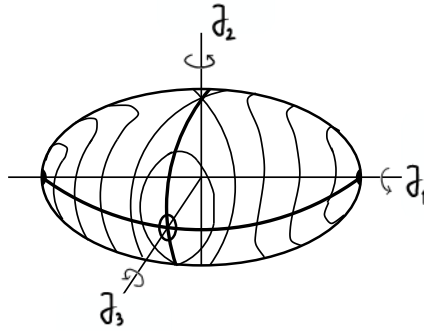
$$\frac{1}{2} \text{Tr}(L^t \omega) = L(\omega) = 2T = \text{const} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} \text{Tr}(L^t f) = L(f) = I_3 \tilde{\omega}_3 = \text{const} \quad (2.88)$$

sind zeitunabhängig. Folglich überstreichen ω und f **Kegel** um L^t . Dabei bewegen sie sich mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit, Ω_r , da Koplanarität zu allen Zeiten vorliegt. Zur Berechnung von Ω_r benützt man $\dot{f} = \dot{R} \tilde{f} R^{-1} - R \tilde{f} R^{-1} \dot{R} R^{-1}$, also

$$\dot{f} = [\omega, f]. \quad (2.89)$$

Nun sei $J_L := -L^t / |L|$ die invariable Drehimpulsachse und $f_{\perp} := -[J_L, [J_L, f]]$ die zu J_L senkrechte Komponente von f . Da Ω_r per Definition die Winkelgeschwindigkeit der Rotationsbewegung von f_{\perp} ist, haben wir

$$\Omega_r(t) = \frac{|\dot{f}(t)|}{|f_{\perp}(t)|} = \frac{|[\omega(t), f(t)]|}{|[J_L, f(t)]|}. \quad (2.90)$$



Dynamik. Jedem der sechs Enden der Halbachsen des Ellipsoids entspricht eine stationäre Lösung $\tilde{L} = \text{const}$ von (2.77). Für eine solche Lösung ist $\tilde{\omega}$ zu \tilde{L} (und somit ω zu L) parallel: der Körper rotiert dann mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um eine seiner Hauptachsen J_k ($k = 1, 2, 3$), die in diesem Fall raumfest ist. Eine solche Bewegung nennen wir **stationäre Drehung**. Aus der Bedeutung der diskutierten Durchschnitte als Bahnkurven der Bewegung von \tilde{L} folgt nun sofort ein qualitativer Unterschied zwischen den beiden Fällen $k = 1, 3$ und dem Fall $k = 2$ (siehe die obige Graphik). Die stationären Drehungen um die größte und kleinste Halbachse ($k = 1, 3$) des Energieellipsoids sind **stabil** in dem Sinn, dass eine kleine Störung der Anfangsbedingung klein bleibt für alle Zeiten klein. Hingegen ist die stationäre Drehung um die mittlere Halbachse ($k = 2$) **instabil**; eine kleine Störung bleibt nicht klein, sondern wächst an (bis zu einer Maximalamplitude).

Aufgabe. Verifiziere diese Aussagen über (In-)Stabilität durch eine analytische Diskussion der Eulerschen Gleichungen für Anfangsbedingungen in der Nähe der 6 Enden der Halbachsen.

3 Kleine Schwingungen

(Arnold, Seiten 98ff.) In diesem Abschnitt behandeln wir lineare Hamiltonsche Systeme. Solche Systeme lassen sich in geschlossener Form lösen (sie sind, wie man sagt, *integrabel*.) In vielen nichtlinearen Problemen liefert eine lineare Näherung qualitativ richtige oder zufriedenstellende Ergebnisse. Selbst wenn das nicht so ist, kann die Untersuchung des linear genäherten Systems ein nützlicher Schritt auf dem Weg zum Verständnis des nichtlinearen Problems sein.

3.1 Gleichgewichtslagen

Für ein autonomes dynamisches System

$$\dot{x} = X(x) \tag{3.1}$$

heißt ein Punkt x_0 des Definitionsbereichs von X *singulär*, wenn gilt $X(x_0) = 0$. Da für singuläres x_0 die konstante Abbildung $t \mapsto x(t) = x_0$ die Bewegungsgleichung (3.1) löst, nennen wir x_0 auch eine *Gleichgewichtslage* des dynamischen Systems.

Im Folgenden geht es um autonome Hamiltonsche Systeme mit Hamiltonfunktion

$$H = T + U : M \subset \mathbb{R}^f \times \mathbb{R}^f \rightarrow \mathbb{R},$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^f \mu_{kl}(q) p_k p_l, \quad U = U(q), \tag{3.2}$$

für f Freiheitsgrade (oder verallgemeinerte Ortsvariablen) $q = (q_1, \dots, q_f)$ mit kanonischen Impulsvariablen $p = (p_1, \dots, p_f)$. Die Koeffizienten μ_{kl} von T sind die Matrixelemente der *inversen Massenmatrix*. Die kinetische Energie ist positiv: $T \geq 0$ und $T = 0 \Leftrightarrow p = 0$. (Eine kinetische Energie von nichtdiagonaler Gestalt ist uns schon in der Theorie starrer Körper begegnet.)

Die verallgemeinerten Geschwindigkeiten $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f$ des Hamiltonschen Systems berechnen sich als Ableitungen der Hamiltonfunktion nach den kanonischen Impulsvariablen:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} = \sum_{l=1}^f \mu_{kl}(q) p_l \quad (k = 1, \dots, f). \tag{3.3}$$

(Die Begründung hierzu wird in der analytischen Mechanik nachgeliefert.) Die Impulskomponenten p_1, \dots, p_f haben Zeitableitungen, die durch die verallgemeinerten Kräfte, nämlich die partiellen Ableitungen der Hamiltonfunktion nach den verallgemeinerten Orten, bestimmt werden:

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad (k = 1, \dots, f). \tag{3.4}$$

Die Gleichungen (3.3) und (3.4) bilden ein dynamisches System der allgemeinen Form (3.1).

Fakt. Ein Punkt $(q^{(0)}, p^{(0)}) \in M$ ist eine Gleichgewichtslage des durch (3.2) definierten dynamischen Systems genau dann, wenn gilt: (i) $p^{(0)} = 0$ und (ii) $q^{(0)}$ ist ein *kritischer Punkt* von U .

Beweis. Eine Richtung (\Leftarrow) ist klar. Für die andere Richtung (\Rightarrow) bemerken wir, dass für jede Gleichgewichtslage $(q(t), p(t)) = (q^{(0)}, p^{(0)}) = \text{const}$ gelten muss:

$$\frac{\partial H}{\partial p_k}(q^{(0)}, p^{(0)}) = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial q_k}(q^{(0)}, p^{(0)}) = 0 \quad (k = 1, \dots, f). \tag{3.5}$$

Wegen der Positivität der inversen Massenmatrix verschwinden die partiellen Ableitungen nach den Impulskomponenten nur für $p^{(0)} = 0$. An dieser Stelle gilt aber

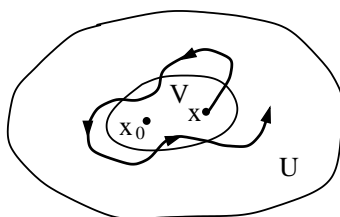
$$\frac{\partial H}{\partial q_k}(q^{(0)}, 0) = \frac{\partial U}{\partial q_k}(q^{(0)}).$$

Es folgt somit die Bedingung $(dU)_{q^{(0)}} = 0$.

3.2 Stabilität von Gleichgewichtslagen

Wir untersuchen nun die Bewegung zu Anfangsbedingungen in der Nähe einer Gleichgewichtslage.

Definition. Eine Gleichgewichtslage x_0 eines Vektorfeldes X heißt *Liapunov-stabil*, falls es in jeder Umgebung U von x_0 eine Umgebung $V \subseteq U$ von x_0 gibt, so dass für den Fluss ϕ_t von X gilt: $\phi_t(x) \in U$ für alle $x \in V$ und $t \geq 0$.



Ein Liapunov-stabiler Punkt x_0

Fakt. Betrachte das Hamiltonsche System (3.2). Wenn $q^{(0)}$ ein striktes lokales Minimum der potentiellen Energie ist, dann ist die Gleichgewichtslage $(q^{(0)}, 0)$ Liapunov-stabil.

Beweis. Wir setzen $h := U(q^{(0)})$. Durch geeignete Wahl von $\varepsilon > 0$ können wir diejenige Zusammenhangskomponente der Menge $\{q \mid U(q) \leq h + \varepsilon\}$, die $q^{(0)}$ enthält, beliebig klein machen. Die entsprechende Zusammenhangskomponente Z_0 des Gebiets $\{(q, p) \mid H(q, p) \leq h + \varepsilon\}$ im Phasenraum ist dann eine beliebig kleine Umgebung des Punkts $(q, p) = (q^{(0)}, 0)$. Z_0 ist aber aufgrund des Energiesatzes unter dem Phasenfluss invariant. Deshalb verbleibt jede Phasenbahn $(q(t), p(t))$ in der Nähe von $(q^{(0)}, 0)$, wenn die Anfangsbedingung $(q(0), p(0))$ nahe genug bei $(q^{(0)}, 0)$ liegt.

3.3 Linearisierung

Wir kehren zum allgemeinen System (3.1) zurück. Bei der Untersuchung der Lösungen von (3.1) in der Nähe einer Gleichgewichtslage benutzt man oft eine lineare Approximation, wie folgt. **Taylor-Entwicklung** des Vektorfeldes X um die Gleichgewichtslage x_0 liefert:

$$X(x) = (D_{x_0}X)(x - x_0) + \mathcal{O}((x - x_0)^2), \quad (3.6)$$

und mit $K := D_{x_0}X$ erhalten wir für $y := x - x_0$ das linearisierte dynamische System

$$\dot{y} = Ky. \quad (3.7)$$

Das linearisierte System hat den Vorteil, dass sein Fluss sofort angegeben werden kann:

$$\phi_t = \exp tK = \text{Id} + tK + \frac{t^2}{2!}K^2 + \frac{t^3}{3!}K^3 \dots \quad (3.8)$$

Wie ‘gut’ ist nun diese lineare Approximation? Falls die Gleichgewichtslage x_0 Liapunov-stabil ist, verweilt die Bewegung für alle Zeiten in der Nähe von x_0 (sofern die Anfangsbedingung nahe genug bei x_0 liegt), und die lineare Approximation gibt eine qualitativ richtige Beschreibung. In Abwesenheit von Liapunov-Stabilität wird nur die Kurzzeitdynamik richtig wiedergegeben.

Phasenfluss. Wir wenden uns jetzt wieder dem Hamiltonschen System mit Hamiltonfunktion (3.2) zu und linearisieren die Bewegungsgleichungen um eine Gleichgewichtslage, die wir o.B.d.A. am Punkt $q^{(0)} = 0$ annehmen. Dazu genügt es, die kinetische Energie $T = \frac{1}{2} \sum_{k,l} \mu_{kl}(q) p_k p_l$ durch ihren Ausdruck für $q = q^{(0)} = 0$ zu ersetzen,

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{k,l} \mu_{kl}(0) p_k p_l, \quad (3.9)$$

und die potentielle Energie quadratisch zu nähern,

$$U_2 = \frac{1}{2} \sum_{k,l} B_{kl} q_k q_l, \quad B_{kl} = (\text{Hess } U)_{kl}(0) = \frac{\partial^2 U}{\partial q_k \partial q_l}(0). \quad (3.10)$$

Die Matrix K des linearisierten Systems hat in diesem Fall die Gestalt

$$K = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{A}^{-1} \\ -\mathcal{B} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathcal{A}^{-1} = (\mu_{kl}(0)) \quad \text{und} \quad \mathcal{B} = (B_{kl}), \quad (3.11)$$

und der Phasenfluss ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \phi_t = \exp(tK) &= \cosh(tK) + \sinh(tK) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(t\sqrt{\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}}) & \mathcal{A}^{-1} \frac{\sin(t\sqrt{\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}})}{\sqrt{\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}}} \\ -\mathcal{B} \frac{\sin(t\sqrt{\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}})}{\sqrt{\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}}} & \cos(t\sqrt{\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}}) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei $\cos \sqrt{X} = \sum_{n=0}^{\infty} (-X)^n / (2n)!$ und $\sqrt{X}^{-1} \sin \sqrt{X} = \sum_{n=0}^{\infty} (-X)^n / (2n+1)!$ durch ihre Potenzreihen erklärt sind. Ein anderes Verfahren zur Konstruktion des gleichen Phasenflusses ist Thema des nächsten Abschnitts.

3.4 Normalschwingungen

Wir betrachten jetzt das Problem **kleiner Schwingungen**, d.h. von Bewegungen des linearisierten Hamiltonschen Systems (3.2) mit Energiefunktion

$$H = T + U, \quad T = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^f A_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l, \quad U = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^f B_{kl} q_k q_l. \quad (3.12)$$

Hierfür ist es zweckmäßig, die kinetische Energie T als quadratische Form in den Geschwindigkeiten \dot{q}_k (statt den Impulsen p_k) auszudrücken. Die Umrechnung erfolgt mit $p_k = \sum_l A_{kl} \dot{q}_l$, wobei $A_{kl} = (\mu^{-1})_{kl}(0)$ die Matrixelemente der **Massenmatrix** in der Gleichgewichtslage $q^{(0)} \equiv 0$ sind.

Zwei symmetrische Bilinearformen. Die Bewegungsgleichungen lauten

$$\dot{p}_k = \sum_l A_{kl} \ddot{q}_l = - \sum_l B_{kl} q_l = F_k \quad (k = 1, \dots, f). \quad (3.13)$$

Um sie vollständig zu lösen, ist es günstig zu abstrahieren. Sei $\{e_1, \dots, e_f\}$ eine Basis des Vektorraums \mathbb{R}^f . (Beachte, dass auf \mathbb{R}^f keine Euklidische Struktur vorausgesetzt wird!) Wir definieren zwei symmetrische Bilinearformen $A, B : \mathbb{R}^f \times \mathbb{R}^f \rightarrow \mathbb{R}$ durch die Forderungen

$$A(e_k, e_l) = A(e_l, e_k) = A_{kl} \quad \text{und} \quad B(e_k, e_l) = B(e_l, e_k) = B_{kl} \quad (k, l = 1, \dots, f). \quad (3.14)$$

Wir setzen $q := \sum_{k=1}^f q_k e_k$ und können hiermit T und U koordinatenfrei aufschreiben:

$$T = \frac{1}{2}A(\dot{q}, \dot{q}) \quad \text{und} \quad U = \frac{1}{2}B(q, q). \quad (3.15)$$

Da die kinetische Energie positiv definit ist, wird durch

$$\langle x, y \rangle_A := A(x, y) \quad (3.16)$$

ein (Euklidisches) **Skalarprodukt** auf \mathbb{R}^f erklärt.

Fakt. Es existiert eine bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ orthonormale Basis $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_f\}$, welche die quadratische Form B auf Diagonalgestalt bringt: $B(\tilde{e}_k, \tilde{e}_l) = \lambda_k \delta_{kl}$. (Die Zahlen λ_k heißen die **Eigenwerte von B relativ zu A .**)

Beweisidee. Der Beweis erfolgt in zwei Schritten. Im ersten Schritt konstruiert man eine A -Orthonormalbasis $\{\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_f\}$ von \mathbb{R}^f . Das Vorgehen hierbei ist iterativ. Man beginnt mit irgendeinem Einheitsvektor $\hat{e}_1 \in \mathbb{R}^f$, $\langle \hat{e}_1, \hat{e}_1 \rangle_A = 1$. Die Wahl von \hat{e}_1 bestimmt eine Orthogonalzerlegung $\mathbb{R}^f = \mathbb{R}\hat{e}_1 \oplus V_1$. Im orthogonalen Komplement V_1 von \hat{e}_1 wählt man dann einen zweiten Einheitsvektor \hat{e}_2 , der wiederum eine Orthogonalzerlegung $V_1 = \mathbb{R}\hat{e}_2 \oplus V_2$ bestimmt. In V_2 wählt man dann \hat{e}_3 , usw. Auf diese Weise entsteht ein **Fahne** von Vektorräumen $\mathbb{R}^f \supset V_1 \supset V_2 \supset \dots \supset V_{f-1} \supset V_f \equiv \mathbf{0}$ und gleichzeitig eine Basis $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_f\}$, die orthonormal bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ ist.

Im zweiten Schritt des Beweises betrachtet man die Matrix $\hat{B}_{kl} = B(\hat{e}_k, \hat{e}_l)$ der symmetrischen Bilinearform B in der gewählten A -Orthonormalbasis. Ein Ergebnis der linearen Algebra besagt, dass diese symmetrische Matrix durch eine A -orthogonale Transformation auf Diagonalgestalt gebracht werden kann; d.h. es existiert ein Basiswechsel $\tilde{e}_k = \sum_l R_{kl} \hat{e}_l$ mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} A(\tilde{e}_k, \tilde{e}_l) &= \sum_{k', l'} R_{kk'} R_{ll'} \delta_{k'l'} = \delta_{kl}, \\ B(\tilde{e}_k, \tilde{e}_l) &= \sum_{k', l'} R_{kk'} R_{ll'} B(\hat{e}_{k'}, \hat{e}_{l'}) = \lambda_k \delta_{kl}. \end{aligned}$$

Folgerung 1. Werden die Matrizen von A und B in der Ausgangsbasis $\{e_1, \dots, e_f\}$ mit $\mathcal{A} = (A_{kl})$ und $\mathcal{B} = (B_{kl})$ bezeichnet, so sind die Zahlen λ_k die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi(\lambda) = \text{Det}(\mathcal{B} - \lambda \mathcal{A})$.

