

Vorlesung: Klassische Theoretische Physik II

M. Zirnbauer
Institut für Theoretische Physik
Universität zu Köln

Wintersemester 2015/16

Contents

6	Magnetostatik	3
6.1	Überblick	3
6.2	Visualisierung	3
6.3	Inneres Produkt	4
6.4	Lorentz-Kraft	5
6.5	Messvorschrift für B	5
6.6	Unendlich lange, gerade Stromlinie	6
6.7	Anschlussbedingungen an Grenzflächen	7
6.8	Magnetostatische Aufgaben mit Euklidischen Symmetrien	8
6.9	Messvorschrift für H	9
6.10	Dualität zwischen Elektro- und Magnetostatik	12
6.11	Laplace-Operator auf Formen	14
6.12	Vektorpotential und Coulomb-Eichung	15
6.13	Induktionskoeffizienten	16
7	Elektrodynamik: Grundgesetze	17
7.1	Induktionsgesetz	17
7.2	Ampere-Maxwell-Gesetz	18
7.3	Lie-Ableitung	19
7.4	Allgemeine Form des Induktionsgesetzes	21
7.5	Energiesatz	21
7.6	Spule in Bewegung: Relativitätsprinzip	22
7.7	Wellengleichung (für B) und Minkowski-Metrik	29
7.8	Bremsstrahlung einer Punktladung	31
7.9	Raum-Zeit-Formulierung der Elektrodynamik	31
7.10	Poincaré-Gruppe und Lorentz-Gruppe	32
7.11	Elektrodynamik in Materie	34

7.12	Skin-Effekt	40
7.13	Fourier-Transformation	41
7.14	Lösung der 1D Wellengleichung	43
7.15	Lösung der 3D Wellengleichung	45
8	Lagrange-Mechanik	46
8.1	Variationsrechnung	46
8.2	Lagrange-Systeme	48
8.3	Invarianz unter Punkttransformationen	51
8.4	Zwangsbedingungen	52
8.5	Begründung der Gebrauchsanweisung	56
8.6	Parametrische Resonanz	58
9	Hamiltonsche Formulierung der Mechanik	62
9.1	Legendre-Transformation	62
9.1.1	Verallgemeinerung auf Funktionen mehrerer Veränderlicher	64
9.2	Die kanonischen Gleichungen	65
9.3	Die Symplektische Gruppe $Sp(2f)$	68
9.4	Hamiltonsche Systeme	70
9.4.1	Der klassische Spin	71
9.4.2	Satz von Darboux	73
9.5	Kanonische Transformationen	74
9.6	Hamiltonsche Flüsse	76
9.7	Symmetrien und Erhaltungssätze	79
9.8	Die Poisson-Klammer	81
9.8.1	Koordinatendarstellung der Poisson-Klammer	82
9.8.2	Woher kommt die symplektische Struktur?	83
9.9	Liouvillescher Satz	84
9.10	Erzeugende Funktionen	85
9.11	Elektrodynamik als Lagrange-System	86
9.12	Elektrodynamik als Hamiltonsches System	87
9.13	Nachtrag zur Magnetostatik: Biot-Savart-Gesetz	89

Literatur:

H. Grauert, I. Lieb, *Differential- und Integralrechnung III*, Springer-Verlag (1968); IV. Kapitel
F. Scheck, *Mechanik*, Springer-Verlag (1988)
N. Straumann, *Klassische Mechanik*, Lecture Notes in Physics, vol. 289, Springer (1987)
V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag (1978)

6 Magnetostatik

6.1 Überblick

Akteure: magnetische Feldstärke B (2-Form vom geraden Typ),
 magnetische Erregung H (1-Form vom ungeraden Typ),
 elektrische Stromdichte j (2-Form vom ungeraden Typ).

Gesetze: $dB = 0$ ("keine magnetischen Monopole"),
 $dH = j$ ("Ampere'sches Gesetz"),
 $B = \mu_0 * H$ ("Materialgleichung").

Bemerkungen: 1) Ampere-G. nur gültig im statischen Limes ($\dot{D} = 0$).
 2) Ampere $\stackrel{d^2=0}{\leadsto} dj = 0$ ("Stromerhaltung").

6.2 Visualisierung

Wiederholung. Gitterkomplex K (Zellen mit innerer Orientierung),
 dualer Komplex \tilde{K} (Zellen mit äußerer Orientierung).













Tautologische Paarung: $C_k(K) \otimes C^k(K) \longrightarrow \mathbb{R}$,
 $c \otimes \omega \longmapsto \int_c \omega$.

Schnittpaarung: $C^{d-k}(\tilde{K}) \otimes C^k(K) \longrightarrow \mathbb{R}$ (hier: $d=3$),
 $\gamma \otimes \omega \longmapsto \int \gamma \wedge \omega$.

Kanonischer Isomorphismus $\mathcal{I}: C_k(K) \longrightarrow C^{d-k}(\tilde{K})$

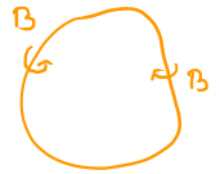
wird bestimmt durch die Forderung $\int_c \omega = \int \mathcal{I}(c) \wedge \omega$ (für alle Test- k -Koketten ω).

Tabelle (jetzt $d \equiv 3$).

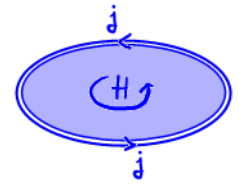
phys. Größe	Visualisierung	Bild	Rechnen	duals Bild	Kontinuum
D	$C_1(K)$		$C^2(\tilde{K})$		$\tilde{\Omega}^2(E_3)$
E	$C_2(\tilde{K})$		$C^1(K)$		$\Omega^1(E_3)$
ρ	$C_0(K)$		$C^3(\tilde{K})$		$\tilde{\Omega}^3(E_3)$
B	$C_1(\tilde{K})$		$C^2(K)$		$\Omega^2(E_3)$
H	$C_2(K)$		$C^1(\tilde{K})$		$\tilde{\Omega}^1(E_3)$
j	$C_1(K)$		$C^2(\tilde{K})$		$\tilde{\Omega}^2(E_3)$

Veranschaulichung der magnetostatischen Gesetze.

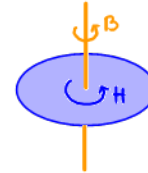
$dB = 0$: die 1-Kette $B \in C_1(\mathbb{R}^3)$ ist geschlossen (randlos); oder :
 $\text{div } \vec{B} = 0$
 magnetische Flusslinien haben keinen Anfang und kein Ende.



$dH = j$: die 2-Kette $H \in C_2(K)$ der magnetischen Erregung wird berandet
 $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$
 von der 1-Kette $j \in C_1(K)$ der elektrischen Stromdichte.



$B = \mu_0 * H$: die (Fluss-)linien von B stehen senkrecht auf den
 $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$
 (Erregungs-)flächen von H .



Bemerkung. Die Geometrie des Raumes geht nur in die Materialgleichung ein.

6.3 Inneres Produkt

1-Form $\alpha = \sum \alpha_i dx^i$
 Vektorfeld $v = \sum v^i \partial_i$ } Kontraktion zu Funktion $\alpha(v) = \sum \alpha_i v^i$.

Neue Notation: $\alpha(v) \equiv \iota(v) \alpha$ und

Erweiterung zu linearem Operator $\iota(v) : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$

als Anti-Derivation (d.h. Leibnizregel mit alternierendem Vorzeichen):

$$\iota(v) (\alpha \wedge \beta) = (\iota(v) \alpha) \wedge \beta + (-1)^{\deg(\alpha)} \alpha \wedge (\iota(v) \beta)$$

Beispiel. $B = \sum_{i < j} B_{ij} dx^i \wedge dx^j = \frac{1}{2} \sum_{i,j} B_{ij} dx^i \wedge dx^j$ ($B_{ij} = -B_{ji}$).

$$\iota(v) B = \frac{1}{2} \sum_{i,j} B_{ij} (v^i dx^j - dx^i v^j) = \sum_j \left(\sum_i v^i B_{ij} \right) dx^j.$$

Regel. $\iota(v) \omega = \omega(v, \dots)$
 $\underbrace{\hspace{2cm}}_{k-1 \text{ freie Argumente (k-Form } \omega)}$

Aufgabe. Visualisierung des Operators $\iota(v)$ im Kettenbild.