Beweis. In der Basis $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_f\}$ gilt: $(B - \lambda A)(\tilde{e}_k, \tilde{e}_l) = (\lambda_k - \lambda) \delta_{kl}$. Die Determinante der Matrix von $B - \lambda A$ in dieser Basis ist somit $\prod_{k=1}^f (\lambda_k - \lambda)$, mit den Nullstellen $\lambda = \lambda_k$ ($k = 1, \dots, f$). Das Verschwinden der Determinante ist eine Eigenschaft, die nicht von der Wahl der Basis abhängt.

Bemerkung. Die Determinante einer linearen Abbildung $L : V \rightarrow V$ ist bekanntlich basisunabhängig erklärt; siehe Gleichung (2.1) vom Anfang des zweiten Kapitels. Nun wird aber durch

eine symmetrische Bilinearform Q auf V kein Endomorphismus von V definiert, sondern eine lineare Abbildung $Q : V \rightarrow V^*$, $v \mapsto Q(v, \cdot)$. Um die Determinante einer solchen linearen Abbildung zu definieren, benötigt man zwei Volumenformen, eine auf V und eine zweite auf V^* :

$$\Omega_{V^*}(Qe_1, \dots, Qe_f) = \Omega_V(e_1, \dots, e_f) \text{Det}(Q). \quad (3.17)$$

In Abwesenheit von zusätzlicher Information (z.B. durch ein fundamentales Skalarprodukt) existiert keine kanonische Wahl für (die Normierung von) Ω_V und Ω_{V^*} . Deshalb ist $\text{Det}(Q)$ nur bis auf die Multiplikation mit einer beliebigen (positiven) Konstante erklärt.

Folgerung 2. Die Basisvektoren $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_f$ genügen den Gleichungen

$$(B - \lambda_k A)(\tilde{e}_k, \cdot) = 0 \quad (k = 1, \dots, f). \quad (3.18)$$

Diese Aussage folgt aus dem Verschwinden von $(B - \lambda_k A)(\tilde{e}_k, \tilde{e}_l) = 0$ für alle $k, l = 1, \dots, f$ und der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_f$. \square

Wir bezeichnen die Koordinaten von $q = \sum_{k=1}^f q_k e_k$ bezüglich $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_f\}$ mit Q , also $q = \sum_{k=1}^f Q_k \tilde{e}_k$. In diesen Koordinaten haben T und U die **Diagonalgestalt**

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^f \dot{Q}_k^2, \quad U = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^f \lambda_k Q_k^2. \quad (3.19)$$

Das System von Bewegungsgleichungen zerfällt daher in f entkoppelte Gleichungen:

$$\ddot{Q}_k = -\lambda_k Q_k \quad (k = 1, \dots, f). \quad (3.20)$$

Für jedes der eindimensionalen Systeme (3.20) sind **drei mögliche Fälle** zu unterscheiden:

- (i) $\lambda = \omega^2 > 0$; die Lösung ist $Q = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$.
- (ii) $\lambda = 0$; die Lösung ist $Q = c_1 + c_2 t$ ("neutrales Gleichgewicht").
- (iii) $\lambda = -\nu^2 < 0$; die Lösung ist $Q = c_1 \cosh \nu t + c_2 \sinh \nu t$ ("Instabilität").

Zu jedem positiven Eigenwert $\lambda_k = \omega_k^2$ gibt es also eine Lösung $q(t) = (c_1 \cos \omega_k t + c_2 \sin \omega_k t) \tilde{e}_k$, oder in den ursprünglichen Koordinaten,

$$q_l(t) = (c_1 \cos \omega_k t + c_2 \sin \omega_k t) \xi_l^{(k)} \quad (l = 1, \dots, f), \quad (3.21)$$

wobei $\xi_l^{(k)}$ die Komponenten von \tilde{e}_k bezüglich der Ausgangsbasis $\{e_1, \dots, e_f\}$ sind.

Definition. Die periodische Bewegung (3.21) heißt eine **Normalschwingung** des Systems mit Hamiltonfunktion (3.12), und die Zahl ω_k heißt **charakteristische Frequenz**. \square

Wir benützen dieselbe Terminologie für nichtpositive Eigenwerte, obwohl die Bewegung dann nicht periodisch ist. Mit dieser Konvention können wir kurz zusammenfassen:

- (i) Das Hamiltonsche System mit Hamiltonfunktion (3.12) hat f Normalschwingungen, deren Richtungen paarweise orthogonal bezüglich des durch die kinetische Energie bestimmten Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ sind.
- (ii) Jede kleine Schwingung ist eine Summe von f Normalschwingungen.

Anleitung. Gegeben sei das linearisierte System mit Hamiltonfunktion (3.12). In der Praxis geht man am besten folgendermaßen vor.

(A) Berechne das charakteristische Polynom $\chi(\lambda) = \text{Det}((B_{kl} - \lambda A_{kl}))$ und bestimme seine Nullstellen, $\lambda = \lambda_n$ ($n = 1, \dots, f$).

(B) Für jede Nullstelle λ_n löse das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{l=1}^f (B_{kl} - \lambda_n A_{kl}) \xi_l^{(n)} = 0 \quad (k = 1, \dots, f). \quad (3.22)$$

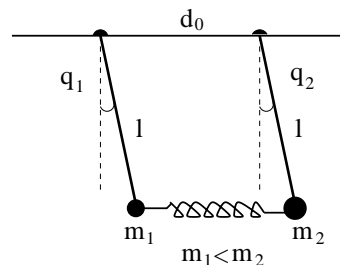
(C) Normiere (falls gewünscht) das System von Eigenvektoren $\xi_l^{(n)}$ durch

$$\sum_{k,l=1}^f A_{kl} \xi_k^{(m)} \xi_l^{(n)} = \delta_{mn}. \quad (3.23)$$

Dann sind $\omega_n = \sqrt{\lambda_n}$ die charakteristischen Frequenzen, und die Vektoren $\tilde{e}_n = \sum_{l=1}^f \xi_l^{(n)} e_l$ definieren die Richtungen der Normalschwingungen.

3.5 Beispiel: Gekoppelte Pendel

Als Anwendungsbeispiel betrachten wir zwei gekoppelte, ebene Pendel mit gleicher Länge l und verschiedenen Massen m_1 und m_2 . Die Pendel befinden sich im Schwerfeld mit Erdbeschleunigung g und hängen in der Gleichgewichtslage senkrecht nach unten. Die Kopplung erfolgt über eine Feder mit Federkonstante α . Als verallgemeinerte Ortsvariablen verwenden wir die Winkel q_1 und q_2 der Auslenkung aus der Vertikalen.



Die Energiefunktion ist:

$$H = \frac{l^2}{2} (m_1 \dot{q}_1^2 + m_2 \dot{q}_2^2) + gl(m_1(1 - \cos q_1) + m_2(1 - \cos q_2)) + \frac{\alpha}{2} (d(q_1, q_2) - d_0)^2 \quad (3.24)$$

mit $d(q_1, q_2) = ((l \cos q_1 - l \cos q_2)^2 + (d_0 - l \sin q_1 + l \sin q_2)^2)^{1/2}$ dem Abstand zwischen den zwei Pendelmassen. Linearisierung um die Gleichgewichtslage $q_1 = q_2 = \dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0$ gibt

$$H = \frac{l^2}{2} (m_1 \dot{q}_1^2 + m_2 \dot{q}_2^2) + \frac{gl}{2} (m_1 q_1^2 + m_2 q_2^2) + \frac{\alpha l^2}{2} (q_1 - q_2)^2. \quad (3.25)$$

Hiervon lesen wir die Matrizen der kinetischen und potentiellen Energie ab:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} m_1 l^2 & 0 \\ 0 & m_2 l^2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} m_1 g l + \alpha l^2 & -\alpha l^2 \\ -\alpha l^2 & m_2 g l + \alpha l^2 \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

Nach kurzer Rechnung finden wir

$$\text{Det}(\mathcal{B} - \lambda \mathcal{A}) = (m_1 + m_2) l^2 \left(m(g - \lambda l)^2 + \alpha l(g - \lambda l) \right) \quad (3.27)$$

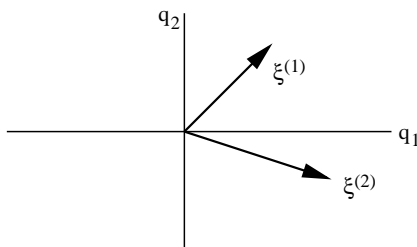
mit $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ der **reduzierten Masse**. Die Wurzeln der Nullstellen dieses Polynoms sind die charakteristischen Frequenzen:

$$\omega_1 = \sqrt{g/l}, \quad \omega_2 = \sqrt{g/l + \alpha/m}. \quad (3.28)$$

Durch das Lösen der linearen Gleichungen $(\mathcal{B} - \omega_n^2 \mathcal{A}) \xi^{(n)} = 0$ für $n = 1, 2$ erhält man die Richtungen der Normalschwingungen:

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} m_2 \\ -m_1 \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

In der ersten Normalschwingung pendeln die beiden Massen **in Phase**. Die charakteristische Frequenz ist in diesem Fall gleich der Frequenz, die jedes Pendel alleine (ohne gegenseitige Kopplung durch die Feder) hätte. In der zweiten Normalschwingung schwingen die Pendel **gegenphasig**, wobei sich die Amplituden der Auslenkung invers zu den Massen verhalten. In diesem Fall ist die charakteristische Frequenz durch die rückstellende Kraftwirkung der Feder erhöht.



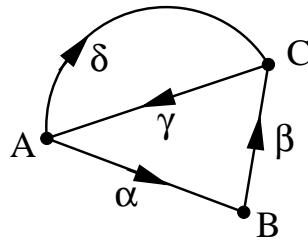
4 Networks

In this chapter we develop some parts of discrete exterior calculus, introducing the laws of electrostatics, Kirchhoff's rules and certain types of networks along the way.

4.1 Chains on 1-complexes

The basic objects in discrete exterior calculus are *(differential) k-complexes*. For the moment we look only at the simple case of 1-complexes (*k-complexes* with $k > 1$ will be introduced later). These are made up of vertices (or 0-cells) connected by oriented edges (or 1-cells, or links).

Example. In the following example of a 1-complex K , there are 3 vertices A, B, C and 4 oriented edges $\alpha, \beta, \gamma, \delta$:



Orientation of an edge means a sense of direction (determined pictorially by an arrow).

Chains. In discrete exterior calculus, the vertices of a complex K are regarded as the basis vectors of a real vector space $C_0(K)$. Thus the elements c of $C_0(K)$ are linear combinations of vertices A_i with real coefficients c_i : $c = \sum_i c_i A_i$. Such formal sums are called *0-chains*. Similarly, the oriented edges of K are regarded as the basis vectors of a real vector space $C_1(K)$. Its elements are formal sums $\sum_j r_j \alpha_j$ of oriented edges α_j with real coefficients r_j , and they are called *1-chains*.

Boundary operator. Every 1-complex K comes with a linear operator

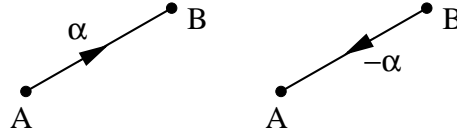
$$\partial : C_1(K) \rightarrow C_0(K), \quad (4.1)$$

called the *boundary operator* of K . The boundary of an oriented edge is defined to be the end point of the edge minus the starting point. By linearity, this defines ∂ on all of $C_1(K)$.

Example. Recall the complex K shown above. There we have

$$\begin{aligned} \partial\alpha &= B - A, \\ \partial(\alpha + \beta) &= \partial\alpha + \partial\beta = (B - A) + (C - B) = C - A, \\ \partial(\alpha + \beta + \gamma) &= 0, \\ \partial(\alpha + \beta - \gamma) &= -2\partial\gamma = 2C - 2A. \end{aligned}$$

Notice that, if $\partial\alpha = B - A$ (as in the example), then $\partial(-\alpha) = A - B$ by the linearity of ∂ . Thus, in going from α to $-\alpha$ the starting point A and end point B switch roles, and we should think of $-\alpha$ as being the same edge as α but with the orientation (i.e. the sense of direction) reversed.



Kirchhoff's first rule. Let I be the electrical current flow in an electrical circuit K , and let us consider I as a 1-chain on K , viewing K as a 1-complex (by assigning orientations to the wires of the circuit). In formulas:

$$I = \sum_j I_j \gamma_j, \quad (4.2)$$

where γ_j are the (oriented) wires of the circuit K , and the real coefficient I_j is the current flowing along γ_j . ($I_j > 0$ means that the current is flowing in the direction of the chosen orientation of γ_j , whereas $I_j < 0$ means that the current flows the opposite way.) If the current flow is stationary (i.e. both the current density and the charge density are constant in time), then the law of electrical current conservation applies and is succinctly expressed by **Kirchhoff's first rule:**

$$\partial I = 0. \quad (4.3)$$

Example. Consider again the complex K of the previous example. The current in that case is a sum of 4 terms:

$$I = I_\alpha \alpha + I_\beta \beta + I_\gamma \gamma + I_\delta \delta.$$

Computing its boundary we obtain

$$\begin{aligned} \partial I &= I_\alpha \partial \alpha + I_\beta \partial \beta + I_\gamma \partial \gamma + I_\delta \partial \delta \\ &= I_\alpha (B - A) + I_\beta (C - B) + I_\gamma (A - C) + I_\delta (C - A) \\ &= (-I_\alpha + I_\gamma - I_\delta)A + (I_\alpha - I_\beta)B + (I_\beta - I_\gamma + I_\delta)C. \end{aligned}$$

Because of the linear independence of the “vectors” A, B, C – recall that they furnish a basis of the vector space $C_0(K)$ by postulate – setting $\partial I = 0$ is equivalent to setting the coefficients of each of A, B, C to zero:

$$\partial I = 0 \iff -I_\alpha + I_\gamma - I_\delta = 0, \quad I_\alpha - I_\beta = 0, \quad I_\beta - I_\gamma + I_\delta = 0.$$

The equation $I_\alpha = I_\beta$ obviously means that there is as much current flowing into the node B as there is current flowing out of it. The other two equations mean the same thing for the nodes A, C . This is just the statement of **current conservation:** for every node N in a circuit with stationary current flow (and no charges piling up at the nodes) the current flowing into N exactly balances the current flowing out of N .

4.2 Cochains and coboundary operator

Recall from linear algebra that every vector space V comes with a dual vector space V^* . The elements of V^* are linear functions $f : V \rightarrow \mathbb{R}$. By this token, given the vector space $C_0(K)$ we have the dual vector space of linear functions $f : C_0(K) \rightarrow \mathbb{R}$. The latter is conventionally

denoted by $C^0(K) \equiv C_0(K)^*$, and its elements are called **0-cochains**. If c is a 0-chain of K and f is a 0-cochain of K , we write

$$\langle f, c \rangle \quad (4.4)$$

for the value of f on c . By linearity, a 0-cochain f is completely determined by its values on the 0-cells (the vertices) A_i of K . Such values are alternatively written as

$$\langle f, A_i \rangle \equiv f(A_i). \quad (4.5)$$

We also refer to the (non-degenerate) linear mapping $C^0(K) \times C_0(K) \rightarrow \mathbb{R}$ by $(f, c) \mapsto \langle f, c \rangle$ as the **pairing** between 0-cochains and 0-chains.

Electric energy. The electric scalar potential (also called the electrostatic potential in the present context) Φ assigns to every node A_i of an electric circuit K a real number $\Phi(A_i)$, namely the value of the potential at that point. The function Φ can be viewed (and this is a view we will often take) as a 0-cochain on K regarded as a 1-complex. The value of Φ on an arbitrary 0-chain is

$$\left\langle \Phi, \sum_i c_i A_i \right\rangle = \sum_i c_i \Phi(A_i). \quad (4.6)$$

While it may seem odd to the novice that we view the electrostatic potential as a function not just on points but on arbitrary 0-chains, this point of view is often quite useful. One **application** of this viewpoint is the following. Let $\rho = \sum_i \rho_i A_i$ (a 0-chain) be the electric charge density of the circuit K – here we assume that all charges sit on nodes and the amount of charge on the circuit node A_i is ρ_i . Then the pairing between Φ and ρ is (twice) the **electrostatic energy** of the circuit:

$$\langle \Phi, \rho \rangle = \sum_i \rho_i \Phi(A_i). \quad (4.7)$$

1-cochains. Just as $C_0(K)$ is associated with its dual, $C^0(K)$, the vector space of 1-chains $C_1(K)$ is associated with its dual vector space, $C^1(K)$. The elements of $C^1(K)$ are called **1-cochains**. The pairing between a 1-cochain ω and a 1-chain c is still denoted by $\langle \omega, c \rangle$, and for the value of ω on a 1-cell γ_j we still use the alternative notation

$$\langle \omega, \gamma_j \rangle \equiv \omega(\gamma_j). \quad (4.8)$$

Electrical power. To every edge (or link) γ_j of an electric circuit K we associate the **voltage** $V(\gamma_j)$ along γ_j . We can view this association as a function $V : \gamma_j \mapsto V(\gamma_j) \in \mathbb{R}$, which linearly extends to a function $V : C_1(K) \rightarrow \mathbb{R}$. Thus V is a 1-cochain, $V \in C^1(K) = C_1(K)^*$. In a resistive network (see Section 4.4 below) with current $I = \sum_j I_j \gamma_j$ the pairing of V with I ,

$$\langle V, I \rangle = \sum_j I_j V(\gamma_j), \quad (4.9)$$

has a clear physical meaning: it is the **power** dissipated by the network.

Canonical adjoint. We now recall another general principle from linear algebra: given a linear mapping L from a vector space V into a vector space W , there exists a canonically defined linear mapping $L^t : W^* \rightarrow V^*$ called the *canonical adjoint* of L . It is defined by

$$\langle L^t \omega, c \rangle = \langle \omega, Lc \rangle \quad (\omega \in W^*, c \in V). \quad (4.10)$$

The canonical adjoint is sometimes called the “transpose”: if one introduces bases v_1, v_2, \dots of V and w_1, w_2, \dots of W and expands $Lv_i = \sum_j w_j L_{ji}$, then the matrix of L^t w.r.t. the dual bases of W^* and V^* is the transpose of the matrix of L : $(L^t)_{ij} = L_{ji}$.