6.4 Lorentz-Kraft

Ladung q am Ort p mit Geschwindigkeit v erfährt die (Lorentz-) Kraft

$$\vec{F} = q (\vec{E}_p - \iota(v) \vec{B}_p). \quad \vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

In (irgendwelchen) Koordinaten:

$$\left. \begin{aligned} B &= \sum_{i < j} B_{ij} dx^i \wedge dx^j \\ E &= \sum_j E_j dx^j \end{aligned} \right\} \vec{F}_j = q (E_j(p) - \sum_i v^i B_{ij}(p)).$$

Bemerkung. $\iota(v)B = 0$, falls v parallel zu den Flusslinien von B .

Frage: Wie steht's hier mit dem (uns aus der Mechanik bekannten) Relativitätsprinzip?

A: Das Relativitätsprinzip gilt (allerdings Lorentz statt Galilei) und hat folgende Konsequenz:

Inertialsystem/Beobachter 1:

$v=0$ (Ladung ruht), $E^{(1)} = 0$,

$B^{(1)}$ zeitunabhängig (Flusslinien in Ruhe)

$\leadsto F^{(1)} = 0$ (Kraft gleich Null)

Inertialsystem/Beobachter 2:

Ladung (und magn. Flusslinien) in Bewegung mit Geschwindigkeit v

Relativitätsprinzip $\leadsto F^{(2)} = 0 = F^{(1)}$ (Kraft immer noch Null)

$\Rightarrow E^{(2)} = \iota(v) B^{(2)}$.

Deutung (Vorwegnahme des Induktionsgesetzes): die bei der Bewegung magnetischer Flusslinien überstrichenen (infinitesimalen) Flächen sind (aktuelle) Flächenstücke der elektrischen Feldstärke.

6.5 Messvorschrift für B

Magnetische Feldstärke B , Fläche Σ mit innerer Orientierung,

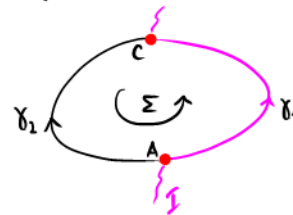


magnetischer Fluss durch Σ : $\Phi_m(\Sigma) = \int_{\Sigma} B$.

Messung von $\int_{\Sigma} B$.

1. Teile die Randlinie von Σ in zwei Hälften γ_1, γ_2 (gleich lang) mit $\partial\Sigma = \gamma_1 - \gamma_2$.

2. Verlege stromführendes Kabel (flexibel) längs γ_1 .



3. Bewege Kabel (bei festgehaltenem Teststrom $I \neq 0$ und festgehaltenen Positionen A, C — siehe Skizze)

vom Anfangsverlauf γ_1 längs Σ zum Endverlauf γ_2 und messe die dabei verrichtete Arbeit W .

Behauptung: $W/I = \int_{\Sigma} B$.

Beweis. Parametrisiere Σ orientierungstreu durch $[0,1]^2 \rightarrow E_3$, $(s,t) \mapsto \varphi(s,t)$,
 mit $\varphi(s,0) = \gamma_1(s)$; $\varphi(s,1) = \gamma_2(s)$; $\varphi(0,t) = A$; $\varphi(1,t) = C$.

Dabei sei $t \in [0,1]$ der Zeitparameter und $s \in [0,1]$ die Kabelkoordinate, d.h. $s \mapsto \varphi(s,t)$
 parametrisiert den Kabelverlauf zur Zeit t . Es gelte $\left| \frac{d}{ds} \varphi(s,t) \right| = v = \text{const.}$

Dann wirkt zur Zeit t auf das (infinitesimale) Kabelstück vom Punkt $\varphi(s,t)$ zum Punkt $\varphi(s+\delta s, t)$
 die (infinitesimale) Lorentzkraft $-\mathcal{I} \mathcal{B}_{\varphi(s,t)} \left(\frac{d}{ds} \varphi(s,t), \cdot \right) \delta s$.

Die Verschiebung dieses Kabelstücks um den (infinites.) Translationsvektor $\frac{d}{dt} \varphi(s,t) \delta t$ für den (infinites.)
 Zeitschnitt δt erfordert die Energie $+\mathcal{I} \mathcal{B}_{\varphi(s,t)} \left(\frac{d}{ds} \varphi(s,t), \frac{d}{dt} \varphi(s,t) \right) \delta s \delta t$.

Die gesamte zu verrichtende Arbeit W ergibt sich durch Integration:

$$W = \mathcal{I} \int_0^1 \int_0^1 \mathcal{B}_{\varphi(s,t)} \left(\frac{d}{ds} \varphi(s,t), \frac{d}{dt} \varphi(s,t) \right) ds dt = \int_{\Sigma} \mathcal{B} \quad \blacksquare$$

Bemerkung. Aus der Reparametrisierungsinvarianz des Integrals folgt, dass die Arbeit W nicht von der
 Schnelligkeit der Kabelbewegung abhängt und auch nicht von den Details des Kabelverlaufs für Zeiten
 $0 < t < 1$. Wichtig sind nur der Anfangs- und Endverlauf und dass die Kabelstellen A und C
 festgehalten werden.

6.6 Unendlich lange, gerade Stromlinie

Stromlinie $j = \mathcal{I} \gamma$ (Strom \mathcal{I} , Gerade γ).

Ansatz für die magnetische Erregung:

$$H = \frac{\mathcal{I}}{N} \sum_{i=1}^N \Sigma_i \quad \left(\begin{array}{l} \text{Halbebenen } \Sigma_i, \\ \text{alle mit Rand } \partial \Sigma_i = \gamma \end{array} \right).$$

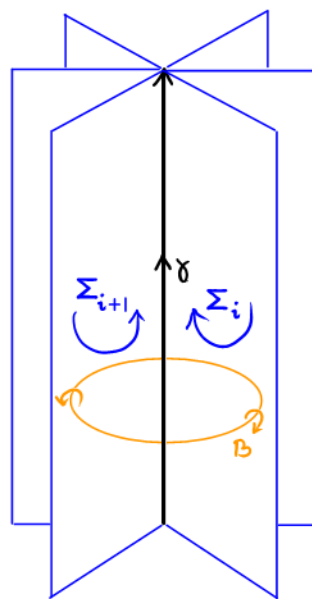
Dieser Ansatz erfüllt offensichtlich das Ampere-Gesetz.

Im Limes $N \rightarrow \infty$ (und bei rotationssymmetrischer Anordnung der Halbebenen) gilt auch
 $d\mathcal{B} = 0$, denn die durch $\mathcal{B} = \mu_0 * H$ ermittelten Linienstücke von \mathcal{B} fügen sich randlos
 zu geschlossenen (um die Stromachse zentrierten) Kreislinien zusammen.

Ausdrücke in Zylinderkoordinaten r, θ, z (für $\gamma = z$ -Achse):

$H = \frac{\mathcal{I}}{2\pi} [d\theta; R]$ (denn es sind N Halbebenen, jede mit Faktor $1/N$, über die Bogenlänge 2π zu verteilen).

$$\mathcal{B} = \mu_0 * H \rightsquigarrow \mathcal{B} = \frac{\mu_0 \mathcal{I}}{2\pi r} dz \wedge dr.$$

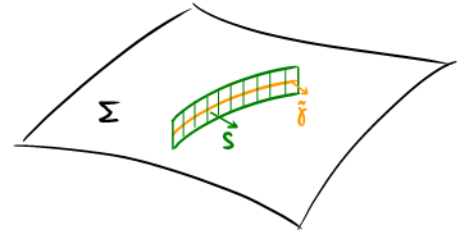


6.7 Anschlussbedingungen an Grenzflächen

Hier betrachten wir Situationen, wo Stromfluss nur innerhalb einer Fläche (nicht in offenen 3-dimensionalen Gebieten) stattfindet oder jedenfalls in guter Näherung so modelliert werden kann. Das führt zum Begriff der Linienstromdichte k (verhält sich zur elektrischen Stromdichte j so wie die Flächenladungsdichte σ zur elektrischen Ladungsdichte ρ).

(Test-)Fläche S verlaufe transversal zur (Grenz-)Fläche Σ (s. Bild).

Schnittlinie $\tilde{\gamma} = S \cap \Sigma$ trage äußere Orientierung (bzgl. Σ und induziert durch die äußere Orientierung von S).



Bestimmungsgleichung für k :
$$\int_{\tilde{\gamma}} k = \iint_S j.$$

Als Differentialform ist k eine 1-Form (auf Σ) vom ungeraden Typ.

Im Kettenbild ist k eine 1-Kette (in Σ) mit innerer Orientierung.

Anschlussbedingungen. Grenzfläche Σ verlaufe zwischen Gebiet/Medium 1 und Gebiet/Medium 2.

Die Fläche Σ trage die Linienstromdichte $k \in \tilde{\Omega}^1(\Sigma)$. Dann haben wir:

- (a) H_{tang} springt (durch Σ) um k ,
- (b) B_{tang} ist stetig durch Σ .

Bemerkung. $H_{\text{tang}}, B_{\text{tang}}$ meint jeweils den zu Σ tangentialen Anteil. Vermöge der Materialgleichung

$B = \mu_0 * H$ entspricht B_{tang} der Normalkomponente H_{perp} .

Im Folgenden erläutern wir die Anschlussbedingung (a).

Kettenbild.

$$\partial \sigma^{(1)} = \gamma = \partial \sigma^{(2)} \quad \left. \begin{array}{l} \begin{array}{c} \text{C} \sigma^{(1)} \\ \hline \text{C} \sigma^{(2)} \end{array} \\ \begin{array}{l} H^{(1)} = I^{(1)} \sigma^{(1)} \\ H^{(2)} = I^{(2)} \sigma^{(2)} \\ k = I \gamma \end{array} \end{array} \right\} \text{(Ampere:)} \quad I^{(1)} + I^{(2)} = I.$$

Spezialfälle:

$$\begin{array}{c} \text{C} H^{(1)} \\ \hline \text{C} H^{(2)} \end{array} \quad \begin{array}{l} H^{(1)} = I \sigma^{(1)} \\ k = I \gamma \\ H^{(2)} = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} H^{(1)} = 0 \\ \text{C} H^{(2)} \end{array} \quad \begin{array}{l} k = I \gamma \\ H^{(2)} = I \sigma^{(2)} \end{array}$$

Im Kalkül mit Differentialformen:

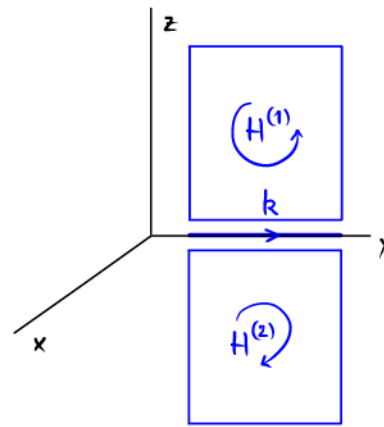
$H^{(i)}$:= Grenzwert von H bei Annäherung an die Fläche Σ vom Gebiet i ($i = 1, 2$).

Anschlussbedingung: $H^{(1)}, H^{(2)}$ unterscheiden sich um $\pm k$.

↖ Welches Vorzeichen?

Um das richtige Vorzeichen zu ermitteln, genügt es, eine möglichst einfache Situation zu betrachten:

Kartesische Koordinaten x, y, z ;
 Grenzfläche: $z=0$,
 Gebiet 1: $z > 0$,
 Gebiet 2: $z < 0$.



$$H^{(1)} = \tilde{H}_x^{(1)} [dx; \mathcal{R}] \quad (\mathcal{R} \equiv \text{rechte Hand}),$$

$$H^{(2)} = \tilde{H}_x^{(2)} [dx; \mathcal{L}] \quad (\mathcal{L} \equiv \text{linke Hand}) \\ = -\tilde{H}_x^{(2)} [dx; \mathcal{R}].$$

$$\approx H^{(1)} + H^{(2)} = (\tilde{H}_x^{(1)} - \tilde{H}_x^{(2)}) [dx; \mathcal{R}] \\ \text{GUZ} = dx \wedge dy \quad k = \tilde{k}_x [dx; \text{GUZ}] \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} H^{(1)} + H^{(2)} \\ \text{GUZ} \end{matrix}} \right\} \tilde{H}_x^{(1)} - \tilde{H}_x^{(2)} = \tilde{k}_x.$$

Konvention: $\left[\begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} ; \begin{matrix} \text{GUZ} \equiv \\ \text{"zuerst } x, \\ \text{dann } y" \end{matrix} \right] = \rightarrow$

Koordinatenfreie Formulierung.

Wähle eine Raum-Orientierung $Or_{E_3} \in \{\mathcal{R}, \mathcal{L}\}$ und setze $H^{(i)} = [\tilde{H}^{(i)}, Or_{E_3}]$.

Wähle eine Grenzflächen-Orientierung Or_{Σ} und setze $k = [\tilde{k}, Or_{\Sigma}]$.

Wähle einen zu Σ transversalen Vektor v mit $(Or_{\Sigma}; v) \hat{=} Or_{E_3}$ (z.B. $\begin{matrix} v \\ \uparrow \\ \text{Or}_{\Sigma} \end{matrix} \hat{=} \mathcal{R} = Or_{E_3}$).

Bemerkung. Die Größen $\tilde{H}^{(1)}$, $\tilde{H}^{(2)}$ und \tilde{k} sind (von der Orientierungswahl abhängige) 1-Formen auf Σ .

Setze $\begin{cases} \tilde{H}^{(+)} := \tilde{H}^{(1)} \text{ und } \tilde{H}^{(-)} := \tilde{H}^{(2)}, & \text{falls } v \text{ vom Gebiet 2 zum Gebiet 1 zeigt;} \\ \tilde{H}^{(+)} := \tilde{H}^{(2)} \text{ und } \tilde{H}^{(-)} := \tilde{H}^{(1)}, & \text{sonst.} \end{cases}$

Dann gilt: $\boxed{\tilde{H}^{(+)} - \tilde{H}^{(-)} = \tilde{k}}$.

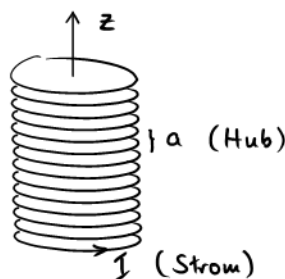
6.8 Magnetostatische Aufgaben mit Euklidischen Symmetrien

- Unendlich lang, gerade Stromlinie (✓ s. Abschn. 6.6)
- Unendlich lange, gerade Spule:

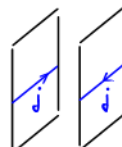
$\chi_{Zyl} :=$ charakteristische Funktion für das Zylindergebiet der Spule

$$H = \frac{I}{a} \chi_{Zyl} [dz; \mathcal{R}],$$

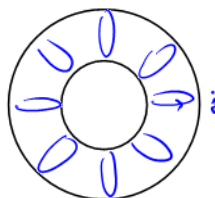
$$B = \frac{\mu_0 I}{a} \chi_{Zyl} dx \wedge dy.$$



- Aufgabe: zwei parallele stromführende Ebenen



- Aufgabe: Spule in Torusgeometrie



Bemerkung. Dass die obigen Aufgaben leicht in geschlossener Form lösbar sind, liegt in allen Fällen an der Existenz einer 1-Parameter-Symmetriegruppe von Euklidischen Bewegungen (also Translationen oder Drehungen), die den E_3 jeweils in 2-dimensionale Blätter einteilt (Ebenen bzw. Halbebenen) und zwar so, dass jede Stromlinie in 1 Blatt liegt. In einer solchen Situation lässt sich die 3-dimensionale magnetostatische Aufgabe auf eine einfachere Aufgabe in 2 Dimensionen (genauer: irgend-einem Blatt) reduzieren. (Q: Wie?)

Magnetostatik in 2 Dimensionen.

B ist immer noch 2-Form vom geraden Typ (wegen $\Omega^3(E_2) \equiv 0$ ist $dB=0$ automatisch erfüllt).

$$\left. \begin{array}{l} H: 0\text{-Form} \\ j: 1\text{-Form} \end{array} \right\} \text{ vom ungeraden Typ; } dH=j.$$

Besteht die elektrische Stromdichte aus einer einzigen Stromlinie $j = I\gamma$ (mit $d\gamma=0$), welche das (orientierte) Gebiet Σ umschließt (mit $\partial\Sigma = \gamma$), so ist H gleich I mal der (pseudoskalaren) charakteristischen Funktion zu Σ .

Aufgabe ($d=2$). Sei $j \in \tilde{\Omega}_c^1(E_2)$ eine glatte Stromdichte mit kompaktem Träger und $dj=0$.

Wie bestimmt man dann H aus $dH=j$ (zur Randbedingung $H=0$ im Unendlichen)?

(Hinweis: das Vorgehen ähnelt der Bestimmung eines Potentials zu einem konservativen Kraftfeld.)

6.9 Messvorschrift für H

Sei $\tilde{\gamma}$ eine Kurve im E_3 mit äußerer Orientierung.



Beachte: im Fall einer solchen Kurve kann man nicht von ihrem Anfang und/oder Ende sprechen.

Stattdessen hat $\tilde{\gamma}$ zwei Randpunkte, von denen einer rechtshändig und der andere linkshändig ist.

Das Kurvenintegral $\int_{\tilde{\gamma}} H$ heißt die magnetische Spannung längs $\tilde{\gamma}$.