Coboundary operator. Application of this general principle to the boundary operator

$$\partial : C_1(K) \rightarrow C_0(K) \quad (4.11)$$

yields a linear operator (the canonical adjoint or transpose of ∂)

$$d : C^0(K) \rightarrow C^1(K), \quad (4.12)$$

which is called the *coboundary operator*. The boundary operator ∂ is a very intuitive object, but what is the intuition for the coboundary operator d ? We will see that d is the discrete variant of a differential operator (hence the notation d). First we give a concrete example illustrating d .

Example. Consider once again the complex K of the example given in Section 4.1. The matrix of ∂ w.r.t. the (ordered) bases A, B, C of $C_0(K)$ and $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ of $C_1(K)$ is

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Since d is the canonical adjoint of ∂ , its matrix w.r.t. the corresponding dual bases is obtained by transposition:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

If A^*, B^*, C^* and $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*, \delta^*$ are the dual bases of $C^0(K)$ and $C^1(K)$, this means that

$$dA^* = -\alpha^* + \gamma^* - \delta^*,$$

$$dB^* = \alpha^* - \beta^*,$$

$$dC^* = \beta^* - \gamma^* + \delta^*,$$

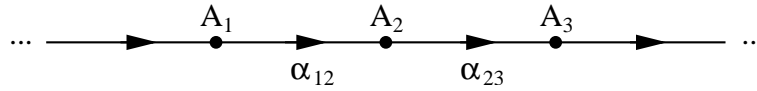
since $dA_i^* = \sum_j \alpha_j^* d_{ji}$.

Rule for d . Here comes the general rule for the linear operator d . (Of course, by linearity it suffices to specify d on some basis of $C^0(K)$.) We adopt the convention of denoting dual bases with an *asterisk*. Let then p be any vertex of K . To compute dp^* we look for the oriented edges

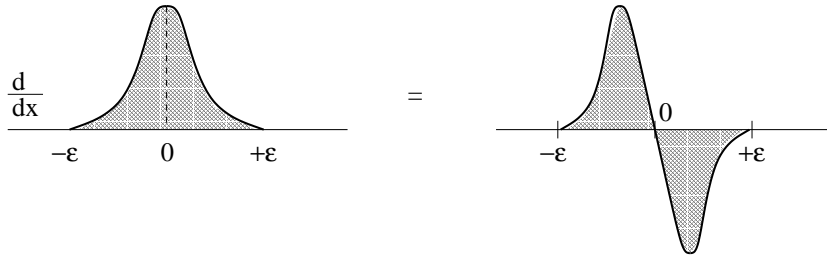
of K that have p as a boundary point. Let $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_m}$ ($\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_n}$) be the oriented edges that end (resp. begin) on p . Then

$$dp^* = \alpha_{i_1}^* + \alpha_{i_2}^* + \dots + \alpha_{i_m}^* - \beta_{j_1}^* - \beta_{j_2}^* - \dots - \beta_{j_n}^*. \quad (4.13)$$

d as a differential. Why did we say that the coboundary operator d resembles a differential operator? Consider d on a network of linear structure:



and compare $dA_2^* = \alpha_{12}^* - \alpha_{23}^*$ with the derivative of a smeared δ -function:



The similarity should be clear.

Voltage as a coboundary. We will put the coboundary operator to many good uses in the sequel. A first application is as follows. Consider, once again, the complex of the example in Section 4.1. Expressing the potential Φ in the basis of characteristic functions A^*, B^*, C^* we have

$$\Phi = \Phi(A) A^* + \Phi(B) B^* + \Phi(C) C^*. \quad (4.14)$$

We then compute the coboundary of Φ :

$$\begin{aligned} d\Phi &= \Phi(A) dA^* + \Phi(B) dB^* + \Phi(C) dC^* \\ &= \Phi(A)(\gamma^* - \alpha^* - \delta^*) + \Phi(B)(\alpha^* - \beta^*) + \Phi(C)(\delta^* + \beta^* - \gamma^*) \\ &= (\Phi(B) - \Phi(A)) \alpha^* + (\Phi(C) - \Phi(B)) \beta^* + (\Phi(A) - \Phi(C)) \gamma^* + (\Phi(C) - \Phi(A)) \delta^*. \end{aligned}$$

By the definition of Φ , the potential difference $\Phi(B) - \Phi(A)$ is the negative of the voltage along α : $V(\alpha) = \Phi(A) - \Phi(B)$. Similarly, $V(\beta) = \Phi(B) - \Phi(C)$, and so on. Thus we see that

$$V = -d\Phi. \quad (4.15)$$

This corresponds to the equation $\vec{E} = -\text{grad } \Phi$ of vector calculus.

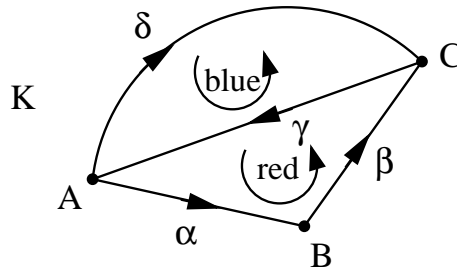
4.3 2-complexes: $d \circ d = 0$

The complexes K under consideration so far were built from vertices and edges only. Now we add another element to the setup: oriented faces (or 2-cells). Beside the vector spaces $C_0(K)$ and

$C_1(K)$, we then have the vector space of **2-chains**, $C_2(K)$. The boundary operator $\partial : C_1(K) \rightarrow C_0(K)$ naturally extends to a sequence of linear operators

$$C_2(K) \xrightarrow{\partial} C_1(K) \xrightarrow{\partial} C_0(K). \quad (4.16)$$

Example. The following 2-complex is obtained by still taking the 1-complex of the example in Section 4.1 and sewing in two oriented faces, denoted by “red” and “blue”:



The boundaries of the two oriented faces of K are

$$\partial(\text{red}) = \alpha + \beta + \gamma, \quad \partial(\text{blue}) = -\gamma - \delta.$$

Notice that the boundary of each of the two boundaries is zero:

$$(\partial \circ \partial)(\text{red}) = \partial(\alpha + \beta + \gamma) = B - A + C - B + A - C = 0,$$

$$(\partial \circ \partial)(\text{blue}) = \partial(-\gamma - \delta) = C - A + A - C = 0.$$

This property is not particular to the special 2-complex under consideration, but will always be true for any “reasonable” complex (think about it, and you’ll see that it’s true!). Hence the following definition is rather natural.

Definition. A **k -complex** (for $k \in \mathbb{N}$) is a sequence of vector spaces $C_0(K), \dots, C_k(K)$ connected by linear operators (the **boundary operator**),

$$0 \xleftarrow{\partial} C_0(K) \xleftarrow{\partial} C_1(K) \xleftarrow{\partial} \dots \xleftarrow{\partial} C_{k-1}(K) \xleftarrow{\partial} C_k(K), \quad (4.17)$$

such that **$\partial \circ \partial = 0$** . \square

Now, given a k -complex (of chains) we immediately get another k -complex (of cochains) by **dualization**:

$$C^0(K) \xrightarrow{d} C^1(K) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} C^{k-1}(K) \xrightarrow{d} C^k(K) \xrightarrow{d} 0. \quad (4.18)$$

Indeed, from $\partial \circ \partial = 0$ we deduce that

$$\langle dd\omega, c \rangle = \langle d\omega, \partial c \rangle = \langle \omega, \partial \partial c \rangle = \langle \omega, 0 \rangle = 0 \quad (4.19)$$

for any $\omega \in C^k(K)$ and $c \in C_{k+2}(K)$, so the coboundary operator d satisfies

$$d \circ d = 0. \quad (4.20)$$

Kirchhoff's second rule. Consider some 2-complex and recall the electrostatic law $V = -d\Phi$; in words: the voltage is (minus) the coboundary of the potential. Applying d to both sides of this equation and using $d \circ d = 0$ we get

$$dV = 0 \quad \text{(Kirchhoff's second rule).} \quad (4.21)$$

What does this mean? The equation $dV = 0$ is equivalent to $\langle dV, c \rangle$ being zero for every 2-chain c . But $\langle dV, c \rangle = \langle V, \partial c \rangle$, so

$$dV = 0 \iff \forall c \in C_2(K) : \langle V, \partial c \rangle = 0. \quad (4.22)$$

Any 1-chain ∂c consists of boundary loops, so the statement $dV = 0$ is equivalent to saying that the voltage V vanishes along any such loop. For example, the boundary of the red face in the example on the previous page is $\alpha + \beta + \gamma$, and Kirchhoff's second rule states that

$$\langle V, \partial(\text{red}) \rangle = V(\alpha) + V(\beta) + V(\gamma) = 0.$$

Exercise. Show from the definition of the coboundary operator by $\langle d\omega, c \rangle = \langle \omega, \partial c \rangle$ that $d : C^1(K) \rightarrow C^2(K)$ is computed by the following rule. Let $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ be the oriented edges of K and denote the element dual to γ_j by γ_j^* , as before. To compute the coboundary $d\gamma_j^*$ we look for the (oriented) faces that contain γ_j in their boundary. Then $d\gamma_j^*$ is the sum (with signs) of the duals of these faces, where the plus/minus sign is used if the orientations agree/disagree.

Example. For the 2-complex K from the beginning of this subsection we have

$$d\alpha^* = \text{red}^*, \quad d\beta^* = \text{red}^*, \quad d\gamma^* = \text{red}^* - \text{blue}^*, \quad d\delta^* = -\text{blue}^*.$$

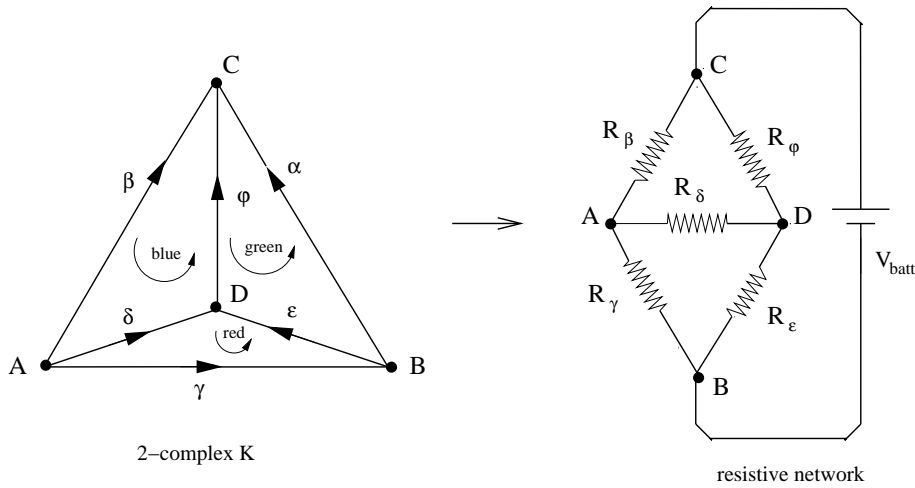
4.4 Resistive networks

Let K be some 2-complex with a number N_1 of 1-cells $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{N_1}$. Place resistors with resistances R_i on $N_1 - 1$ of these, and on the residual 1-cell place a current source (i.e. a battery, say with voltage V_{batt}). What you get in this way is called a *resistive network*. We assume that the resistors and the battery are connected by perfectly conducting wires via the 0-cells of K (the *nodes* of the resistive network). The situation is illustrated in the next diagram, showing a 2-complex on the left-hand side and a corresponding resistive network on the right-hand side.

Now let the resistive network be in a *stationary state*. This means that everything is constant in time (except for the state of the battery, which is gradually getting discharged), and there is a certain time-independent electrical current flowing in each 1-cell γ_j of K , i.e. in each resistor of the network. These (local) currents I_j determine a 1-chain

$$I = \sum_{j=1}^{N_1} I_j \gamma_j \quad (4.23)$$

called the *global current*. Assuming the resistances R_j and the battery voltage V_{batt} to be given, our goal will be to compute the I_j and hence I .



There exists 3 sets of linear relations, which altogether determine the global current I . The first set is given by Kirchhoff's first rule: $\partial I = 0$. As was explained earlier, it expresses the law of current conservation at the nodes. The second set relates the currents I_j to the voltages V_j by **Ohm's law**: $V_j = R_j I_j$. Viewing the resistances as a mapping $R : C_1(K) \rightarrow C^1(K)$, we write Ohm's law in the succinct global form $V = R I$. The third set of relations is given by Kirchhoff's second rule, $dV = 0$. Its meaning, as we saw, is that the voltage about any boundary loop of the network vanishes. In summary, the **equations of a stationary resistive network** are

$$dV = 0, \quad V = R I, \quad \partial I = 0. \quad (4.24)$$

In the absence of a driving term, the solution of these equations is the trivial one, $I = 0 = V$. The solution becomes nontrivial if we take one of the voltages, say $V_j = V(\gamma_j)$, to be externally prescribed, by forcing $V_j = V_{\text{batt}}$. Of course, if we then insisted on prescribing the ratio $V_{\text{batt}}/I_{\text{batt}} = V_j/I_j = R_j$, the system would be overdetermined. To allow a solution to exist, we have to treat the current I_{batt} drawn from the battery as one of the unknowns of the problem.

Solution strategies. We distinguish between two basic strategies for solving the equations of a resistive network:

1. Node potential method:

- (i) Solve $dV = 0$ by making an ansatz for the potentials at the nodes: $V = -d\Phi$.
- (ii) Express the current by the potential: $I = -R^{-1}d\Phi$.
- (iii) Determine the unknowns in Φ from the equation $0 = \partial I = -\partial R^{-1}d\Phi$.

2. Mesh current method:

- (i) Solve $\partial I = 0$ by setting $I = \partial H$, with H an unknown 2-chain.
- (ii) Express V by H via Ohm's law: $V = R \partial H$.
- (iii) Determine H from the equation $0 = dV = dR \partial H$.

We are not going to enter into an explanation as to whether/why these two methods always work (this is done at length in the textbook by Bamberg & Sternberg: *A Course in Mathematics for Students of Physics*, volume 2, Cambridge University Press, 1990). Instead, we content ourselves by illustrating them at the above example.

Node potential method. The first remark to make here is that the electrostatic potential Φ never is uniquely determined: if Φ solves $V = -d\Phi$ for a given V , then so does $\Phi + \text{const}$. We fix this **arbitrariness** by setting (any) one of the node potentials to zero. For the network at hand (which is the example network given at the beginning of this subsection) we choose $\Phi(B) = 0$. Since $V_{\text{batt}} = V(\alpha) = \Phi(B) - \Phi(C)$, we then have

$$\Phi = \Phi(A) A^* - V_{\text{batt}} C^* + \Phi(D) D^*$$

with unknowns $\Phi(A)$ and $\Phi(D)$. Application of the coboundary operator gives the voltage:

$$-V = d\Phi = \Phi(A)(-\beta^* - \gamma^* - \delta^*) - V_{\text{batt}}(\alpha^* + \beta^* + \varphi^*) + \Phi(D)(\delta^* + \varepsilon^* - \varphi^*).$$

The 1-cochain V so obtained automatically satisfies Kirchhoff's second rule.

Next we use Ohm's law to express the current by the unknowns:

$$\begin{aligned} I = R^{-1}V &= I_{\text{batt}}\alpha + R_{\beta}^{-1}(V_{\text{batt}} + \Phi(A))\beta + R_{\gamma}^{-1}\Phi(A)\gamma \\ &+ R_{\delta}^{-1}(\Phi(A) - \Phi(D))\delta - R_{\varepsilon}^{-1}\Phi(D)\varepsilon + R_{\varphi}^{-1}(V_{\text{batt}} + \Phi(D))\varphi. \end{aligned}$$

Finally, we take the boundary of the current I , and organize the answer by nodes:

$$\begin{aligned} \partial I &= \left(-R_{\beta}^{-1}(V_{\text{batt}} + \Phi(A)) - R_{\gamma}^{-1}\Phi(A) - R_{\delta}^{-1}(\Phi(A) - \Phi(D)) \right) A \\ &+ \left(-I_{\text{batt}} + R_{\gamma}^{-1}\Phi(A) + R_{\varepsilon}^{-1}\Phi(D) \right) B \\ &+ \left(I_{\text{batt}} + R_{\beta}^{-1}(V_{\text{batt}} + \Phi(A)) + R_{\varphi}^{-1}(V_{\text{batt}} + \Phi(D)) \right) C \\ &+ \left(R_{\delta}^{-1}(\Phi(A) - \Phi(D)) - R_{\varepsilon}^{-1}\Phi(D) - R_{\varphi}^{-1}(V_{\text{batt}} + \Phi(D)) \right) D. \end{aligned}$$

It would now appear that the system is **overdetermined**, as there are 4 equations to satisfy with 3 unknowns, namely $\Phi(A)$, $\Phi(D)$ and I_{batt} . Fortunately all of the equations are not **independent**: if Kirchhoff's first rule is satisfied at all nodes but one, then it is automatically satisfied also at the last node. To see why this always holds true, let $f \in C^0(K)$ be some constant function, $f(A_1) = f(A_2) = \dots = f(A_{N_0})$. Evaluating such a function on the 0-chain ∂I we are guaranteed to get zero: $\langle f, \partial I \rangle = \langle df, I \rangle = 0$, as the coboundary of any constant function vanishes (recall that d "differentiates"). [Another characterization of the situation is to say that the boundary operator $\partial : C_1(K) \rightarrow C_0(K)$ of a connected network fails to be surjective by $\dim \text{coker } \partial = 1$.] Thus $\langle f, \partial I \rangle = 0$ or, equivalently, $\sum_i (\partial I)_i = 0$. And, indeed, if we add up the coefficients of the nodes A, B, C, D in our example, we do get identically zero. Therefore, we may delete (any) one of these coefficients, and solve the remaining 3 linear equations from $\partial I = 0$ for the 3 unknowns $\Phi(A)$, $\Phi(D)$, and I_{batt} .

Mesh current method. The resistive network under consideration has three 2-cells, which we chose to denote by red, blue, and green. Thus, the vector space $C_2(K)$ is 3-dimensional and the most general ansatz for H reads

$$H = H_{\text{red}} \cdot \text{red} + H_{\text{blue}} \cdot \text{blue} + H_{\text{green}} \cdot \text{green}$$

with unknowns H_{red} , H_{blue} , and H_{green} . An expression for the current I results on forming the boundary of H ,

$$I = \partial H = H_{\text{red}}(\gamma - \delta + \varepsilon) + H_{\text{blue}}(-\beta + \delta + \varphi) + H_{\text{green}}(\alpha - \varepsilon - \varphi).$$

From this we get the voltage 1-cochain V by using Ohm's law:

$$\begin{aligned} V = R \partial H = V_{\text{batt}} \alpha^* - R_{\beta} H_{\text{blue}} \beta^* + R_{\gamma} H_{\text{red}} \gamma^* + R_{\delta} (-H_{\text{red}} + H_{\text{blue}}) \delta^* \\ + R_{\varepsilon} (H_{\text{red}} - H_{\text{green}}) \varepsilon^* + R_{\varphi} (H_{\text{blue}} - H_{\text{green}}) \varphi^*. \end{aligned}$$

Here we isolated the battery 1-cell α and set the coefficient of the dual element α^* to V_{batt} , in keeping with the setup specified at the outset.

In the next step we compute the coboundary of V :

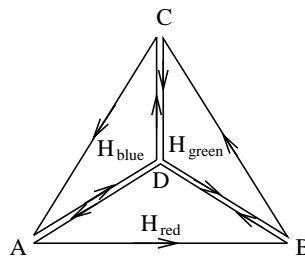
$$\begin{aligned} dV &= (R_{\gamma} H_{\text{red}} - R_{\delta} (-H_{\text{red}} - H_{\text{blue}}) + R_{\varepsilon} (H_{\text{red}} - H_{\text{green}})) \text{red}^* \\ &+ (R_{\beta} H_{\text{blue}} + R_{\delta} (-H_{\text{red}} + H_{\text{blue}}) + R_{\varphi} (H_{\text{blue}} - H_{\text{green}})) \text{blue}^* \\ &+ (V_{\text{batt}} - R_{\varepsilon} (H_{\text{red}} - H_{\text{green}}) - R_{\varphi} (H_{\text{blue}} - H_{\text{green}})) \text{green}^*. \end{aligned}$$

Imposing Kirchhoff's second rule, $dV = 0$, we then obtain 3 equations for the 3 unknowns H_{red} , H_{blue} , and H_{green} . These equations can be arranged in matrix form as follows:

$$\begin{pmatrix} R_{\gamma} + R_{\delta} + R_{\varepsilon} & -R_{\delta} & -R_{\varepsilon} \\ -R_{\delta} & R_{\beta} + R_{\delta} + R_{\varphi} & -R_{\varphi} \\ -R_{\varepsilon} & -R_{\varphi} & R_{\varepsilon} + R_{\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{\text{red}} \\ H_{\text{blue}} \\ H_{\text{green}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -V_{\text{batt}} \end{pmatrix},$$

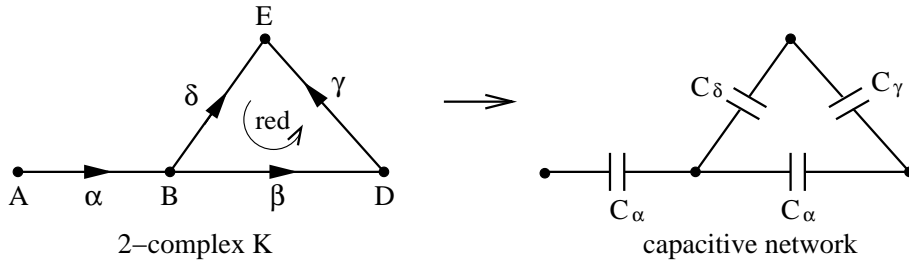
which is a linear system of the type $\mathcal{A}x = b$. The solution $x = \mathcal{A}^{-1}b$ always exists here, since the symmetric matrix \mathcal{A} formed from the resistances is positive and hence invertible.

Let us end with a word on the physical meaning of the 2-chain $H = \sum_k H_k \Sigma_k$. Ultimately, we will recognize H (from Ampere's law) as the magnetic excitation (or, rather, as the 2-chain model thereof), but for now we will simply say this: H_k can be viewed as the partial current (or mesh current) circulating around the k^{th} face. In our example, this is clear from the relations $I_{\alpha} = H_{\text{green}}$, $I_{\beta} = -H_{\text{blue}}$, $I_{\gamma} = H_{\text{red}}$, $I_{\delta} = H_{\text{blue}} - H_{\text{red}}$, $I_{\varphi} = H_{\text{blue}} - H_{\text{green}}$, $I_{\varepsilon} = H_{\text{red}} - H_{\text{green}}$.



4.5 Capacitive networks

In the previous section we took a 2-complex K and placed resistors on its 1-cells to form a resistive network. Now we do the same thing using **capacitors** instead of resistors. Thus, let there be some 2-complex with 1-cells γ_j ($j = 1, \dots, N_1$). On each of these we put a capacitor, denoting the capacitance on the j^{th} 1-cell by C_j . The capacitors are connected to each other via the nodes of K . An example of such a capacitive network is shown in the next figure. We will use this example for illustrative purposes below.



Initial state. To get started, let the network be in a **neutral state**. This means that we took care to discharge all the capacitor plates (in case they had been charged earlier) and there are no superfluous charges on the nodes either. Starting from this neutral situation we then prepare the network in a specific charged state by transferring charges (usually, electrons) between the nodes of the network by using, say, a battery. After that process there is a nonzero amount of charge on each node, although the total charge (summed over all nodes) still vanishes since all we did was to instigate internal charge transfer. To do the book keeping, we assemble all the information about the **node charges** into a 0-chain $\rho = \sum_{i=1}^{N_0} \rho_i A_i$, with ρ_i being the charge transferred onto node A_i . The vanishing of the total charge – referred to as **global charge neutrality** – implies $\langle f, \rho \rangle = 0$ for any $f \in C^0(K)$ with constant values on the nodes.

Stationary state. The extra charges placed on the nodes will not stay there, as such a configuration would not be energetically favorable. Rather, the positive and negative charges forced upon the nodes will **seek to recombine** so as to restore the original state of *local* charge neutrality (the state of minimal electric energy). They are prevented from doing so by the insulating layer between the two plates of each capacitor. Thus the node charges move to the capacitors and accumulate on the capacitor plates. After a brief transient period of charge redistribution the capacitive network will have settled down in a stationary state, which is the energetically lowest configuration accessible in the presence of the constraints posed by the experimental setup.

Capacitor charges and voltages. The capacitors are now charged – each of them by some pair of charges $(Q_j, -Q_j)$ on opposite plates. Our goal is to compute these capacitor charges Q_j , given the **capacitances** C_j and the data about the charge transfer between nodes, ρ . For that purpose it is convenient (and also natural) to assemble the information about the charge state of the capacitors into a 1-chain: $Q = \sum_{j=1}^{N_1} Q_j \gamma_j$. Now by the definition of what is meant by a capacitor with capacitance C_j , the charge Q_j on the j^{th} capacitor is accompanied by a voltage $V_j = Q_j/C_j$ between the plates of that capacitor. All these voltages determine a voltage 1-cochain

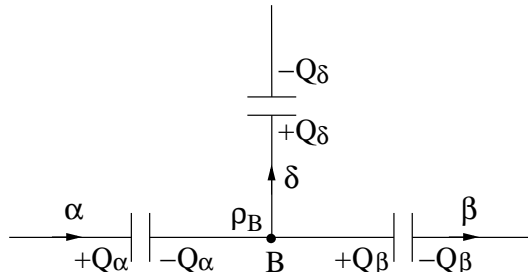
$V = \sum_j V_j \gamma_j^*$. This concludes our discussion of basic definitions and setup, and we can now turn to formulating the algebraic problem to be solved.

Network equations. The **equilibrium state** of the capacitive network is determined by three sets of equations:

$$-\partial Q = \rho, \quad Q = \mathcal{C}V, \quad dV = 0. \quad (4.25)$$

The last set is familiar: it is Kirchhoff's second rule, stating that the sum of the voltages around any boundary loop of the capacitive network vanishes. The middle set encodes the information about the capacitances of the network. We define $\mathcal{C} : C^1(K) \rightarrow C_1(K)$ to be the linear operator with the property $\mathcal{C}\gamma_j^* = C_j\gamma_j$ ($j = 1, \dots, N_1$). The "global" equation $Q = \mathcal{C}V$ then succinctly summarizes all the local relations $Q_j = C_jV_j$.

The first set, $-\partial Q = \rho$, expresses the fact that all capacitor charges stem from node charges. The minus sign in the equation invites some explanation. What enters here is a **sign convention** for making the assignment of a pair $(Q_j, -Q_j)$ to a pair of capacitor plates. The convention is that as we follow along the directed 1-cell γ_j , the first capacitor plate we encounter carries charge Q_j , and the second one charge $-Q_j$. To illustrate, consider the node B of our example:



Charge conservation means that $\rho_B = -Q_\alpha + Q_\beta + Q_\delta$, and this equals $-(\partial Q)_B$ because

$$\begin{aligned} -Q_\alpha + Q_\beta + Q_\delta &= -Q_\alpha(\partial\alpha)_B - Q_\beta(\partial\beta)_B - Q_\delta(\partial\delta)_B \\ &= -(\partial(Q_\alpha\alpha + Q_\beta\beta + Q_\delta\delta))_B = -(\partial Q)_B. \end{aligned}$$

Given a set of node charges ρ , how do we solve the equations of a capacitive network for Q and V ? As with resistive networks, there exist (at least) two major strategies. The first of these proceeds by reduction to Poisson's equation and will now be described in some detail.

Poisson's equation. Just as in the node potential method of Section 4.4, we start by solving $dV = 0$ through the introduction of a **potential**: $V = -d\Phi$, thereby obtaining an expression for the capacitor charges as $Q = \mathcal{C}V = -\mathcal{C}d\Phi$. Inserting this expression into $-\partial Q = \rho$, we get an equation solely for the unknown potential:

$$\partial \mathcal{C}d\Phi = \rho. \quad (4.26)$$

The operator on the left-hand side,

$$\Delta := -\partial \mathcal{C}d, \quad (4.27)$$

is called the **Laplace operator** of the capacitive network. Using it, we can write the equation for Φ in the concise form of **Poisson's equation**:

$$-\Delta\Phi = \rho. \quad (4.28)$$

What can we say about the existence and uniqueness of solutions to Poisson's equation? To give some sort of answer, we need a few basic facts about the Laplace operator Δ . First of all, note that $\Delta = -\partial\mathcal{C}d$ is a linear mapping from the vector space $W = C^0(K)$ into the dual vector space $W^* = C_0(K)$. It therefore makes sense to ask whether Δ is **symmetric**. Indeed, the canonical adjoint of any linear operator $L : W \rightarrow W^*$ is still a linear operator $L^t : W \rightarrow W^*$, and one may compare L with L^t . The operator L is called symmetric if $L = L^t$.

Symmetry of Δ . The Laplace operator

$$\Delta = -\partial\mathcal{C}d\Phi : C^0(K) \rightarrow C_0(K) \quad (4.29)$$

of a capacitive network is symmetric: $\Delta = \Delta^t$.

Proof. Consider first the **capacitance operator** $\mathcal{C} : C^1(K) \rightarrow C_1(K)$. If $U = \sum_j U_j \gamma_j^*$ and $V = \sum_j V_j \gamma_j^*$ are any two 1-cochains, we have

$$\langle U, \mathcal{C}V \rangle = \sum_{j=1}^{N_1} C_j U_j V_j = \langle V, \mathcal{C}U \rangle. \quad (4.30)$$

Thus \mathcal{C} is symmetric. Now let f and Φ be any two functions (or 0-cochains) on K . The proposed statement then follows from a one-line computation using the fact that the coboundary operator d is canonically adjoint to the boundary operator ∂ :

$$\langle f, \Delta\Phi \rangle = -\langle df, \mathcal{C}d\Phi \rangle = -\langle d\Phi, \mathcal{C}df \rangle = \langle \Phi, \Delta f \rangle. \quad \square \quad (4.31)$$

Kernel and cokernel of Δ . In order for the solution of Poisson's equation $-\Delta\Phi = \rho$ to exist and be unique, the Laplace operator would have to be bijective. Unfortunately, $\Delta : C^0(K) \rightarrow C_0(K)$ is **neither injective nor surjective**. Indeed, the coboundary operator d annihilates the constants, so $\Delta = -\partial\mathcal{C}d$ has a nonvanishing kernel; and any boundary in $C_0(K)$ is annihilated by the constant functions ($\langle f, \partial Q \rangle = 0$ if $df = 0$), so Δ also has a nonvanishing cokernel.

If the network K is **connected**, as we shall suppose henceforth, the constant functions $f \in C^0(K)$ are the only functions annihilated by d . If all capacitances are nonzero and positive, the same holds true for Δ . The kernel of Δ is then one-dimensional:

$$\dim \ker \Delta = 1, \quad (4.32)$$

and to improve the situation concerning the existence and uniqueness of solutions of Poisson's equation, we may proceed as follows. Let $Z^0(K)$ denote the one-dimensional vector space of **constant functions** $f \in C^0(K)$, and $B_0(K)$ the vector space of **boundaries** in $C_0(K)$

$$Z^0(K) = \{f \in C^0(K) \mid df = 0\}, \quad B_0(K) = \{c \in C_0(K) \mid \exists \gamma \in C_1(K) : c = \partial\gamma\}. \quad (4.33)$$

Given $Z^0(K)$ we may pass to the **quotient** $C^0(K)/Z^0(K)$, the vector space of 0-cochains modulo the constants. [More formally, $C^0(K)/Z^0(K)$ is the vector space of **equivalence classes** $[f]$ given by the equivalence relation $f_1 \sim f_2 \Leftrightarrow f_1 - f_2 = \text{const.}$] The space $C^0(K)/Z^0(K)$ can be viewed as being dual to $B_0(K)$. Indeed, if $\partial Q \in B_0(K)$, then $\langle f, \partial Q \rangle = \langle f + \text{const}, \partial Q \rangle$, so the value of an equivalence class $[f] \in C^0(K)/Z^0(K)$ on ∂Q is well-defined, and $[f]$ lies in the dual of $B_0(K)$. Conversely, any linear function on $B_0(K)$ is easily seen to correspond to a unique element of $C^0(K)/Z^0(K)$. Moreover, the pairing between $C^0(K)/Z^0(K)$ and $B_0(K)$ by $([f], \partial Q) \mapsto \langle df, Q \rangle$ is **non-degenerate**. A particular consequence of all this is that the two spaces have the same dimension:

$$\dim B_0(K) = \dim C^0(K)/Z^0(K). \quad (4.34)$$

Consider now the Laplace operator $[\Delta]$ obtained from $\Delta : C^0(K) \rightarrow C_0(K)$ by restriction:

$$[\Delta] : C^0(K)/Z^0(K) \rightarrow B_0(K), \quad (4.35)$$

which is well-defined since Δ annihilates $Z^0(K)$. By construction, the **restricted operator** $[\Delta]$ has zero-dimensional kernel and hence is injective. The operator $[\Delta]$ is still symmetric – this follows by essentially the same argument as for Δ . As a result, injectivity of $[\Delta]$ also implies surjectivity of this operator, so $[\Delta]$ is a bijection and possesses an inverse $[\Delta]^{-1}$. Thus the restricted Poisson equation has a **unique solution**:

$$-[\Delta][\Phi] = \rho \quad \Leftrightarrow \quad [\Phi] = -[\Delta]^{-1}\rho. \quad (4.36)$$

Physically speaking, two aspects are of importance here. For one, Poisson's equation $-\Delta\Phi = \rho$ has a solution if and only if ρ is a boundary, i.e. if the total charge on the capacitive network vanishes. [The condition $\rho \in B_0(K)$ is equivalent to $\sum_i \rho_i = 0$.] Thus it was by no means accidental that ρ was constructed by internal charge transfer starting from a neutral network: this setup was to ensure global charge neutrality, $\rho \in B_0(K)$, which in turn guarantees the existence of a solution of the network equations.

The second aspect of importance is that the solution spaces of $-\Delta\Phi = \rho$ are always of the **affine form** $\Phi_0 + Z^0(K)$. Thus solutions come as one-parameter families (parameterized by $Z^0(K)$), and to make the solution unique we should mod out the constants $Z^0(K)$. An alternative recipe is to pick some node, say N , and remove the indeterminacy by setting $\Phi(N) \equiv 0$.

Weyl's method of orthogonal projection. After this discussion of the solution strategy via Poisson's equation, we briefly touch on a second strategy, which will be seen to have some similarity with the mesh current method for resistive networks:

- (i) Pick any set of capacitor charges $Q_0 \in C_1(K)$ that satisfy $-\partial Q_0 = \rho$. (Such a set exists if $\rho \in B_0(K)$, and is usually easy to find.)
- (ii) Make the most general ansatz for Q :

$$Q = Q_0 + Q_1,$$

where the 1-chain Q_1 is subject to the condition $\partial Q_1 = 0$ (to preserve $-\partial Q = -\partial Q_0 = \rho$).