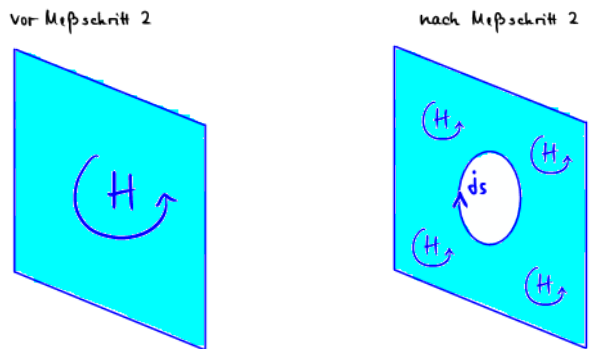
Aufgabenstellung: Messung der magnetischen Spannung $\int_{\tilde{\gamma}} H$.

Lösung (analog zur Messung von $\int_S D$ mittels Maxwell'scher Doppelplatten):

1. Supraleitendes Vollrohr (dünn) der Kurve $\tilde{\gamma}$ nachbilden.
2. Das SLVR entmagnetisieren ("zero-field quench") und an den Messort $\tilde{\gamma}$ bringen.
3. Den um das SLVR zirkulierenden Gesamtstrom I_s messen.

(mit Vorzeichenkonvention für I_s gemäß der Zirkulation von $\tilde{\gamma}$)

Erläuterungen. Wir nehmen hier an, dass sich der Supraleiter in der sog. Meißner-Phase befindet. (Das heißt insbesondere, dass die Stärke des zu messenden Magnetfelds einen bestimmten kritischen Wert nicht überschreiten darf.) An der Oberfläche des Supraleiters fließt dann (bis zu einer gewissen Eindringtiefe) ein elektrischer (Supra-)Strom. Aus energetischen Gründen stellt sich die Supra-Stromdichte j_s genau so ein, dass die magnetische (Gesamt-)Erregung im Inneren des Supraleiters zu Null gemacht wird:



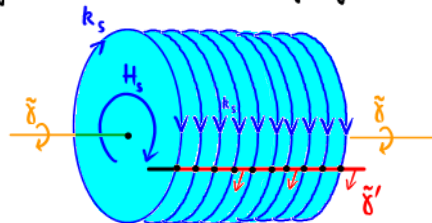
Behauptung: $-\mathcal{I}_s = \int_{\tilde{\gamma}} H$.

Beweis. Notation: $H \equiv H^{(\text{vorher})}$, die zu messende magnetische Erregung.
 $H_s =$ der vom Suprastrom verursachte Beitrag zur magnetischen Erregung.
 $H + H_s =$ die gesamte magnetische Erregung.

Im Inneren des Supraleiters (die Kurve $\tilde{\gamma}$ eingeschlossen) gilt $H + H_s = 0$.

Es folgt $\int_{\tilde{\gamma}} H = - \int_{\tilde{\gamma}} H_s = - \int_{\tilde{\gamma}'} k_s = -\mathcal{I}_s$.

vermöge der Anschlussbedingung zwischen H_s und der Linienstromdichte k_s auf der Oberfläche des Supraleiters.



Bemerkungen. Aus der Messvorschrift für H leitet man direkt das natürliche mathematische Modell für H ab: Als Summe vieler Teilspannungen ist die magnetische Spannung ein Integral. Damit das Kurvenintegral $\int_{\tilde{\gamma}} H$ unmittelbar definiert werden kann (ohne Hinzunahme von zusätzlicher Information wie Raugeometrie, die hier an sich nicht hingehört*), muss H eine 1-Form sein. Zur eindeutigen Festlegung des Vorzeichens für den gemessenen Stroms \mathcal{I}_s benötigt man eine Orientierungskonvention; diese wird mit der Wahl eines Zirkulationsinnes für die Kurve $\tilde{\gamma}$ getroffen. Die Integrationslinie $\tilde{\gamma}$ trägt demnach notwendig eine äußere/transversale Orientierung. Sinnvoll als Integranden für Integrale $\int_{\tilde{\gamma}} H$ mit transversal orientierter Kurve $\tilde{\gamma}$ sind nur 1-Formen vom ungeraden Typ. Es folgt $H \in \tilde{\Omega}^1(E_3)$.

*) William v. Ockham (13. Jhd.): PRINCIPIA NON MULTIPLICANDA SUNT PRAETER NECESSITATEM.

Natur der elektromagnetischen Feldgrößen. Mit der gleichen Argumentationsweise wie für H folgert man aus den Messvorschriften für E, D, B, H die natürlichen Modelle für alle Feldgrößen:

$$E \in \Omega^1(E_3) \quad (\text{gerade 1-Form}), \quad D \in \tilde{\Omega}^2(E_3) \quad (\text{ungerade 2-Form}),$$

$$B \in \Omega^2(E_3) \quad (\text{gerade 2-Form}), \quad H \in \tilde{\Omega}^1(E_3) \quad (\text{ungerade 1-Form}).$$

Physikalische Dimensionen.

1. Absolute Dimension. Als sofortige Konsequenz der jeweiligen Messvorschrift hat man

$$[E] = \frac{\text{Energie}}{\text{Ladung}}, \quad [D] = \text{Ladung},$$

$$[B] = \frac{\text{Energie}}{\text{Strom}}, \quad [H] = \text{Strom}.$$

2. Relative Dimension. Wähle Koordinatenfunktionen x_i mit phys. Dimension Länge.

$$E = \sum_{i=1}^3 E_i dx^i \sim [E_i] = \frac{\text{Energie}}{\text{Ladung} \cdot \text{Länge}}, \quad D = \sum_{i<j} D_{ij} [dx^i \wedge dx^j; Or] \sim [D_{ij}] = \frac{\text{Ladung}}{\text{Fläche}},$$

$$B = \sum_{i<j} B_{ij} dx^i \wedge dx^j \sim [B_{ij}] = \frac{\text{Energie}}{\text{Strom} \cdot \text{Fläche}}, \quad H = \sum_{i=1}^3 H_i [dx^i; Or] \sim [H_i] = \frac{\text{Strom}}{\text{Länge}}.$$

Aufgabe. Was ist hier zu ändern, wenn die Raumdimension nicht gleich 3 ist?

3. Einheiten.

$$[\epsilon_0] = \frac{[D_{ij}]}{[E_k]} = \frac{\text{Ladung}^2}{\text{Energie} \cdot \text{Länge}} = \frac{\text{Kapazität}}{\text{Länge}}, \quad \epsilon_0 = 8,854 \dots \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Jm}},$$

$$[\mu_0] = \frac{[B_{ij}]}{[H_k]} = \frac{\text{Energie}}{\text{Strom}^2 \cdot \text{Länge}} = \frac{\text{Induktivität}}{\text{Länge}}, \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{J}}{\text{A}^2 \text{m}}.$$

$$[(\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}] = \frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}}, \quad (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2} = 2,998 \dots \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (\text{Lichtgeschwindigkeit})$$

$$[(\epsilon_0 / \mu_0)^{1/2}] = \frac{\text{Ladung}^2}{\text{Energie} \cdot \text{Zeit}} = \frac{\text{Strom}}{\text{Spannung}}, \quad (\epsilon_0 / \mu_0)^{1/2} = 0,2654 \dots \cdot 10^{-2} \frac{\text{C}^2}{\text{Js}}.$$

Mittelung. Leitwert-Quantum (\rightarrow Quanten-Halleffekt) $:= \frac{e^2}{h}$, wobei

$$e = 1,602 \dots \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad (\text{Ladung des Elektrons})$$

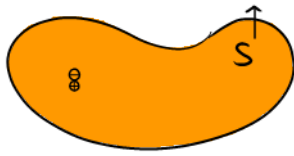
$$h = 6,626 \dots \cdot 10^{-34} \text{ Js} \quad (\text{Planck'sches Wirkungsquantum}).$$

$$(\epsilon_0 / \mu_0)^{1/2} = \frac{e^2}{h} \cdot \frac{1}{2\alpha}, \quad \alpha \approx \frac{1}{137} \quad (\text{Feinstrukturkonstante}).$$

6.10 Dualität zwischen Elektro- und Magnetostatik

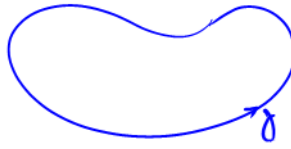
Beispiel.

Elektrostatik:
Dipolschicht



Berechne E, D

Magnetostatik:
Stromschleife



Berechne B, H

elektrische Ladungsdichte der Dipolschicht:
 $\rho = v d * S$ mit $v = \text{Dipolmoment/Fläche}$

elektrische Stromdichte der Stromschleife:
 $j = I \gamma$ mit $\gamma = \partial \Sigma$, $S = [\Sigma; Or]$
(hier: $Or = R$)

Ansatz: $D = v * S + D_1$.