- (iii) To satisfy Kirchhoff's second rule $dV = 0$, choose Q_1 in such a way that $V = \mathcal{C}^{-1}Q = \mathcal{C}^{-1}(Q_0 + Q_1)$ becomes a coboundary: $V = -d\Phi$.

The last step – known as Weyl's method of orthogonal projection – deserves some **explanation**.

Let the vector space of closed chains (or **cycles**) in $C_1(K)$ be denoted by $Z_1(K)$, and the vector space of **coboundaries** in $C^1(K)$ by $B^1(K)$:

$$Z_1(K) = \{c \in C_1(K) \mid \partial c = 0\}, \quad B^1(K) = \{\omega \in C^1(K) \mid \exists f \in C^0(K) : \omega = df\}. \quad (4.37)$$

$B^1(K)$ is the **annihilator space** of $Z_1(K)$: a coboundary $df \in B^1(K)$ gives zero on every 1-cycle $c \in Z_1(K)$ and (by general principles of linear algebra) every annihilator of $Z_1(K)$ must be of that form. To establish the mathematical basis of Weyl's method, consider the **inner product** $(\cdot | \cdot)_\mathcal{C}$ on $C^1(K)$ defined by

$$(U | V)_\mathcal{C} := \langle U, \mathcal{C}V \rangle. \quad (4.38)$$

This is a positive symmetric bilinear form, by the symmetry and positivity of \mathcal{C} .

Given $B^1(K) \subset C^1(K)$, we can ask: what is the **orthogonal complement** of $B^1(K)$ with respect to this inner product? The orthogonal complement certainly contains the vector space $\mathcal{C}^{-1}Z_1(K)$, for the inner product of $df \in B^1(K)$ with $\mathcal{C}^{-1}\gamma \in \mathcal{C}^{-1}Z_1(K)$ always vanishes:

$$(df | \mathcal{C}^{-1}\gamma)_\mathcal{C} = \langle df, \gamma \rangle = \langle f, \partial\gamma \rangle = \langle f, 0 \rangle = 0. \quad (4.39)$$

Because $B^1(K)$ is the annihilator space of $Z_1(K)$, the dimensions of this pair must add up to that of $C^1(K)$, and since $\mathcal{C} : C^1(K) \rightarrow C_1(K)$ is an isomorphism, we infer that

$$\dim B^1(K) + \dim \mathcal{C}^{-1}Z_1(K) = \dim C^1(K). \quad (4.40)$$

Thus the dimensions match and we conclude that $\mathcal{C}^{-1}Z_1(K)$ is precisely the orthogonal complement of $B^1(K)$ with respect to the inner product $(\cdot | \cdot)_\mathcal{C}$:

$$C^1(K) = B^1(K) \oplus \mathcal{C}^{-1}Z_1(K). \quad (4.41)$$

Having established this orthogonal decomposition, we take π to be the orthogonal projector $\pi : C^1(K) \rightarrow B^1(K)$. Then, if $V_0 = \mathcal{C}^{-1}Q_0$ (and $-\partial Q_0 = \rho$), **Weyl's method of solution** is to put

$$V := \pi(V_0). \quad (4.42)$$

Indeed, $V \in B^1(K)$ by construction, so Kirchhoff's second rule ($dV = 0$) is satisfied. Moreover, since

$$V - V_0 = -(1 - \pi)(V_0) \in \mathcal{C}^{-1}Z_1(K), \quad (4.43)$$

we have $V = V_0 + \mathcal{C}^{-1}Q_1 = \mathcal{C}^{-1}(Q_0 + Q_1)$ with $Q_1 \in Z_1(K)$. Thus $-\partial Q = -\partial(Q_0 + Q_1) = \rho$ still holds, and Weyl's answer $V = \pi(V_0)$ solves the equations of the capacitive network. Because the solution for the voltage (as opposed to the potential) is unique, it is the solution of the problem.

4.5.1 Math tutorial: quotient of vector spaces

Given a vector space V (over $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, or $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) let there be a subvector space $U \subset V$. By definition, the **quotient space** V/U is the set of equivalence classes $[v] = [v+U]$ (for $v \in V$) defined by the equivalence relation

$$v_1 \sim v_2 \iff v_1 - v_2 \in U. \quad (4.44)$$

Any element $v_0 \in V$ such that $[v_0] = [v]$ is called a **representative** of the equivalence class $[v] \in V/U$. The quotient space V/U is another vector space (still over \mathbb{K}). The operations of addition and scalar multiplication on V/U are defined by

$$[v] + [v'] = [v + v'], \quad \lambda \cdot [v] = [\lambda \cdot v]. \quad (4.45)$$

One easily verifies that these definitions are independent of the choices of representative. The vector space dimension of V/U is

$$\dim V/U = \dim V - \dim U. \quad (4.46)$$

Example & exercise. Let $V = \mathbb{R}^3$ (with $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), and let $U = \mathbb{R} \cdot u \subset V$ where $u \in \mathbb{R}^3$, $u \neq 0$. Then the quotient vector space V/U is two-dimensional. It can be visualized as the space of straight lines in \mathbb{R}^3 which are parallel to the line $U = \mathbb{R} \cdot u$. Such a space of straight lines has the structure of a vector space because straight lines can be added and multiplied by scalars. How?

4.5.2 Math tutorial: annihilator space

Let V be a vector space (still over $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, or $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), and let V^* be its dual vector space. By the definition of V^* we have the canonical pairing $V^* \otimes V \rightarrow \mathbb{K}$ by evaluation $f \otimes v \mapsto f(v)$. Now let $U \subset V$ be a subvector space. Then the **annihilator space** $U^\perp \subset V^*$ is defined to be

$$U^\perp = \{f \in V^* \mid \forall u \in U : f(u) = 0\}. \quad (4.47)$$

Thus U^\perp consists of the linear functions $f \in V^*$ that annihilate every vector $u \in U$. The dimensions of U and U^\perp are related by

$$\dim U^\perp = \dim V - \dim U. \quad (4.48)$$

Indeed, U^\perp is canonically paired with V/U .

Remark & exercise. Given the ambient vector space V (and its dual V^*), the correspondence $U \leftrightarrow U^\perp$ is a one-to-one correspondence between subvector spaces. Thus when dealing with, say a linear form $f \in V^*$, we have the option of visualizing it via $(\mathbb{K} \cdot f)^\perp$ (actually, as an element in $V/(\mathbb{K} \cdot f)^\perp$ dual to f). This is the fundamental idea behind our scheme of **“visualization”** of forms which was introduced in the Lecture Course on Mathematical Methods (winter term 14/15). Can you fill in the details of how this goes?

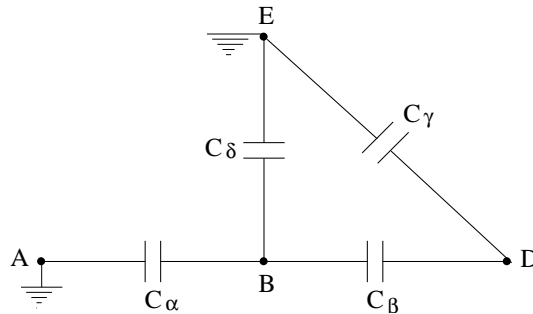
4.6 Boundary-value problems

In this section we continue our study of capacitive networks. What we have investigated so far were *isolated* networks. We assumed the distribution of node charges $\rho \in B_0(K)$ to be known and held fixed, and we viewed the electric potential Φ (and the derived capacitor voltages $V = -d\Phi$ and capacitor charges $Q = CV$) as the unknowns of the problem.

A different though related type of question arises if we *connect* some of the nodes to the external world, thereby enabling charge flow into or out of the capacitive network. Such a change in the physical setup results in a reshuffle between the knowns and unknowns of the mathematical formulation of the problem. There will still be nodes where the charge is given and the potential is to be determined. However, there will now be some other nodes – those connected to the external world – where what we prescribe is the potential, and what we seek is the charge.

Basic setting. As before, we are given some complex K with capacitances assigned to its 1-cells, and what we are looking for are solutions of Poisson's equation $-\Delta\Phi = \rho$ with network Laplacian $\Delta = -\partial\mathcal{C}d$. The new feature is a split of the set of nodes into two subsets: *interior* (i) nodes, and *boundary* (b) nodes. Mathematically, this means that we are given vector space decompositions $C_0(K) = C_0^i(K) \oplus C_0^b(K)$ and $C^0(K) = C^{0,i}(K) \oplus C^{0,b}(K)$ (direct sums).

For example, in the network used for illustration in the previous section, we could take the interior nodes to be B and D , spanning the vector space $C_0^i(K)$. The remaining two nodes, A and E , would then be boundary nodes, spanning the vector space $C_0^b(K)$.



Problem posed. The general question we can ask in such a setting is this: given $\rho^{(i)} \in C_0^i(K)$ (charges in the interior) and $\Phi^{(b)} \in C^{0,b}(K)$ (prescribed potential on the boundary), what is the potential in the interior, $\Phi^{(i)} \in C^{0,i}(K)$, and the charge distribution on the boundary, $\rho^{(b)} \in C_0^b(K)$? In other words, given $\rho^{(i)}$ and $\Phi^{(b)}$, we are to find $\Phi^{(i)}$ and $\rho^{(b)}$ from the condition that $\Phi = \Phi^{(i)} + \Phi^{(b)}$ and $\rho = \rho^{(i)} + \rho^{(b)}$ satisfy Poisson's equation $-\Delta\Phi = \rho$. By linearity, this general problem decomposes into two complementary subproblems:

- (i) In a *Poisson problem*, one specifies some charge distribution $\rho^{(i)}$ in the interior, while setting $\Phi^{(b)} \equiv 0$ on the boundary nodes.
- (ii) In a *Dirichlet problem*, the prescribed data is the boundary potential $\Phi^{(b)}$, while the interior is free of charges: $\rho^{(i)} \equiv 0$.

In both cases the unknowns to be determined are the potential in the interior, $\Phi^{(i)}$, and the boundary charges, $\rho^{(b)}$.

A standard tool in the construction of solutions for both types of boundary-value problem is the *Green's function*, which we are now going to define. For that purpose, let Δ_{int} be the restriction of the Laplacian Δ to the interior of the network:

$$-\Delta_{\text{int}} : C^{0,i}(K) \xrightarrow{d} C^1(K) \xrightarrow{c} C_1(K) \xrightarrow{\partial} C_0^i(K). \quad (4.49)$$

Note that this is not just the Laplacian of the network truncated to its interior part, as the intermediate spaces $C^1(K)$ and $C_1(K)$ are the full spaces of 1-cochains resp. 1-chains of K .

Green's function. If K is a complex with a decomposition $C_0(K) = C_0^i(K) \oplus C_0^b(K)$ into an interior and a boundary part, the **Green's function** G for K is a function on pairs of nodes

$$A, B \mapsto G(A, B) \in \mathbb{R}, \quad (4.50)$$

with the properties

- (i) $(-\Delta_{\text{int}}G)(\bullet, p) = 1 \cdot p$ for every interior node p (and Δ_{int} acts on $G(\bullet, p)$ viewed as a function of its first argument with p being a parameter);
- (ii) $G(A, B) = 0$ if at least one of A, B is a boundary node.

Existence and uniqueness. The Green's function G exists and is unique provided that the capacitance operator $\mathcal{C} : C^1(K) \rightarrow C_1(K)$ is positive and $\dim C_0^b(K) \geq 1$ (i.e. there must be at least one boundary node). In the proof one first shows that $\Delta_{\text{int}} : C^{0,i}(K) \rightarrow C_0^i(K)$ is an isomorphism under the specified conditions. The existence and uniqueness of the Green's function G then follows because G is essentially the inverse of $-\Delta_{\text{int}}$. We add the trivial remark that G depends on the choice of boundary: if we change the decomposition $C_0(K) = C_0^i(K) \oplus C_0^b(K)$, then the Green's function changes.

Interpretation. From the definition of the Green's function we see that $\Phi \equiv G(\bullet, p)$ solves the Poisson problem with interior charge distribution $\rho^{(i)} = 1 \cdot p$. Thus, $G(A, p)$ is to be interpreted as *the value of the electric potential at the node A that results on placing a unit charge on the interior node p when all boundary nodes are grounded*.

Exercise. The Green's function is symmetric: $G(A, B) = G(B, A)$.

Example. Consider the capacitive network displayed at the beginning of the section. A quick computation shows its restricted Laplacian to be

$$-\Delta_{\text{int}} = (C_\alpha + C_\beta + C_\delta)B \otimes B - C_\beta(B \otimes D + D \otimes B) + (C_\beta + C_\gamma)D \otimes D. \quad (4.51)$$

The tensor product notation simply means that $A \otimes B : C^0 \rightarrow C_0$ is the mapping $\Phi \mapsto A \cdot \Phi(B)$ (evaluation on the second factor). We see that Δ_{int} is symmetric, as expected on general grounds.

By definition, the Green's function (restricted to the interior) is given by inverse of the matrix of $-\Delta_{\text{int}}$:

$$\begin{pmatrix} G(B, B) & G(B, D) \\ G(D, B) & G(D, D) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_\alpha + C_\beta + C_\delta & -C_\beta \\ -C_\beta & C_\beta + C_\gamma \end{pmatrix}^{-1}. \quad \square \quad (4.52)$$

Solution of Poisson problem. Since $G(\bullet, p)$ solves the Poisson problem with data $\rho^{(i)} = 1 \cdot p$, it is clear by linearity that the solution for the potential of the general Poisson problem with data $\rho^{(i)} = \sum \rho_p^{(i)} \cdot p$ is

$$\Phi = \sum_{\text{interior}} G(\bullet, p) \rho_p^{(i)}. \quad (4.53)$$

Poisson kernel. To find the corresponding boundary charge distribution $\rho^{(b)}$ we simply apply the (full) Laplacian to the potential and evaluate Poisson's equation on the boundary. Restricting the 0-chain $(\Delta G)(\bullet, p)$ to the boundary and expanding it as

$$(\Delta G)(\bullet, p)^{(b)} = \sum_{\text{boundary}} R \cdot K_R(p) \quad (4.54)$$

with real coefficients $K_R(p)$, we obtain

$$\rho_R^{(b)} = - \sum_{\text{interior}} K_R(p) \rho_p^{(i)}. \quad (4.55)$$

The coefficients $K_R(p)$ organize into what is called the **Poisson kernel** of the complex K . The Poisson kernel obviously has the following physical meaning: $K_R(p)$ is the *influence charge that accumulates on the boundary node R if a negative unit charge is placed at the interior node p and the boundary is grounded*.

Green reciprocity. We turn to describing the solution of the Dirichlet problem in terms of the Green's function and the Poisson kernel. To that end, we need to develop some further theoretical background. Recall that the network Laplacian is symmetric: $\Delta = \Delta^t$. Thus if Φ, Φ' (not a derivative) is any pair of potentials, we have

$$\langle \Phi', \Delta \Phi \rangle = \langle \Phi, \Delta \Phi' \rangle. \quad (4.56)$$

Now let $\rho = -\Delta \Phi$ and $\rho' = -\Delta \Phi'$ be any two solutions of Poisson's equation. Then the symmetry of Δ entails

$$\langle \Phi', \rho \rangle = \langle \Phi, \rho' \rangle. \quad (4.57)$$

This identity is referred to as **Green's reciprocity theorem**. (Note that no reference is made here to a choice of boundary for K .) With $\rho = -\partial Q$ and $\rho' = -\partial Q'$ a related statement is

$$\langle V', Q \rangle = \langle V, Q' \rangle. \quad (4.58)$$

Solution of Dirichlet problem. Green's reciprocity theorem opens a quick path to the solution of Dirichlet-type problems as follows. We decompose both sides of Eq. (4.57) into an interior and a boundary contribution:

$$\sum_{\text{interior}} \Phi'(A) \rho_A + \sum_{\text{boundary}} \Phi'(B) \rho_B = \sum_{\text{interior}} \Phi(A) \rho'_A + \sum_{\text{boundary}} \Phi(B) \rho'_B. \quad (4.59)$$

Next, let Φ, ρ be the solution of a Dirichlet problem and Φ', ρ' the solution of a Poisson problem. Both terms on the left-hand side of Eq. (4.59) then vanish; the first one does so by $\rho^{(i)} = 0$ (Dirichlet problem), and the second one by $\Phi'^{(b)} = 0$ (Poisson problem). If we now take the Poisson data to be $\rho'_A = \delta_{A,p}$, then by inserting the known solution $\rho'_R = -K_R(p)$ for the boundary charges of the Poisson problem, we deduce

$$\Phi^{(i)}(p) = \sum_{\text{boundary}} \Phi^{(b)}(R) K_R(p). \quad (4.60)$$

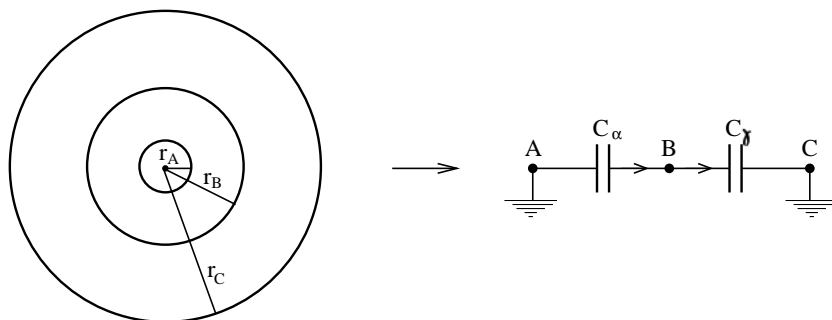
Summary. We see that the Poisson kernel plays a double role in the theory. On one hand, in a Poisson problem it determines the boundary charges in terms of the interior charges. In a Dirichlet problem, on the other hand, it expresses the potential in the interior by the potential on the boundary. As we have shown, this **double role** is a consequence of Green's reciprocity theorem. In conclusion, we have:

$$\begin{aligned} \text{Poisson problem:} \quad \rho_R^{(b)} &= - \sum_{\text{interior}} K_R(p) \rho_p^{(i)}. \\ \text{Dirichlet problem:} \quad \Phi^{(i)}(p) &= + \sum_{\text{boundary}} \Phi^{(b)}(R) K_R(p). \end{aligned}$$

Of course, given the solution for the potential we can easily compute the boundary charges of a Dirichlet problem from $\rho = -\Delta\Phi$.