Aus $dD = \rho$ folgt $dD_1 = 0$.

$\epsilon_0 E = *D = vS + *D_1$.

Aus $dE = 0$ folgt $d * D_1 = -v ds$

$dB = 0$.

$\mu_0 H = *B$

Aus $dH = j$ folgt $d * B = \mu_0 I \partial \Sigma$

Dieselben Gleichungen haben dieselben Lösungen. Deshalb folgt

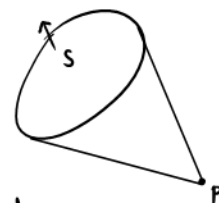
$$-\frac{1}{v} D_{\text{Dipolschicht}} = \frac{1}{\mu_0 I} [B_{\text{Stromschleife}}; Or]$$

Beachte: dS für S als 1-Form entspricht genau (ohne Vorzeichenwechsel) ∂S für S als 2-Kette, denn $\int_{\partial S} \omega = \int_S d\omega \stackrel{!}{=} \int I(S) \wedge d\omega \stackrel{P.S.}{=} \int dI(S) \wedge \omega$, also $I(\partial S) = dI(S)$.

WARNUNG: meist sind wir schlampig und unterscheiden nicht zwischen c und $I(c)$.

Rechnung. Wir berechnen das elektrische Skalarpotential Φ der Dipolschicht mit der aus der Elektrostatik bekannten Lösungsformel für die Poisson-Gleichung (zu $\Phi(\infty) = 0$):

$$\begin{aligned} \Phi(p) &= \int_{E_3} \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0 r_p} = \int_{E_3} \frac{v d * I(S)}{4\pi\epsilon_0 r_p} = \frac{v}{4\pi\epsilon_0} \int_{E_3} \frac{1}{r_p} d * I(S) = \frac{v}{4\pi\epsilon_0} \int_{E_3} \left(-d \frac{1}{r_p}\right) \wedge * I(S) \\ &= \frac{v}{4\pi\epsilon_0} \int_{E_3} I(S) \wedge * \frac{dr_p}{r_p^2} = \frac{v}{4\pi\epsilon_0} \int_S * \frac{dr_p}{r_p^2} = \frac{v}{\epsilon_0} \int_S \frac{I_p}{4\pi} \end{aligned}$$



Somit ist $\Phi(p)$ gleich der elektrischen Spannung $\frac{v}{\epsilon_0}$ mal dem Raumwinkel $/4\pi$, unter dem die Fläche S vom Punkt p aus gesehen wird.

Nach der obigen Dualität folgt, dass das magnetische (Pseudo-) Skalarpotential $\bar{\Psi}$ ($H = d\bar{\Psi}$ auf $E_3 \setminus S$) der Stromschleife $j = I \gamma$ gleich I mal dem Raumwinkel $/4\pi$ ist, unter dem die Schleife γ gesehen wird.

Verallgemeinerung. Sei ρ eine singuläre Ladungsdichte mit $\int_{E_3} \rho = 0$.

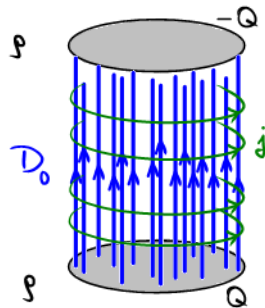
(Neben der Dipolschicht von oben verweisen wir auf weitere Beispiele, die unten gebracht werden.)

Dann wählen wir eine möglichst einfache (typisch singuläre) elektrische Erregung D_0 , die das Gaußsche Gesetz erfüllt: $dD_0 = \rho$. Für das Restfeld $D_1 = D - D_0$ folgen die Gleichungen $dD_1 = 0$ und $d * D_1 = d * (D - D_0) = \epsilon_0 dE - d * D_0 = -d * D_0$.

Dieses Gleichungssystem $dD_1 = 0$, $dE_1 = -d * D_0 / \epsilon_0$ ($E_1 \equiv * D_1 / \epsilon_0$) wird mit der Identifikation $D_1 \equiv g [B_1; Or]$ (nach Wahl einer Orientierung Or und einer Konstanten g der Dimension $\frac{\text{Strom}}{\text{Spannung}}$) zu $dB = 0$, $dH = j$ mit $j = -(g\mu_0)^{-1} [d * D_0; Or]$, also einer magnetostatischen Aufgabe.

Beispiel.

Kondensator aus zwei dünnen Platten



Gegenrichtung. Das Dualitätsargument funktioniert natürlich auch in der anderen Richtung.

Ausgehend vom Ampere-Gesetz $dH = j$ mit einer singulären Stromdichte j (Beispiel aus den Übungen zur Vorlesung: dünne lange Spule, $j = m d * \tilde{\gamma}$) wählt man eine singuläre magnetische Erregung H_0 mit der Eigenschaft $dH_0 = j$ (im Beispiel: $H_0 = m * \tilde{\gamma}$). Für das Restfeld $H_1 = H - H_0$ folgt $dH_1 = 0$ und $dB_1 = -\mu_0 d * H_0$ ($B_1 \equiv \mu_0 * H_1$).

Nach Wahl einer Raum-Orientierung Or und einer Konstanten g setzt man wieder

$$D \equiv g [B_1; Or], \quad E = * D / \epsilon_0 \quad \text{und erhält das elektrostatische Problem}$$

$$dE = 0 \quad \text{und} \quad dD = \rho \quad \text{mit} \quad \rho = -\mu_0 g [d * H_0; Or].$$

So sieht man z.B., dass das Außenfeld (B_1, H_1) der langen dünnen Spule gleich dem Feld von zwei, an den Spulenden positionierten Punktladungen ist ($g = q [d \tilde{\gamma}; Or]$, $q = -\mu_0 g m$).

6.11 Laplace-Operator auf Formen

Auf den k -Formen in einem Raum M mit Hodge-Operator $*$ haben wir das Skalarprodukt

$$(\alpha, \beta) = \int_M \alpha \wedge * \beta.$$

(Ist M nichtkompakt, so verlangen wir, dass mindestens einer der Faktoren α, β kompakten Träger hat.)

Hiermit definieren wir den zur äußeren Ableitung $d: \Omega^{k-1}(M) \rightarrow \Omega^k(M)$

adjungierten Operator $-\delta: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$ (für $k \geq 1$) in der bekannten Weise:

$$(\alpha, d\omega) = (-\delta\alpha, \omega) \quad \text{für alle } \alpha \in \Omega^k(M) \text{ und } \omega \in \Omega^{k-1}(M).$$

$$\text{Explizit: } (-\delta\alpha, \omega) = \int_M \alpha \wedge * d\omega = \int_M d\omega \wedge * \alpha = -(-1)^{\deg(\omega)} \int_M \omega \wedge d* \alpha$$

$$= (-1)^k \int_M *^{-1} d* \alpha \wedge * \omega = (-1)^k (*^{-1} d* \alpha, \omega).$$

Hieraus lesen wir ab: $\delta = (-1)^{k-1} *^{-1} d *$ (auf k -Formen).

Der so definierte Operator δ heißt Ko-Ableitung. Beachte: $d^2 = 0 \leadsto \delta^2 = 0$.

Definition (Laplace-Operator auf Differentialformen):

$$\Delta = \delta d + d \delta.$$

Behauptung. In kartesischen Koordinaten x^i gilt:

$$\Delta \left(\sum \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \right) = \sum \left(\Delta \omega_{i_1 \dots i_k} \right) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Beweis für $k=1$, $M = E_3$.

$$d(f dx) = (\partial_y f) dy \wedge dx + (\partial_z f) dz \wedge dx.$$

$$\begin{aligned} \delta d(f dx) &= - * d \left(\partial_y f [dz, L] + \partial_z f [dy, R] \right) \\ &= - * \left(\partial_x \partial_y f [dx \wedge dz, L] + \partial_y^2 f [dy \wedge dz, L] \right. \\ &\quad \left. + \partial_z^2 f [dz \wedge dy, R] + \partial_x \partial_z f [dx \wedge dy, R] \right) \\ &= - (\partial_x \partial_y f) dy + (\partial_y^2 f) dx + (\partial_z^2 f) dx - (\partial_x \partial_z f) dz. \end{aligned}$$

$$\delta(f dx) = + * d * (f dx) = * d(f [dy \wedge dz, R]) = \partial_x f.$$

$$d\delta(f dx) = (\partial_x^2 f) dx + (\partial_y \partial_x f) dy + (\partial_z \partial_x f) dz.$$

$$\text{Es folgt } \Delta(f dx) = (\delta d + d\delta)(f dx) = (\partial_x^2 f + \partial_y^2 f + \partial_z^2 f) dx = (\Delta f) dx. \quad \blacksquare$$

Vergleich mit Vektorkalkül.

$$k=0 \text{ (Funktionen)}: \Delta = \delta d = \operatorname{div} \circ \operatorname{grad}.$$

$$k=1 \text{ (1-Formen)}: \Delta = \delta d + d\delta \text{ entspricht } \Delta = -\operatorname{rot} \circ \operatorname{rot} + \operatorname{grad} \circ \operatorname{div} \text{ (auf Vektorfeldern).}$$

6.12 Vektorpotential und Coulomb-Eichung

Löse jetzt $dB=0$ durch den Ansatz $B=dA$ (A "Vektorpotential" oder Eichpotential).