Example. To illustrate, consider an arrangement of three concentric conducting spheres (in relative isolation) with radii $r_A < r_B < r_C$. Place a charge ρ_B on the middle sphere and connect the inner and outer sphere to the ground (this is a Poisson-type problem). We then ask: what are the **influence charges** ρ_A and ρ_C on the two grounded spheres? This question has a quick answer using Green reciprocity. Before disclosing it, let us construct the answer from the full formalism.

We map the system of three concentric spheres to a capacitive network with three nodes A, B, C . The nodes of the network are arranged in sequence, with a 1-cell α connecting A and B , and a 1-cell γ connecting B and C . From elementary considerations, the capacitances to be assigned to these 1-cells are $C_\alpha = 4\pi\epsilon_0(r_A^{-1} - r_B^{-1})^{-1}$ and $C_\gamma = 4\pi\epsilon_0(r_B^{-1} - r_C^{-1})^{-1}$. A and C are boundary nodes, B is an interior node.



From rotational symmetry, it is clear that the capacitive network faithfully reflects the physics of the system of spheres. The answer to the question posed can then be found by applying the general machinery: we write down the interior Laplacian Δ_{int} , find the Green's function $G(B, B)$

by inversion of $-\Delta_{\text{int}}$, and compute the Poisson kernel coefficients $K_A(B)$ and $K_C(B)$. The result for the influence charges is

$$\rho_A = -K_A(B) \rho_B = -\frac{C_\alpha}{C_\alpha + C_\gamma} \rho_B, \quad \rho_C = -K_C(B) \rho_B = -\frac{C_\gamma}{C_\alpha + C_\gamma} \rho_B. \quad (4.61)$$

Short cut. Here is how to get this answer more quickly. Instead of attacking the Poisson problem directly, we first solve the corresponding Dirichlet problem. Thus we prescribe potential values $\Phi(A)$ and $\Phi(C)$ and set $\rho_B = 0$. Since there is now zero charge between the inner and the outer sphere, the intermediate potential $\Phi(B)$ must divide the interval between $\Phi(A)$ and $\Phi(C)$ according to **Coulomb's law**:

$$\frac{\Phi(A) - \Phi(B)}{\Phi(B) - \Phi(C)} = \frac{r_A^{-1} - r_B^{-1}}{r_B^{-1} - r_C^{-1}} = \frac{C_\gamma}{C_\alpha}. \quad (4.62)$$

From the solution of this equation for $\Phi(B)$,

$$\Phi(B) = \Phi(A) \frac{C_\alpha}{C_\alpha + C_\gamma} + \Phi(C) \frac{C_\gamma}{C_\alpha + C_\gamma}, \quad (4.63)$$

we read off the Poisson kernel $K_A(B) = C_\alpha/(C_\alpha + C_\gamma)$ and $K_C(B) = C_\gamma/(C_\alpha + C_\gamma)$. Green reciprocity then immediately returns our answer (4.61) for the boundary charges ρ_A and ρ_C of the Poisson problem with interior charge ρ_B .

5. Elektrostatik

5.1 Grundgesetze

Euklidischer Raum $(M, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ mit $M = E_3$, $V \simeq \mathbb{R}^3$.

(i) Elektrische Feldstärke ist eine 1-Form $E: M \rightarrow V^*$.

Elektrische Spannung längs Weg γ : $V(\gamma) = \int_{\gamma} E$.

Elektrostatik: $V(\gamma)$ wegunabhängig $\Leftrightarrow dE = 0$.

In Koordinaten: $E = \sum_i E_i dx_i$

$$dE = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial E_j}{\partial x_i} - \frac{\partial E_i}{\partial x_j} = 0 \quad (1 \leq i < j \leq 3).$$

(ii) Elektrische Erregung (oder Flussdichte) D ist eine ungerade 2-Form.

Elektrische Ladungsdichte ρ ist eine Dichte (oder ungerade 3-Form).

Gaußsches Gesetz: $\int_{\partial U} D = \int_U \rho$ (elektrische Ladung in U = elektrischer Fluss durch ∂U).

In differentieller Form: $dD = \rho$ ("Ladungen sind die Quellen elektrischer Erregung").

In Koordinaten: $D = \sum_{i < j} D_{ij} [dx_i \wedge dx_j; Or]$, $\rho = \rho_{123} [dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3; Or]$.

$$dD = \rho \Leftrightarrow \rho_{123} = \frac{\partial}{\partial x_1} D_{23} + \frac{\partial}{\partial x_2} D_{31} + \frac{\partial}{\partial x_3} D_{12} \quad (D_{ji} = -D_{ij}).$$

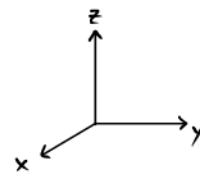
(iii) Materialgleichungen: $D = \epsilon_0 * E$, $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{C}{Vm}$ (dielektrische Konstante des Vakuums).

Hodge-Sternoperator in kartesischen Koordinaten:

$$*dx = [dy \wedge dz; R], \quad *dy = [dz \wedge dx; R], \quad *dz = [dx \wedge dy; R].$$

$$D = \epsilon_0 * E \Leftrightarrow D_{yz} = \epsilon_0 E_x, \quad D_{zx} = \epsilon_0 E_y, \quad D_{xy} = \epsilon_0 E_z.$$

5.2 Zusammenhang mit kapazitiven Netzwerken



$K =$ raumfüllender Komplex; hier: kubisches Gitter

$C_3(K)$ aufgespannt durch elementare Würfel (3-Zellen) mit Häufigkeit $O_3 = R$ oder $O_3 = L$.

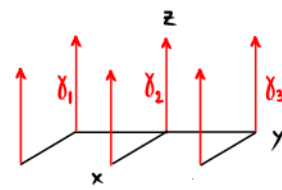
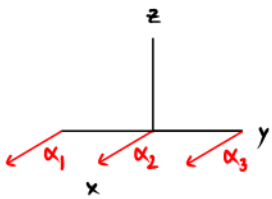
$C_2(K)$ aufgespannt durch Quadrate (Seitenflächen, 2-Zellen) mit Zirkulationsinn.

$C_1(K)$... durch Kanten (1-Zellen) mit Richtungssinn.

$C_0(K)$... durch Ecken (0-Zellen, Knoten). Orientierung entfällt.

Gitterkonstante (= Kantenlänge) = a .

Einige wichtige Ko-Ketten (\rightarrow kartesische Basis) sind:

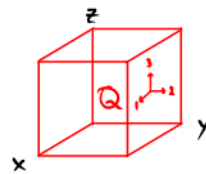
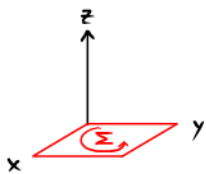


$$dx = a (\alpha_1^* + \alpha_2^* + \alpha_3^* + \dots) \in C^1(K)$$

$$dz = a (\gamma_1^* + \gamma_2^* + \gamma_3^* + \dots) \in C^1(K)$$

Kanonische Paarung von Ko-Kette mit Kette:

$$\langle dz, \gamma_1 \rangle = \langle a \cdot \gamma_1^* + \dots, \gamma_1 \rangle = a \stackrel{(\ast)}{=} \int_{\gamma_1} dz = \text{Integral}$$



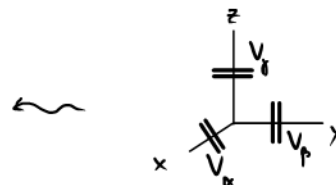
$$dx \wedge dy = a^2 \cdot \Sigma^* + \dots \in C^2(K)$$

$$dx \wedge dy \wedge dz = a^3 \cdot Q^* + \dots \in C^3(K)$$

Kondensatorspannungen: $V = V_\alpha \alpha^* + V_\beta \beta^* + V_\gamma \gamma^* + \dots = \dots + \underbrace{\left(\frac{V_\delta}{a}\right)}_{E_z} \underbrace{(a \gamma^*)}_{dz} + \dots$

Elektrische Feldstärke: $E = E_x dx + E_y dy + E_z dz$

$$V_\alpha/a = E_x \quad \begin{matrix} E_z = V_\delta/a \\ E_y = V_\beta/a \end{matrix}$$



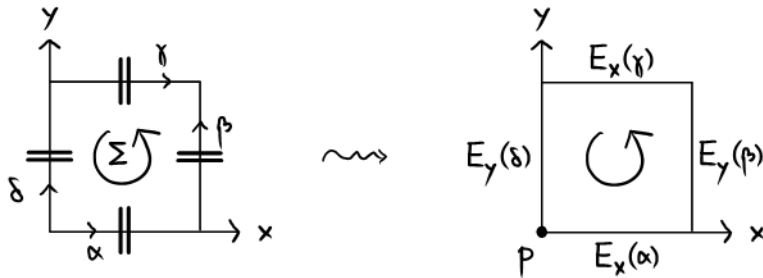
$$[V_\gamma] = \frac{\text{Energie}}{\text{Ladung}}, \quad [E_i] = \frac{\text{Energie}}{\text{Ladung} \times \text{Länge}}$$

Bislang nichts passiert! (Nur umgeschrieben & umbenannt). Jetzt Übergang zum Kontinuum. Annahme: die Koeffizienten E_i ändern sich nur wenig von Kante zu Kante.

↳ die E_i lassen sich als (differenzierbare) Funktionen auffassen.

↳ $E = \sum_i E_i dx_i$ bekommt die Bedeutung einer 1-Form.

2. Kirchhoff'sche Regel im Kontinuumslimit.



$$(dV)_\Sigma = V_\beta - V_\delta - V_\gamma + V_\alpha = a(E_y(\beta) - E_y(\delta) - E_x(\gamma) + E_x(\alpha)).$$

Kontinuumsannahme: $E_x(\alpha) = E_x(p + \frac{a}{2}e_x)$, $E_x(\gamma) = E_x(p + \frac{a}{2}e_x + ae_x)$,
 $E_y(\delta) = E_y(p + \frac{a}{2}e_y)$, $E_y(\beta) = E_y(p + ae_x + \frac{a}{2}e_y)$.

$$\begin{aligned} (dV)_\Sigma &= a(E_y(p + ae_x + \frac{a}{2}e_y) - E_y(p + \frac{a}{2}e_y)) - a(E_x(p + \frac{a}{2}e_x + ae_x) - E_x(p + \frac{a}{2}e_x)) \\ &= a^2 \frac{\partial E_y}{\partial x}(p + \frac{a}{2}e_y) - a^2 \frac{\partial E_x}{\partial y}(p + \frac{a}{2}e_x) + O(a^3) \\ &= a^2 \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)(p) + O(a^3). \end{aligned}$$

Insgesamt: $dV = \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)(p) \cdot a^2 \Sigma^* + \dots = \sum_{i < j} \left(\frac{\partial E_j}{\partial x_i} - \frac{\partial E_i}{\partial x_j} \right) dx_i \wedge dx_j = dE$.

Somit entspricht die 2. Kirchhoff'sche Regel $dV = 0$ im Kontinuum der Gleichung $dE = 0$.

Ladungsverhaltung im Kontinuum.

Kondensatorladungen $Q = \sum_\delta Q_\delta \cdot \gamma \in C_1(K)$.

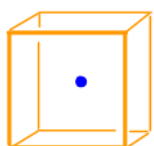
Elektrische Erregung $D = ?$ ($Q = \iint D$).

Frage: Wie wird die 1-Kette Q der Kondensatorladungen zur 2-Ko-Kette D der elektrischen Flussdichte?

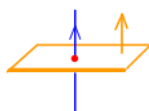
A: Dualer Komplex \tilde{K} ; hier: \tilde{K} wieder ein kubisches Gitter.

Bijektion: k -Zellen von K (mit innerer Orientierung) $\xleftrightarrow{1:1}$ $(3-k)$ -Zellen von \tilde{K} (mit äußerer Orientierung)

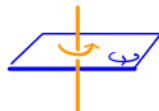
$k=0$:



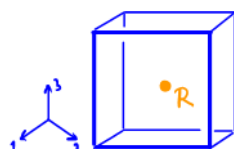
$k=1$:



$k=2$:



$k=3$:

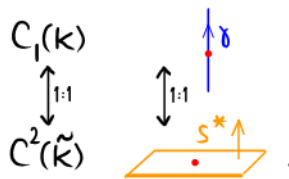


Vergleiche die kanonische Paarung $C^1(K) \otimes C_1(K) \rightarrow \mathbb{R}$

mit der Schnittpaarung $C^1(K) \otimes C^2(\tilde{K}) \rightarrow \mathbb{R}$.

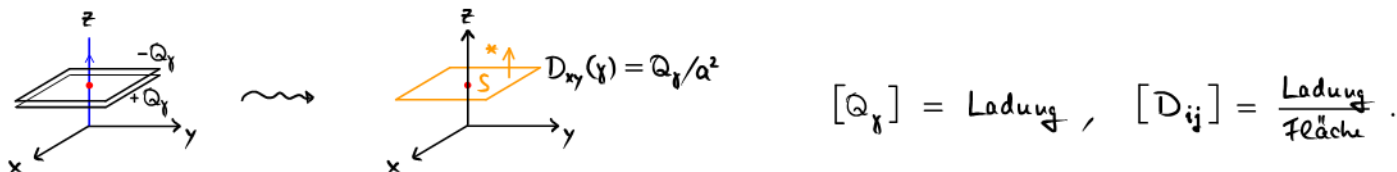
Beide Paarungen sind nichtentartet.

Deshalb haben wir einen kanonischen Isomorphismus:



Hiermit übersetzen wir die Kondensatorladungen $Q = Q_j \cdot \gamma + \dots = \left(\frac{Q_j}{a^2}\right) (a^2 \gamma) + \dots \in C_1(K)$

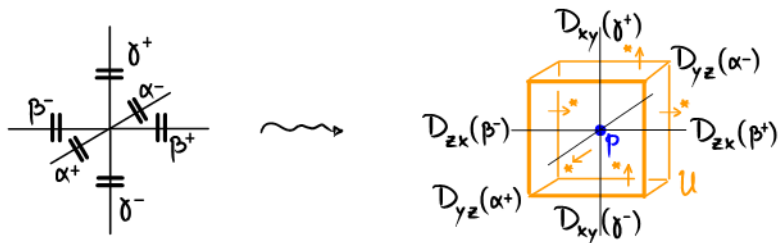
in eine elektrische Flussdichte $D = D_{xy}(y) \cdot a^2 S^* + \dots \in C^2(\tilde{K})$:



Bislang wieder nichts passiert; nur umgeschrieben & umgedeutet. Jetzt auf zum Kontinuum!

Annahme. Die Koeffizienten D_{ij} ändern sich nur wenig von Quadrat zu Quadrat und lassen sich somit als (differenzierbare) Funktionen auffassen.

$\leadsto D \in C^2(\tilde{K})$ bekommt die Bedeutung einer ungeraden 2-Form: $D = \sum_{i < j} D_{ij} [dx_i \wedge dx_j; Or]$.



$$\begin{aligned} (-dQ)_p &= Q_{\alpha^+} - Q_{\alpha^-} + Q_{\beta^+} - Q_{\beta^-} + Q_{\delta^+} - Q_{\delta^-} \\ &= a^2 (D_{yz}(\alpha^+) - D_{yz}(\alpha^-) + D_{zx}(\beta^+) - D_{zx}(\beta^-) + D_{xy}(\delta^+) - D_{xy}(\delta^-)). \end{aligned}$$

Kontinuumsannahme:

$$D_{xy}(\delta^+) = D_{xy}(p + \frac{a}{2} e_z), \quad D_{yz}(\alpha^+) = D_{yz}(p + \frac{a}{2} e_x), \quad D_{zx}(\beta^+) = D_{zx}(p + \frac{a}{2} e_y),$$

$$D_{xy}(\delta^-) = D_{xy}(p - \frac{a}{2} e_z), \quad D_{yz}(\alpha^-) = D_{yz}(p - \frac{a}{2} e_x), \quad D_{zx}(\beta^-) = D_{zx}(p - \frac{a}{2} e_y).$$

$$\begin{aligned} (-dQ)_p &= a^2 (D_{yz}(p + \frac{a}{2} e_x) - D_{yz}(p - \frac{a}{2} e_x) + D_{zx}(p + \frac{a}{2} e_y) - D_{zx}(p - \frac{a}{2} e_y) + D_{xy}(p + \frac{a}{2} e_z) - D_{xy}(p - \frac{a}{2} e_z)) \\ &= a^3 \left(\frac{\partial}{\partial x} D_{yz}(p) + \frac{\partial}{\partial y} D_{zx}(p) + \frac{\partial}{\partial z} D_{xy}(p) \right) + \mathcal{O}(a^4) = a^3 \left(\frac{\partial}{\partial x} D_{yz} + \frac{\partial}{\partial y} D_{zx} + \frac{\partial}{\partial z} D_{xy} \right)(p) + \dots \end{aligned}$$

Insgesamt:

$$-dQ = \left(\frac{\partial}{\partial x} D_{yz} + \frac{\partial}{\partial y} D_{zx} + \frac{\partial}{\partial z} D_{xy} \right)(p) \cdot a^3 \underset{p \hat{=} u^*}{p} + \dots = \left(\frac{\partial}{\partial x} D_{yz} + \frac{\partial}{\partial y} D_{zx} + \frac{\partial}{\partial z} D_{xy} \right) [dx \wedge dy \wedge dz; \mathbb{R}] = dD.$$

$$D = D_{yz} [dy \wedge dz; \mathbb{R}] + D_{zx} [dz \wedge dx; \mathbb{R}] + D_{xy} [dx \wedge dy; \mathbb{R}]$$

Nach dem gleichen Prinzip wie oben — nämlich durch Vergleich der kanonischen Paarung $C^0(K) \otimes C_0(K) \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Schnittpaarung $C^0(K) \otimes C^3(\tilde{K}) \rightarrow \mathbb{R}$ und dem hieraus resultierenden Isomorphismus $C_0(K) \xrightarrow{\sim} C^3(\tilde{K})$ — konvertieren wir die Kette $\rho \in C_0(K)$ der Knotenladungen in die entsprechende Ko-Kette $\rho \in C^3(\tilde{K})$:

$$C_0(K) \ni \rho = \rho_p \cdot p + \dots \hat{=} \rho_p \cdot u^* + \dots \in C^3(\tilde{K}).$$

Per Kontinuumsannahme wird $\rho \in C^3(\tilde{K})$ zur ungeraden 3-Form $\rho = \rho_{xyz} [dx \wedge dy \wedge dz; \mathbb{R}]$ der elektrischen Ladungsdichte. (**Achtung!** Gleiches Symbol ρ für eng verwandte, aber doch verschiedene Größen.)