Die 1-Form A ist nicht eindeutig bestimmt: $B=dA=d(A+df)$, Funktion f beliebig.

$$\text{Coulomb-Eichung: } \delta A = 0 \quad (\Leftrightarrow d * A = 0). \\ \text{div } \vec{A} = 0$$

Aufgabe. Warum läßt sich zu vorgebenem B immer ein A finden, das die Coulomb-Eichung erfüllt?

Poisson-Gleichung für A.

$$\mu_0 j = \mu_0 dH = d * B = d * dA \sim \mu_0 * j = * d * dA = -\delta dA.$$

Erfüllt A die Coulomb-Eichbedingung $\delta A = 0$, so kann $-d\delta A = 0$ auf der rechten Seite hinzugefügt werden,

und es folgt

$$\boxed{-\Delta A = \mu_0 * j}. \quad (\text{Vgl. mit Elektrostatik: } -\Delta \Phi = * \rho / \epsilon_0.)$$

In kartesischen Koordinaten ($A = \sum A_i dx_i$) zerfällt diese Gleichung gemäß $\Delta \sum A_i dx_i = \sum (\Delta A_i) dx_i$

in 3 Poisson-Gleichungen für die Komponenten von A: $-\Delta A_i = \mu_0 (*j)_i \quad (i=1,2,3).$

$$\text{Lösung: } A_i(p) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{E_3} \frac{(*j)_i}{r_p} d\text{vol}.$$

Aufgabe. In kartesischen Koordinaten gilt $(*j)_i d\text{vol} = j \wedge dx_i$.

$$\text{Alternative Lösungsformel: } A_i(p) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{E_3} \frac{j \wedge dx_i}{r_p}.$$

$$\text{Spezialfall. Für eine Stromlinie } j = I \gamma \text{ hat man } A_i(p) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{dx_i}{r_p}.$$

Multipolentwicklung. Geht analog zum Vorgehen in der Elektrostatik: Stromdichte lokalisiert in Gebiet U;

U zentriert um Koordinatenursprung; Beobachtungspunkt p weit außerhalb von U.

$$A_k(p) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_U \left(\frac{1}{r(p)} + \sum_l \frac{x_l(p)}{r(p)^3} x_l(\cdot) + \dots \right) j \wedge dx_k = 0 + \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_l \frac{x_l(p)}{r(p)^3} \int_U j \wedge x_l dx_k + \dots \\ \text{wegen } \int j \wedge dx_k = - \int x_k dj = 0$$

$$\text{Ergebnis: } A_k = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_l \frac{x_l}{r^3} m_{lk} + \dots \quad \text{mit } m_{lk} = \int_U j \wedge x_l dx_k = -m_{kl}.$$

Der schiefsymmetrische Tensor zweiter Stufe $m_{kl} = -m_{lk}$ heißt das magnetische Dipolmoment der Stromverteilung j.

(Er ähnelt in seiner mathematischen Natur einem Drehimpuls.)

Aufgabe. Hat j die physikalische Bedeutung einer Massenstromdichte, so sind $L_{ke} = \int j \wedge x_k dx_e$ die Komponenten des Drehimpulses (als Element von $\text{Alt}^2(\mathbb{R}^3)$) der Massenstromverteilung.

(Hinweis: Massendichte ρ , Massenstromdichte j und Geschwindigkeitsfeld v hängen zusammen über $j = \rho(v)$.)

6.12 Induktionskoeffizienten

Mitteilung. Die im Magnetfeld enthaltene Energie ist

$$E_{\text{magn}} = \frac{1}{2} \int B \wedge H \quad (\text{Beweis benützt Induktionsgesetz; wird später nachgeholt}).$$

Wähle ein Vektorpotential ($B = dA$) $\leadsto E_{\text{magn}} = \frac{1}{2} \int dA \wedge H = \frac{1}{2} \int A \wedge dH = \frac{1}{2} \int A \wedge j$.

$$(\text{Vgl. mit } E_{\text{el}} = \frac{1}{2} \int E \wedge D = \frac{1}{2} \int \Phi \rho.)$$

Für ein System von N Stromlinien ($j = \sum_{k=1}^N I_k \gamma_k$) erhält man

$$E_{\text{magn}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N I_k \int_{\gamma_k} A.$$

Nun drücken wir A (in Coulomb-Eichung) als Summe über die N Stromlinien aus:

$$A_i(p) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{\ell=1}^N I_\ell \int_{\gamma_\ell} \frac{dx_i}{r_p}.$$

Einsetzen in den obigen Ausdruck ergibt dann eine Summe über Paare γ_k, γ_ℓ von Stromlinien.

Zur Notation des Doppelintegrals ($\gamma_k \times \gamma_\ell \subset E_3 \times E_3$) verwenden wir kartesische Koordinaten x_i

im linken Faktor E_3 und x'_i im rechten Faktor E_3 . Es folgt

$$E_{\text{magn}} = \frac{1}{2} \sum_{k,\ell} L_{ke} I_k I_\ell \quad \text{mit} \quad L_{ke} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\gamma_k} \int_{\gamma_\ell} \frac{\sum dx_i dx'_i}{\sqrt{\sum (x_i - x'_i)^2}} \quad (\text{Induktionskoeffizient}).$$

Beachte: die Selbstinduktionskoeffizienten L_{ee} divergieren in der mathematischen Idealisierung von j als System von Stromlinien. (In diesem Fall muss die endliche Dicke des stromführenden Drahts berücksichtigt werden.)

7 Elektrodynamik: Grundgesetze

7.1 Induktionsgesetz


Magnetische Feldstärke $B \in \Omega^2(E_3)$, $dB = 0$, $[B] = \frac{\text{Energie}}{\text{Strom}}$.

Elektrische Feldstärke $E \in \Omega^1(E_3)$ (Statik: $dE = 0$), $[E] = \frac{\text{Energie}}{\text{Ladung}}$.

Induktionsgesetz (differenzielle Form): $dE = -\dot{B}$ (Faraday, 1831).
 $\text{rot } \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$

In beliebigen Koordinaten ξ_i :

$$\left. \begin{aligned} B &= \sum_{i < j} B_{ij} d\xi_i \wedge d\xi_j \\ E &= \sum_i E_i d\xi_i \end{aligned} \right\} \partial_i E_j - \partial_j E_i = -\dot{B}_{ij}$$

Integrierte Form: $\oint_{\partial\Sigma} E = - \iint_{\Sigma} \dot{B}$ 

In Worten: die elektrische Ringspannung längs $\partial\Sigma$ ist gleich minus der Zeitableitung des magnetischen Flusses durch Σ .

Im Kettenbild (im E_3): 1-Kette B , 2-Kette E (jeweils mit äußerer Orientierung).

"Der Rand der 2-Kette von E ist gleich dem Negativen der Zeitableitung der 1-Kette von B ":
 $\partial E = -\dot{B}$.

Illustration.

$\partial S = \tilde{\gamma}_i - \tilde{\gamma}_f$  $\dot{B} = \frac{\phi_m}{\Delta t} (\tilde{\gamma}_f - \tilde{\gamma}_i)$ $E = \frac{\phi_m}{\Delta t} S$ $\partial E = -\dot{B}$

Interpretation. Vergleich mit der Kontinuitätsgleichung $\frac{d}{dt} \iint_U \rho = - \oint_{\partial U} j$ ("elektrische Ladung ist erhalten")

suggeriert die Interpretation des Induktionsgesetzes als Kontinuitätsgleichung $\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} B = - \oint_{\partial\Sigma} E$

mit der Deutung (in Kombination mit $dB = 0$): "magnetischer Fluss ist erhalten",

in Bekräftigung der bildlichen Vorstellung, dass B aus magnetischen Flusslinien aufgebaut ist.