Nach der obigen Überlegung wird dann das Gesetz $-dQ = \rho$ der Ladungserhaltung zum Gaußschen Gesetz $dD = \rho$.

BEACHTEN den Vorzeichenwechsel: $C_1(K) \xrightarrow{-d} C_0(K),$
 geht über in $C^2(\tilde{K}) \xrightarrow{d} C^3(\tilde{K}).$

Materialgleichung im Kontinuum.

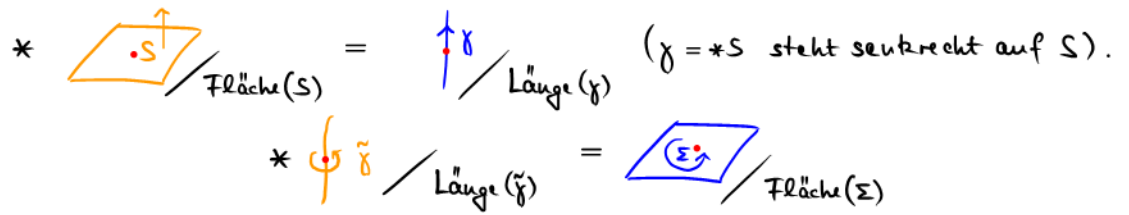
kapazitives Netzwerk: $Q_y = C_y V_y$

Kontinuum (Vakuum): $a^2 D_{xy} = (a \epsilon_0) (a E_z),$ also $D_{xy} = \epsilon_0 E_z$ usw.

5.3 Hodge-Sternoperator

ist eine lineare Abbildung $*$: $\Omega^k(M) \rightarrow \tilde{\Omega}^{n-k}(M)$ (dim $M = n$).
 (gerade k -Formen) (ungerade $(n-k)$ -Formen)

Visualisierung:



Formale Definition.

Hier geht die Geometrie von M ein.

Metrischer Tensor $(\cdot, \cdot): \Omega^k(M) \times \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^0(M) \equiv C^\infty(M)$;

ist bilinear, symmetrisch und nichtentartet.

Bilinearität bedeutet hier: $(f\alpha, \beta) = (\alpha, f\beta) = f(\alpha, \beta)$ ($f \in \Omega^0(M)$, Funktion).

Volumendichte $\equiv d\text{vol}$ (ungerade n -Form).

Beispiel: $M = E_3$ mit kartesischen Koordinaten x, y, z :

Konstante Funktion mit Wert 1

$$(dx, dy) = (dx, dz) = (dy, dz) = 0, \quad (dx, dx) = (dy, dy) = (dz, dz) = 1$$

$$d\text{vol} = |dx \wedge dy \wedge dz|.$$

Für $\beta \in \Omega^k(M)$ definiert man $*\beta \in \tilde{\Omega}^{n-k}(M)$ durch die Forderung

$$\alpha \wedge *\beta = (\alpha, \beta) d\text{vol} \quad \text{für alle } \alpha \in \Omega^k(M).$$

Genauso für $\beta \in \tilde{\Omega}^k(M)$, mit Ergebnis $*\beta \in \Omega^{n-k}(M)$.

Eigenschaften.

(i) $\alpha \wedge *\beta = \beta \wedge *\alpha$.

(ii) $*1 = d\text{vol}, *d\text{vol} = 1$.

(iii) $*(f\alpha) = f*\alpha$.

(iv) $*^2 = (-1)^{k(n-k)} \text{Id}$ auf $\Omega^k(E_n)$.

$M = E_3$ mit orthogonalen Koordinaten.

Kartesische Koordinaten x, y, z : $*dx = [dy \wedge dz; \mathbb{R}]$ usw.

Kugelkoordinaten r, θ, ϕ : $*dr = [r d\theta \wedge r \sin\theta d\phi; \mathbb{R}]$ usw.

denn $dr, r d\theta, r \sin\theta d\phi$ ist wie dx, dy, dz ein rechtshändiges Orthonormalsystem.

Zylinderkoordinaten genauso ...

5.4 Elektrisches Feld einer Punktladung

Ladung q am Ort p .

$r_p : E_3 \rightarrow \mathbb{R}$ Abstand von p ; also $r_p(p') = |p - p'|$.

Raumwinkelform. $\tau_p \in \tilde{\Omega}^2(E_3)$ Raumwinkelform bzgl. p ;

in Kugelkoordinaten bzgl. p : $\tau_p = [d\theta_p \wedge \sin\theta_p d\phi_p; \mathbb{R}]$.

in kartesischen Koordinaten:

$$\tau_p = \frac{(x-x(p))[dy \wedge dz; \mathbb{R}] + (y-y(p))[dz \wedge dx; \mathbb{R}] + (z-z(p))[dx \wedge dy; \mathbb{R}]}{((x-x(p))^2 + (y-y(p))^2 + (z-z(p))^2)^{3/2}}$$

WARNUNG: das Subskript p hat hier nicht die im Kontext von Formen übliche Bedeutung.

Eigenschaften von τ_p .

(i) τ_p ist definiert auf $E_3 \setminus \{p\}$ und erfüllt dort $d\tau_p = 0$.

(ii) $\int_S \tau_p = 4\pi$ (geschlossene Fläche S ; umschließt p)
die äußere Orientierung von S zeigt von p nach außen.

(iii) $\tau_p = * \frac{dr_p}{r_p^2} = \frac{(x-x(p)) * dx + (y-y(p)) * dy + (z-z(p)) * dz}{((x-x(p))^2 + (y-y(p))^2 + (z-z(p))^2)^{3/2}}$

Elektrische Feldstärke:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dr_p}{r_p^2}$$

Elektrische Erregung:

$$D = \frac{q}{4\pi} \cdot \tau_p$$

Feld eines Punkts p mit Ladung q

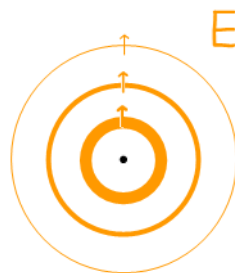
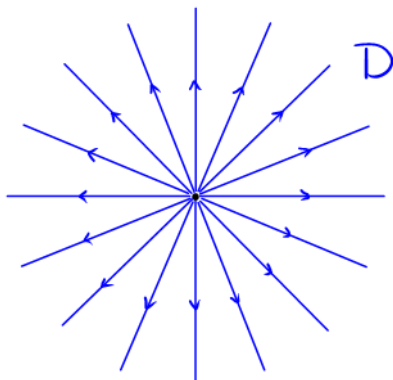
Nachweis. $dE = d^2 \left(-\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r_p} \right) = 0$ (wegen $d^2 = 0$) ✓

$$D = \frac{q}{4\pi} * \frac{dr_p}{r_p^2} = \epsilon_0 * E \quad \checkmark$$

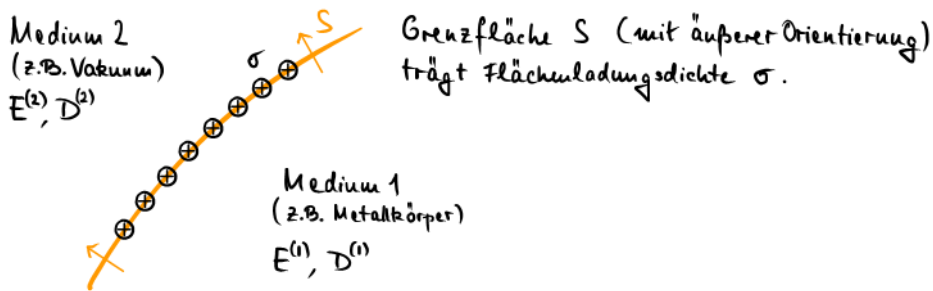
$$\int_U dD = \int_{\partial U} D = \frac{q}{4\pi} \int_{\partial U} \tau_p \stackrel{U \text{ enthält } p}{=} q = \int_U \rho \quad \wedge \quad dD = \rho \quad \checkmark$$

(Der direkte Nachweis von $dD = \rho$ erfordert etwas Distributionentheorie.)

Visualisierung.



5.5 Anschlussbedingungen an einer Grenzfläche



Definition von σ (ungerade 2-Form):

$\tau \subset S$ Teil der Grenzfläche S .

$$Q[\tau] = \text{Oberflächenladung in } \tau \equiv \int_{\tau} \sigma.$$

Anschlussbedingungen.

$E^{(j)}|_S :=$ Grenzwert von E bei Annäherung an S vom Medium j her. Genauso für D .

$E^{(2)} _{S; \text{tang}} = E^{(1)} _{S; \text{tang}}$	(E_{tang} ist stetig)
$D^{(2)} _{S; \text{tang}} = D^{(1)} _{S; \text{tang}} + \sigma$	(D_{tang} hat Sprung)

WARNUNG. Vermöge der Materialgleichung $D = \epsilon_0 * E$ korrespondiert D_{tang} zu E_{perp} (= Normalkomponente).

Nachweis. τ beliebige Teilfläche der Grenzfläche S .

Verdicke τ zu einer dünnen Schicht τ_ϵ um τ (Schichtdicke ϵ).

Benütze $\int_{\partial\tau_\epsilon} D = \int_{\tau_\epsilon} \rho$.

Im Limes $\epsilon \rightarrow 0$ folgt mit $\partial\tau_\epsilon \rightarrow \tau^{(2)} - \tau^{(1)}$ ($= 0$) die Relation

$$\int_{\tau} \sigma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\tau_\epsilon} \rho = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\tau_\epsilon} D = \int_{\tau^{(2)} - \tau^{(1)}} D = \int_S D^{(2)} - \int_S D^{(1)}.$$

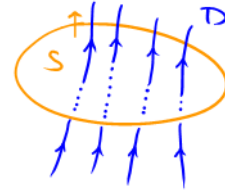
Da $\tau \subset S$ beliebig gewählt werden kann, folgt $D^{(2)} - D^{(1)}|_S = \sigma$.

Die Überlegung für E verläuft ähnlich (ausgehend von $dE = 0$).

5.6 Messvorschrift für D

Gegeben: Fläche S mit äußerer Orientierung.

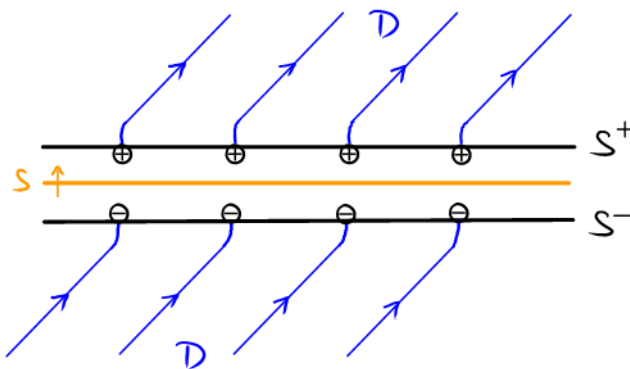
Aufgabenstellung: Messe den elektrischen Fluss $\int_S D$ durch S .



Lösung (mit der Maxwell'schen Methode der Doppelplatten).

1. In der Werkstatt eine Meßsonde herstellen. Die Sonde besteht aus zwei dünnen Metallkörpern S^\pm , die S exakt nachgebildet sind. Die Metallkörper zur Deckung bringen, elektrische Neutralität herstellen und die Sonde an den Ort der Messung transportieren.
2. Die zwei Metallkörper am Messort S voneinander trennen. Beide sind jetzt geladen (mit gleichem Betrag, aber unterschiedlichem Vorzeichen der Ladung). Die Gesamtladung $Q[S^+]$ auf demjenigen Metallkörper messen, aus dem der Vektor der äußeren Orientierung von S herauszeigt (S^+), nicht hineinzeigt (S^-). Messergebnis $Q[S^+] = \int_S D$.

Begründung der Messvorschrift. Metallkörper im Gleichgewicht sind in ihrem Inneren feldfrei ($E=0$), weil in Anwesenheit elektrischer Feldstärke eine beschleunigende Kraft auf die mobilen Ladungsträger wirkt und der Körper somit nicht im statischen Gleichgewicht sein kann. Wegen $D = \epsilon_0 * E$ impliziert $E=0$ auch $D=0$. Das elektrische Feld am Messort S wird durch Oberflächenladungen auf den Metallkörpern S^\pm abgeschirmt (siehe die folgende Figur). Unter Berücksichtigung der Orientierungsvorgaben misst man mit der Ladungsmenge $Q[S^+]$ genau den elektrischen Fluss $\int_S D$ (mit dem richtigen Vorzeichen).



5.7 Poisson-Gleichung & Laplace-Operator

Löse $dE = 0$ durch den Ansatz $E = -d\Phi$.

Materialgleichung: $D = \epsilon_0 * E = -\epsilon_0 * d\Phi$.

Gaußsches Gesetz $\wedge dD = -\epsilon_0 d * d\Phi = \rho$.

Anwendung des Sternoperators auf beiden Seiten ergibt

$$-\Delta \Phi = * \rho / \epsilon_0 \quad (\text{Poisson-Gleichung})$$

mit $\Delta = * d * d$ (Laplace-Operator auf Funktionen).

Laplace-Operator in kartesischen Koordinaten:

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz.$$

$$*d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} [dy \wedge dz, \mathbb{R}] + \frac{\partial \Phi}{\partial y} [dz \wedge dx, \mathbb{R}] + \frac{\partial \Phi}{\partial z} [dx \wedge dy, \mathbb{R}].$$

$$d * d\Phi = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) d\text{vol}.$$

$$*d * d\Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}, \quad \text{also} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Laplace-Operator in Kugelkoordinaten:

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} dr + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} d\varphi.$$

$$*d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} [r d\theta \wedge r \sin\theta d\varphi, \mathbb{R}] + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} [r \sin\theta d\varphi \wedge dr, \mathbb{R}] + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} [dr \wedge r d\theta, \mathbb{R}].$$

$$d * d\Phi = \left(\frac{\partial}{\partial r} r^2 \sin\theta \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \theta} \sin\theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right) [dr \wedge d\theta \wedge d\varphi, \mathbb{R}].$$

$$* [dr \wedge d\theta \wedge d\varphi, \mathbb{R}] = \frac{1}{r^2 \sin\theta}.$$

$$*d * d\Phi = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} r^2 \sin\theta \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \theta} \sin\theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right).$$

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Lösung der Poisson-Gleichung im Fall, dass ρ vorgegeben ist.

Potential einer Punktladung q am Ort p' : $\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r_{p'}}$ ($\Phi(\infty) = 0$).

$$\text{oder: } \Phi(p) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r_{p'(p)}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r_p(p')}$$

\wedge Potential einer Ladungsverteilung mit Dichte ρ (durch lineare Überlagerung):

$$\Phi(p) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho}{r_p}$$

5.8 Multipolentwicklung (kartesisch)

Ladungsdichte ρ bekannt. Alle Ladungen enthalten in beschränktem Gebiet U ; z.B. $U = B_R(0)$.

Ziel: berechne das Potential $\Phi(p) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_U \frac{\rho}{r_p}$ für Orte p weit außerhalb von U .

$$r_p(\cdot) = \text{dist}(\cdot, p) = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i(\cdot) - x_i(p))^2} = \sqrt{r^2(p) - 2 \sum_{i=1}^3 x_i(p) x_i(\cdot) + r^2(\cdot)}$$

Anwendung der Taylor-Entwicklung

$$(1+a)^{-1/2} = 1 - \frac{a}{2} + \frac{3}{8} a^2 + O(a^3)$$

auf das Reziproke der Abstandsfunktion ergibt

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_p(\cdot)} &= \frac{1}{r(p)} \left(1 + \frac{r^2(\cdot) - 2 \sum x_i(p) x_i(\cdot)}{r^2(p)} \right)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{r(p)} + \sum_{i=1}^3 \frac{x_i(p)}{r^3(p)} x_i(\cdot) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{x_i(p) x_j(p)}{r^5(p)} (3 x_i(\cdot) x_j(\cdot) - \delta_{ij} r^2(\cdot)) + \dots \end{aligned}$$

Definiere die **Multipolmomente**:

Monopolmoment: $q^{(0)} = \int_U \rho$ (Gesamtladung); Skalar

Dipolmoment: $q_i^{(1)} = \int_U x_i \rho$ ($i = 1, 2, 3$); Vektor

Quadrupolmoment: $q_{ij}^{(2)} = \int_U (x_i x_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} r^2) \rho$ symmetrischer Tensor 2. Stufe; spurlos.