Beachte: $\dot{B} = -dE \wedge \quad dB = \text{const.}$

Mehr zum Induktionsgesetz in Abschnitt 7.4.

7.2 Ampere-Maxwell-Gesetz

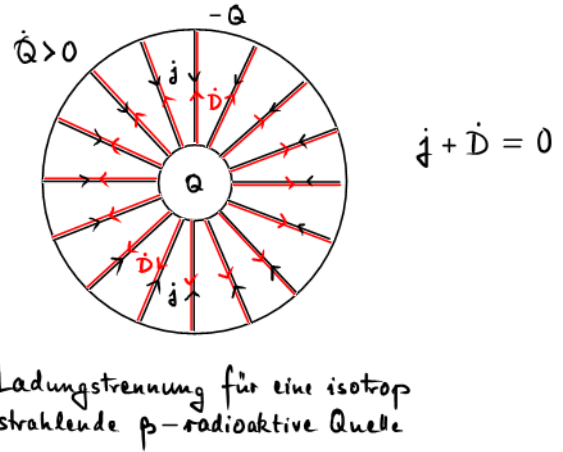
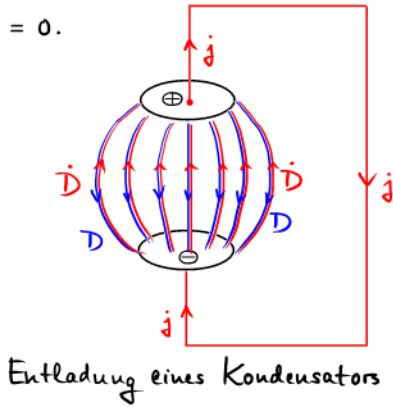
Ampere-Gesetz $dH = j$ erfordert $dj = d^2H = 0$ und wird inkonsistent, wenn $dj = -\dot{j} \neq 0$.

Beobachtung: $dj = -\dot{j} \stackrel{\text{Gauss-G.}}{=} -d\dot{D} \approx d(j + \dot{D}) = 0$.

Beachte $j, \dot{D} \in \tilde{\Omega}^2(E_3)$, $[j] = [\dot{D}] = \text{Strom}$.

Beispiele

für $d(j + \dot{D}) = 0$.



Ampere-Maxwell-Gesetz (differentialische Form): $dH = j + \dot{D}$ (Maxwell, ca. 1865).

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \dot{\vec{D}}$$

Wichtige Konsequenz (siehe später): Existenz elektromagnetischer Wellen (ohne Äther, Materie, ...).

In beliebigen Koordinaten ξ_i (mit $H = \sum_i H_i [d\xi_i; 0r] \in \tilde{\Omega}^1(E_3)$ und analog für j, \dot{D}) hat man $\partial_i H_j - \partial_j H_i = j_{ij} + \dot{D}_{ij}$ (wähle in den Ausdrücken für H, j, \dot{D} die gleiche Raumorientierung).

Integrierte Form: $\oint_{\partial S} H = \iint_S (j + \dot{D})$.



In Worten: die magnetische Ringspannung längs ∂S ist gleich der Summe aus Ladungsstrom und Verschiebungsstrom ($= \iint_S \dot{D}$) durch S .

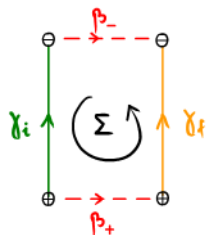
Kettenbild. 2-Kette H ; 1-Ketten j, \dot{D} (jeweils mit innerer Orientierung).

"Der Rand der 2-Kette von H ist gleich der (randlosen) 1-Kette der Summe von j und \dot{D} ":

$$\partial H = j + \dot{D}$$

Illustration.

$$\partial \Sigma = \delta_t - \delta_i + \beta_+ - \beta_-$$



$$H = \frac{q}{\Delta t} \Sigma$$

$$\dot{D} = \frac{q}{\Delta t} (\delta_t - \delta_i)$$

$$j = \frac{q}{\Delta t} (\beta_+ - \beta_-)$$

$$\partial H = j + \dot{D}$$

7.3 Lie-Ableitung

Gegeben sei Vektorfeld v auf Raum M .

Der Fluss des Vektorfeldes v ist die 1-Parametergruppe von Abbildungen $\varphi_t : M \rightarrow M$

$$(\varphi_{t=0} = \text{Id}, \varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t}) \text{ mit der Eigenschaft } \frac{d}{dt} \varphi_t(p) = v(\varphi_t(p)).$$

Erinnerung: Zurückziehen von k -Formen mittels einer Abbildung ψ .

Funktion f ($k=0$): $\psi^* f = f \circ \psi$, also $(\psi^* f)(p) = f(\psi(p))$.

1-Form E ($k=1$): $(\psi^* E)_p(u) = E_{\psi(p)}((D_p \psi)(u))$.

Es gilt $\psi^*(\alpha \wedge \beta) = (\psi^* \alpha) \wedge (\psi^* \beta)$.

Definition (Lie-Ableitung einer k -Form ω):

$$\mathcal{L}_v \omega = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t^* \omega$$

Aus der Relation $\psi^*(\alpha \wedge \beta) = (\psi^* \alpha) \wedge (\psi^* \beta)$ folgt sofort, dass \mathcal{L}_v eine Derivation ist, also der Leibniz-Produktregel genügt: $\mathcal{L}_v(\alpha \wedge \beta) = (\mathcal{L}_v \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge \mathcal{L}_v \beta$.

Cartan-Formel: $\mathcal{L}_v = i(v) \cdot d + d \cdot i(v)$

Beweisstrategie: Zeige, dass $i(v) \cdot d + d \cdot i(v)$ eine Derivation ist und auf Funktionen f und exakten 1-Formen dg mit \mathcal{L}_v übereinstimmt.

Kettenbild. Es gilt $\varphi_{-t}^* \mathcal{I}(c) = \mathcal{I}(\varphi_t(c))$.

Rechnerischer Nachweis:
$$\int_M \mathcal{I}(\varphi_t(c)) \wedge \omega \stackrel{!}{=} \int_{\varphi_t(c)} \omega = \int_c \varphi_t^* \omega = \int_M \mathcal{I}(c) \wedge \varphi_t^* \omega = \int_M \varphi_t^* (\varphi_{-t}^* \mathcal{I}(c) \wedge \omega) = \int_{\varphi_t(M)} \varphi_{-t}^* \mathcal{I}(c) \wedge \omega = \int_M \varphi_{-t}^* \mathcal{I}(c) \wedge \omega$$

Differenzieren nach t an der Stelle $t=0$ ergibt $-\mathcal{L}_v \mathcal{I}(c) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_{-t}^* \mathcal{I}(c) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathcal{I}(\varphi_t(c))$.

↳ Lie-Ableitung auf Ketten: $-\mathcal{L}_v c := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi_{\Delta t}(c) - c}{\Delta t} \equiv \dot{c}$.

Verifikation im Spezialfall $c = p$ (Punkt $p \in E_3$): $-\mathcal{L}_v p = -(i(v)d + d i(v)) p = -d i(v) p = \partial i(v) p = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(p + v \Delta t) - p}{\Delta t}$.

Anwendung: Magnetostatik.

	<div style="display: inline-block; text-align: center;"> ruhende Ionen ($v=0$) </div> <div style="display: inline-block; text-align: center; margin-left: 20px;"> Elektronen ($v \neq 0$) </div>	
elektrische Ladungsdichte	$\rho = \rho_+ + \rho_- = 0$	$(dD_{\pm} = \rho_{\pm})$.
elektrische Erregung	$D = D_+ + D_- = 0$	
elektrische Stromdichte	$j = i(v=0) \rho_+ + i(v) \rho_- = i(v) \rho_- \neq 0$.	

v Geschwindigkeitsvektorfeld für die 1-Kette von \mathcal{D}_- ("elektrische Flusslinien folgen den elektrischen Ladungen").

Alles sei stationär (↔ Magnetostatik): $\dot{\mathcal{D}}_- = -\mathcal{L}_v \mathcal{D}_- = 0$.

Behauptung: $H = -\iota(v) \mathcal{D}_-$ ist Lösung des Ampere-Gesetzes.

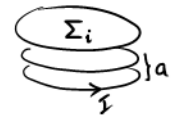
Beweis: $dH = -d\iota(v) \mathcal{D}_- = -\mathcal{L}_v \mathcal{D}_- + \iota(v) d\mathcal{D}_- = \dot{\mathcal{D}}_- + \iota(v) g_- = j$.

Beispiel 1: gerade Stromlinie $j = \mathcal{I} \gamma$ ($\gamma = z$ -Achse).