Dann hat man für das elektrische Skalarpotential die (Multipol-) Entwicklung

$$4\pi\epsilon_0 \Phi = \frac{q^{(0)}}{r} + \sum_{i=1}^3 q_i^{(1)} \frac{x_i}{r^3} + \frac{3}{2} \sum_{i,j} q_{ij}^{(2)} \frac{x_i x_j}{r^5} + \dots$$

5.9 Randwertaufgaben

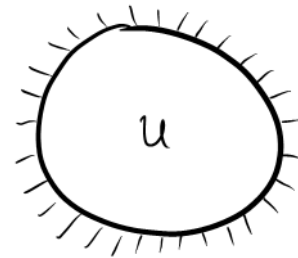
Gebiet U (zusammenhängend, abgeschlossen, kompakt) mit Rand ∂U .

Poisson-Problem: gegeben ist $\rho \neq 0$ auf $U \setminus \partial U$ und $\Phi = 0$ auf ∂U .

Dirichlet-Problem: gegeben ist $\rho = 0$ auf $U \setminus \partial U$ und $\Phi \neq 0$ auf ∂U .

Gesucht wird in beiden Fällen: ρ auf ∂U und Φ auf $U \setminus \partial U$.

Methodisch geht man genauso vor wie für kapazitive Netzwerke.



5.9.1 Greensche Funktion

Zum Gebiet $U \subset E_3$ und dem Laplace-Operator Δ existiert eine eindeutig bestimmte

Greensche Funktion $G: U \times U \rightarrow \mathbb{R}$. Sie ist definiert durch die Forderungen

- (i) $\Delta G(\cdot, p) = 0$ auf $U \setminus \{p\}$.
- (ii) $G(\cdot, p)|_{\partial U} = 0$.
- (iii) $\Delta G(\cdot, p) - \frac{1}{4\pi r_p}$ ist regulär in p .

Interpretation. $G(A, B)/\epsilon_0$ ist das elektrische Skalarpotential am Ort A , wenn sich im Punkt B eine Einheitsladung befindet und der Rand ∂U geerdet ist.

Mittelung. Die Greensche Funktion zu Δ ist symmetrisch: $G(A, B) = G(B, A)$.

(Beweis mittels Greenscher Reziprozität $\int_U \Phi^{(A)} \rho^{(B)} = \int_U \Phi^{(B)} \rho^{(A)}$; siehe unten).

Lösung des Poisson-Problems für Φ : $\Phi(p) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_U G(p, \cdot) \rho$.

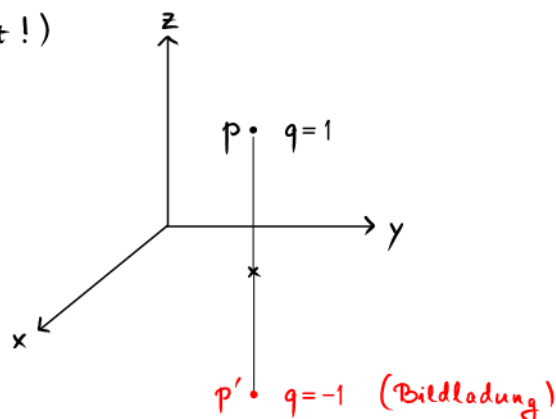
Beispiel. $U =$ Halbraum (nicht kompakt; deshalb Vorsicht!)

Sei $U = \{p \in E_3 \mid z(p) \geq 0\}$, $\partial U = xy$ -Ebene.

Greensche Funktion mittels Trick ("Bildladungsmethode"):

$$G(\cdot, p) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_{p'}} \right),$$

$$z(p') = -z(p), \quad x(p') = x(p), \quad y(p') = y(p).$$



Nachweis. (i) $\Delta G(\cdot, p) \stackrel{\checkmark}{=} 0$ auf $U \setminus \{p\}$, denn $\Delta \frac{1}{r_{p'}} = 0$ auf U .

(ii) $(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_{p'}})|_{xy\text{-Ebene}} = 0 \wedge G(\cdot, p)|_{\partial U} \stackrel{\checkmark}{=} 0$.

(iii) $\Delta G(\cdot, p) - \frac{1}{4\pi r_p} = \frac{1}{4\pi r_{p'}}$ ist \checkmark regulär auf U .

Bemerkung. Auf der geerdeten xy -Ebene sammelt sich ein Kontinuum von Influenzladungen an, die die Ladung in p abschirmen. Aus Symmetriegründen ist der Effekt dieses Kontinuums (auf U) exakt gleich dem Effekt (auf U) einer einzigen Bildladung in p' .

Lösung des Poisson-Problems für $\sigma = \rho|_{\partial U}$.

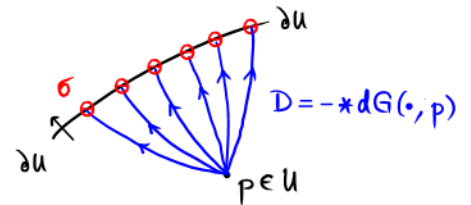
$G(\cdot, p)/\epsilon_0 =$ elektrisches Skalarpotential (Einheitsladung in p , Rand von U geerdet).

$\leadsto -dG(\cdot, p)/\epsilon_0 =$ elektrische Feldstärke (...).

$\leadsto -*dG(\cdot, p) =$ elektrische Flussdichte (...).

Anschlussbedingung (mit $D \equiv 0$ außerhalb von U)

\leadsto Flächenladungsdichte (...): $\sigma = *dG(\cdot, p)$



Poisson-Kern. Für jeden Punkt $p \in U$ haben wir also eine ungerade 2-Form $-*dG(\cdot, p) \equiv K^{(p)}$ auf ∂U . Die Zuordnung $p \rightarrow K^{(p)}$ heißt der Poisson-Kern des Gebiets U mit Rand ∂U .

Interpretation: der Poisson-Kern $K^{(p)}$ ist gleich (minus) der Flächenladungsdichte (auf der Grenzfläche ∂U), die sich einstellt, wenn eine Einheitsladung am Ort p sitzt und ∂U geerdet ist.

Mittels Aufbau eines Ladungskontinuums ρ aus Punktladungen an allen Orten $\cdot \in U$ erhalten wir (durch lineare Superposition der Einzelbeiträge nach obigem Ergebnis für σ) für einen Randpunkt $B \in \partial U$

$$\sigma_B = - \int_U K_B^{(\cdot)} \rho \quad (\text{Lösung des Poisson-Problems für } \sigma).$$

Vergleiche mit analoger Formel für kapazitive Netzwerke:

$$\rho_B = - \sum_p K_B(p) \rho_p \quad (\text{Poisson-Kern } K).$$

Beispiel. Halbraum $z \geq 0$ (wie oben).

$$\begin{aligned} K^{(p)} &= -*dG(\cdot, p)|_{\partial U} = -*d\left(\frac{1}{4\pi r_p} - \frac{1}{4\pi r_{p'}}\right)\Big|_{xy\text{-Ebene}} = \frac{1}{4\pi} (\tau_p - \tau_{p'})\Big|_{xy\text{-Ebene}} \\ &= \frac{1}{4\pi} ((z - z(p)) - (z - z(p'))) \frac{[dx \wedge dy; \mathbb{R}]}{r_p^3} \Big|_{z=0} = -\frac{z(p)}{2\pi} \frac{[dx \wedge dy; \mathbb{R}]}{((x - x(p))^2 + (y - y(p))^2 + z^2(p))^{3/2}}. \end{aligned}$$

Aufgabe. (i) Für U kompakt gilt $\int_U K^{(p)} = 1$.

(ii) Stimmt das auch noch für $U =$ Halbraum ($z \geq 0$)?

5.9.2 Greensche Identitäten

Definiere ein Skalarprodukt (vom Euklidischen Typ) für 1-Formen α, β auf U :

$$(\alpha | \beta)_U := \int_U \alpha \wedge * \beta = \int_U \left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i \beta_i \right) d\text{vol} \quad (\text{kartesische Komponenten } \alpha_i, \beta_i).$$

Physikalische Bedeutung: $2\varepsilon_0 (E, E)_U$ ist die Energie des elektrischen Feldes in U .

Setze $\alpha = df$ und $\beta = dg$ (Funktionen f, g).

$$(df, dg)_U = \int_U df \wedge * dg = \int_U d(f * dg) - \int_U f d * dg.$$

Es folgt

$$(df, dg)_U = \int_{\partial U} f * dg - \int_U f * \Delta g \quad (1. \text{ Greensche Identität}).$$

f und g austauschen und Gleichungen subtrahieren gibt

$$\int_{\partial U} (f * dg - g * df) = \int_U (f * \Delta g - g * \Delta f) \quad (2. \text{ Greensche Identität})$$

Lösung des Dirichlet-Problems für Φ .

Sei $B_\varepsilon(p)$ Kugel mit Mittelpunkt p und Radius ε (beabsichtigt ist $\varepsilon \rightarrow 0$).

Verwende 2. Greensche Id. mit $f \equiv \Phi$, $g \equiv G(\cdot, p)$ und Gebiet $U \setminus B_\varepsilon(p)$.

Die rechte Seite der 2. G. Id. verschwindet wegen $\Delta \Phi = 0$ (Dirichlet-Problem)

und $\Delta G(\cdot, p) = 0$ auf $U \setminus \{p\} \supset U \setminus B_\varepsilon(p)$.

Mit $\partial(U \setminus B_\varepsilon(p)) = \partial U - \partial B_\varepsilon(p)$ (2-Kette mit äußerer Orientierung)

folgt für die linke Seite

$$\int_{\partial U} (\Phi * dG(\cdot, p) - G(\cdot, p) * d\Phi) - \int_{\partial B_\varepsilon(p)} (\Phi * dG(\cdot, p) - G(\cdot, p) * d\Phi) = 0.$$

Der zweite Term verschwindet wegen $G(\cdot, p)|_{\partial U} = 0$. Der vierte Term verschwindet im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$,

weil Fläche $(\partial B_\varepsilon(p)) \sim \varepsilon^2$ und $G(\cdot, p)|_{\partial B_\varepsilon(p)} \sim \frac{1}{\varepsilon}$. Der dritte Term:

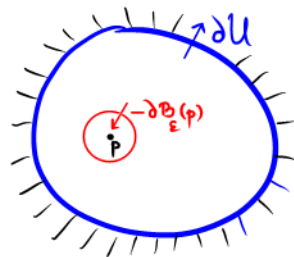
$$- \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(p)} \Phi * dG(\cdot, p) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(p)} \Phi * d \frac{1}{4\pi r} = \Phi(p) \int_{\partial B_\varepsilon(p)} \frac{1}{4\pi} = \Phi(p).$$

Der erste Term: $\int_{\partial U} \Phi * dG(\cdot, p) = - \int_{\partial U} \Phi K(p)$ (Poisson-Kern K).

Ergebnis: $\Phi(p) = \int_{\partial U} \Phi K(p)$ (Lösung des Dirichlet-Problems für Φ).

Vergleiche mit analoger Formel für kapazitive Netzwerke:

$$\Phi(p) = \sum_R \Phi(R) K_R(p) \quad (\text{Poisson-Kern } K).$$



Greensche Reziprozität.

Es seien $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}$ Potentialfunktionen mit $\Delta\Phi^{(i)} = 0$ ($i=1,2$) außerhalb von U .

Dann gilt $\int_U \Phi^{(1)} \rho^{(2)} = \int_U \Phi^{(2)} \rho^{(1)}$ für $\rho^{(i)} = -\epsilon_0 * \Delta\Phi^{(i)}$ ($i=1,2$).

Beweis. $\int_U \Phi^{(1)} \rho^{(2)} = -\epsilon_0 \int_{E_3} \Phi^{(1)} d * d\Phi^{(2)} = \epsilon_0 \int_{E_3} d\Phi^{(1)} \wedge * d\Phi^{(2)} = \epsilon_0 \int_{E_3} E^{(1)} \wedge * E^{(2)} = \int_{E_3} E^{(1)} \wedge \mathcal{D}^{(2)}$
 $= \epsilon_0 \int_{E_3} E^{(2)} \wedge * E^{(1)} = \dots = \int_U \Phi^{(2)} \rho^{(1)}$.

Aufgabe. Verkürzte Herleitung der Lösung des Dirichlet-Problems mittels Greenscher Reziprozität.

5.9.3 Bildladungsmethode für $U = \text{Kugel}$

Kugel $U = \mathcal{B}_R(0)$ mit Mittelpunkt 0 (Koordinatenursprung) und Radius R .

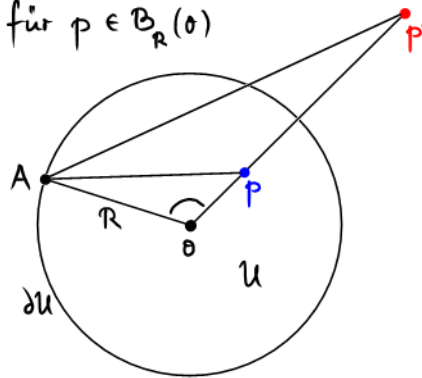
Berechne die Greensche Funktion $G(\cdot, p)$ zu U für $p \in \mathcal{B}_R(0)$

mittels Bildladungsmethode (Kelvin).

Sei dazu p' der Punkt auf dem Strahl

von 0 durch p mit $\frac{r(p')}{R} = \frac{R}{r(p)}$.

Dann gilt: $\frac{1}{r_p(\cdot)} = \frac{R/r(p)}{r_{p'}(\cdot)}$ auf ∂U .



Beweis. Dreieck $(0pA)$ ist ähnlich zum Dreieck $(0Ap')$. Es folgt

$$|A-p'|/r(p') = |A-p|/R \quad \text{und somit} \quad \frac{R}{r_p(A)} = \frac{r(p')}{r_{p'}(A)} = \frac{R^2/r(p)}{r_{p'}(A)} \quad \blacksquare$$

Platziere Bildladung $q = -R/r(p)$ am Ort p' .

\leadsto Ausdruck für die Greensche Funktion: $G(\cdot, p) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_p(\cdot)} - \frac{|q|}{r_{p'}(\cdot)} \right)$, $|q| = R/r(p)$.

Bemerkung zu theoretischem Hintergrund: konforme Abbildungen

Aufgabe. (i) Verifiziere $G(A, B) = G(B, A)$. (ii) Berechne den zugehörigen Poisson-Kern.

5.10 Energiebetrachtungen

Ermittle die elektrostatische Energie eines Systems von N Punktladungen:

Punktladung q_1 am Ort p_1 bewirkt elektrische Feldstärke $E^{(1)} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr_{p_1}}{r_{p_1}^2}$.

Bringe zweite Punktladung q_2 aus dem Unendlichen an den Ort p_2 .

\leadsto Arbeit $W_{12} = -q_2 \int_{\infty}^{p_2} E^{(1)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{|p_1 - p_2|}$.

Bringe dritte Punktladung q_3 von ∞ nach p_3 \leadsto Arbeit $W_{13} + W_{23}$.

Prozedur fortsetzen ... Gesamtarbeit für N Punktladungen ist Summe über

$N(N-1)/2$ Paare:

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{q_i q_j}{|p_i - p_j|}$$

Anders geschrieben: $W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \Phi^{(i)}(p_i) q_i$, $\Phi^{(i)}(\cdot) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{|\cdot - p_j|}$.

Übergang zum Ladungskontinuum (Ladungen "verschmiert"; keine Punkte mehr):

$$\tilde{W} = \frac{1}{2} \int \Phi \rho$$

\tilde{W} durch das elektrische Feld ausdrücken:

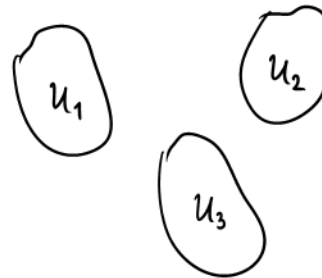
$$\tilde{W} = \frac{1}{2} \int \Phi dD = -\frac{1}{2} \int d\Phi \wedge D = \frac{1}{2} \int E \wedge D$$

Beachte: $\tilde{W} \geq 0$. Hingegen kann W auch negativ werden.

Unterschied: \tilde{W} enthält Selbstenergiebeiträge!

Kapazitätskoeffizienten.

Betrachte N elektrische Leiter U_1, \dots, U_N .



$$\Phi|_{U_i} \equiv \Phi_i \quad (i=1, \dots, N). \quad \Phi(\infty) = 0.$$

$$\tilde{W} = \frac{1}{2} \int \Phi \rho = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \Phi_i Q_i. \quad \text{Drücke } Q_i \text{ (Ladung auf } U_i) \text{ durch Potentiale aus.}$$

Potentiale vorgegeben \sim Dirichlet-Problem auf $E_3 \setminus \{\bigcup_{i=1}^N U_i\}$.

$$\sim \Phi(p) = \sum_{j=1}^N \Phi_j K_j(p), \quad \text{integrierter Poisson-Kern: } K_j(p) = - \int_{-\partial U_j} *dG(\cdot, p).$$

Aus der Potentialfunktion Φ können wir in der bekannten Weise Q_i bestimmen:

$$D = -\epsilon_0 *d\Phi = -\epsilon_0 \sum_j \Phi_j *dK_j$$

$$\sim Q_i = \int_{\partial U_i} D = -\epsilon_0 \sum_j \Phi_j \int_{\partial U_i} *dK_j = \sum_j C_{ij} \Phi_j. \quad \text{Symmetrie der Greenschen Funktion}$$

Kapazitätskoeffizienten: $C_{ij} = -\epsilon_0 \int_{\partial U_i} *dK_j = -\epsilon_0 \int_{\partial U_j} *dK_i = C_{ji}$.

Ergebnis: $\tilde{W} = \frac{1}{2} \sum_{ij} C_{ij} \Phi_i \Phi_j$.