Zylinderkoordinaten. $\mathcal{D}_- = -\frac{Q}{2\pi a} [d\phi \wedge dz; \mathcal{R}] = -\mathcal{D}_+$ (elektrische Erregung einer Linienladung auf der z -Achse ↙)

$v = -|v| \partial_z$. $H = -\iota(v) \mathcal{D}_- = \frac{\mathcal{I}}{2\pi} [d\phi; \mathcal{R}]$, $\mathcal{I} = \frac{Q|v|}{a}$.

Beispiel 2: lange, gerade Spule (Symmetrieachse = z -Achse), $j = \sum_{i=1}^N \mathcal{I} \partial \Sigma_i$



Zylinderkoordinaten.

$\mathcal{D}_- = \frac{Q}{2\pi a} \chi_{\text{Zyl}} [d\phi \wedge dz; \mathcal{R}] = -\mathcal{D}_+$ (elektrische Erregung eines homogen negativ geladenen Zylindermantels (Elektronen) bei zusätzlicher Anwesenheit einer (fiktiven) Linien(gegen)ladung auf der Symmetrieachse).

Geschwindigkeitsvektorfeld $v = -\omega \partial_\phi$ (Kreisfrequenz ω).

$H = -\iota(v) \mathcal{D}_- = \frac{\mathcal{I}}{a} [dz; \mathcal{R}]$, $\mathcal{I} = \frac{Q\omega}{2\pi}$.

Bemerkung: die fiktive Gegenladung auf der z -Achse ist ohne Konsequenz für $j = \iota(v) g_-$, weil v dort Null ist.

Resümee magnetostatische Anwendungen (jetzt: vereinfachte Notation $g_- \equiv g$, $\mathcal{D}_- \equiv \mathcal{D}$).

Zu vorgegebenem j wähle g und v (motiviert durch die vorliegende physikalische Situation) so, dass gilt

$j = \iota(v) g$. Sei \mathcal{D} die elektrische Erregung des elektrostatischen Problems mit Ladungsdichte g . Setze v fort

zu einem Vektorfeld v mit der Eigenschaft $\mathcal{L}_v \mathcal{D} = 0$. Dann löst $H = -\iota(v) \mathcal{D}$ das Ampere-Gesetz.

Aufgabe. Unter welcher Bedingung an v erfüllt $B = \mu_0 * H = -\mu_0 * \iota(v) \mathcal{D}$ die Gleichung $dB = 0$?

Hinweis. Die durch $*\iota(v) = \varepsilon(\alpha)*$ definierte 1-Form α ist $\alpha = \langle v, \cdot \rangle$. (Hier bezeichnet

$\varepsilon(\alpha): \Omega^k \rightarrow \Omega^{k+1}$ den Operator der äußeren Multiplikation mit α , also $\varepsilon(\alpha)\beta := \alpha \wedge \beta$.)

Dynamische Verallgemeinerung. Sei $\mathcal{D}|_{t=0}$ eine elektrische Erregung zur Ladungsdichte $g|_{t=0}$

(also $d\mathcal{D} = g$ zur Anfangszeit $t=0$). Für ein Vektorfeld v mit Fluss φ_t setze

$\mathcal{D}|_t = \varphi_{-t}^* \mathcal{D}|_{t=0}$ und $g|_t = \varphi_{-t}^* g|_{t=0}$. Dann erfüllen $j = \iota(v) g$ und $H = -\iota(v) \mathcal{D}$

das Ampere-Maxwell-Gesetz $dH = j + \dot{\mathcal{D}}$.

7.4 Allgemeine Form des Induktionsgesetzes

Vektorfeld v mit Fluss φ_t ; zeitlich veränderliche Fläche $\Sigma_t = \varphi_t(\Sigma_0)$.

$\Phi(t) := \iint_{\Sigma_t} \mathcal{B}$ (magnetischer Fluss durch Σ_t).

$$\begin{aligned} \text{Berechne die Zeitableitung: } \frac{d}{dt} \Phi(t) &= \iint_{\Sigma_t} \dot{\mathcal{B}} + \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \iint_{\Sigma_0} \varphi_{t+s}^* \mathcal{B} = - \iint_{\Sigma_t} d\mathcal{E} + \iint_{\Sigma_0} \varphi_t^* (\mathcal{L}_v \mathcal{B}) \\ &= - \iint_{\Sigma_t} d\mathcal{E} + \iint_{\Sigma_t} d\iota(v)\mathcal{B} = - \oint_{\partial\Sigma_t} (\mathcal{E} - \iota(v)\mathcal{B}). \end{aligned}$$

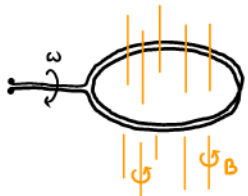
Ergebnis:
$$\frac{d}{dt} \Phi(t) = - \oint_{\partial\Sigma_t} (\mathcal{E} - \iota(v)\mathcal{B}).$$

In Worten: die Zeitableitung des magnetischen Flusses durch Σ_t ist gleich der elektromotorischen Kraft (E.M.K.) längs $\partial\Sigma_t$.

Bemerkung. Manche Lehrbücher nennen $E_{\text{ind}} \equiv \mathcal{E} - \iota(v)\mathcal{B}$ in diesem Kontext das "induzierte" elektrische Feld.

Diesem Sprachgebrauch wollen wir uns nicht anschließen, denn er verwischt den Unterschied zwischen elektrischer und magnetischer Feldstärke (siehe jedoch den Abschnitt über relativistische Kovarianz, wo wir lernen werden, dass und wie sich \mathcal{E} und \mathcal{B} bei einem Wechsel des Bezugssystems ineinander transformieren).

Beispiel: rotierende Leiterschleife im konstanten Magnetfeld ($\dot{\mathcal{B}} = 0$).



$$\Phi(t) = \Phi(0) \cos(\omega t + \varphi).$$

$$\text{Die E.M.K. } - \frac{d}{dt} \Phi(t) = - \oint \iota(v)\mathcal{B}$$

bewirkt einen Wechselstrom in der Leiterschleife.

Weiterführende Bemerkung. Die homogenen Maxwell-Gleichungen ($d\mathcal{E} = -\dot{\mathcal{B}}$ und $d\mathcal{B} = 0$, oder $d\mathcal{F} = 0$ für $\mathcal{F} = \mathcal{B} + \mathcal{E}ndt$) sind invariant unter beliebigen Diffeomorphismen von Raum und Zeit.

Deshalb bleibt der oben beschriebene Sachverhalt auch dann unverändert, wenn er in einem beschleunigten Bezugssystem betrachtet wird. Zum Beispiel hat man in dem mit der Leiterschleife rotierenden Bezugssystem $E_{\text{ind}} = -\iota(v)\mathcal{B} = 0$ (wegen $v=0$, $\Sigma_t = \text{konstant}$); dafür gilt jetzt $\mathcal{E} \neq 0$ (wegen $\dot{\mathcal{B}} \neq 0$).

7.5 Energiesatz

Im elektromagnetischen Feld steckt Energie.

$$\text{Energiedichte: } u = \frac{1}{2} (\mathcal{E} \wedge \mathcal{D} + \mathcal{B} \wedge \mathcal{H}) \in \tilde{\Omega}^3(E_3),$$

$$\text{Energiestromdichte: } s = \mathcal{E} \wedge \mathcal{H} \in \tilde{\Omega}^2(E_3) \quad (\text{Poynting-Form}).$$

$$\dot{u} = E \wedge \dot{D} + \dot{B} \wedge H = E \wedge (dH - j) + (-dE) \wedge H = -d(E \wedge H) - E \wedge j$$

In Abwesenheit von geladener Materie ($j=0$) hat man also $\dot{u} = -ds$.

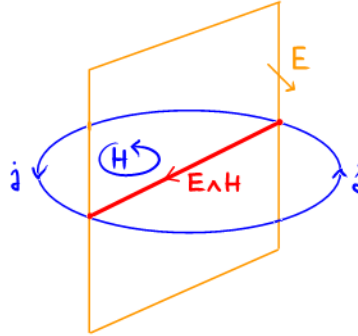
Durch Integration über ein beliebiges Gebiet $V \subset E_3$ folgt

$$\frac{d}{dt} \iiint_V u = - \oint_{\partial V} s \quad (\text{Integralform des Energiesatzes im Vakuum}).$$

In Anwesenheit von Materie ($j \neq 0$) gilt $\dot{u} + ds = -E \wedge j$. Integrierte Form:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V u + \oint_{\partial V} s = - \iiint_V E \wedge j \quad (\text{Bilanz der Feldenergie in } V = - \text{Leistung des Feldes an der Materie in } V).$$

Beispiel: Stromschleife im elektrischen Feld



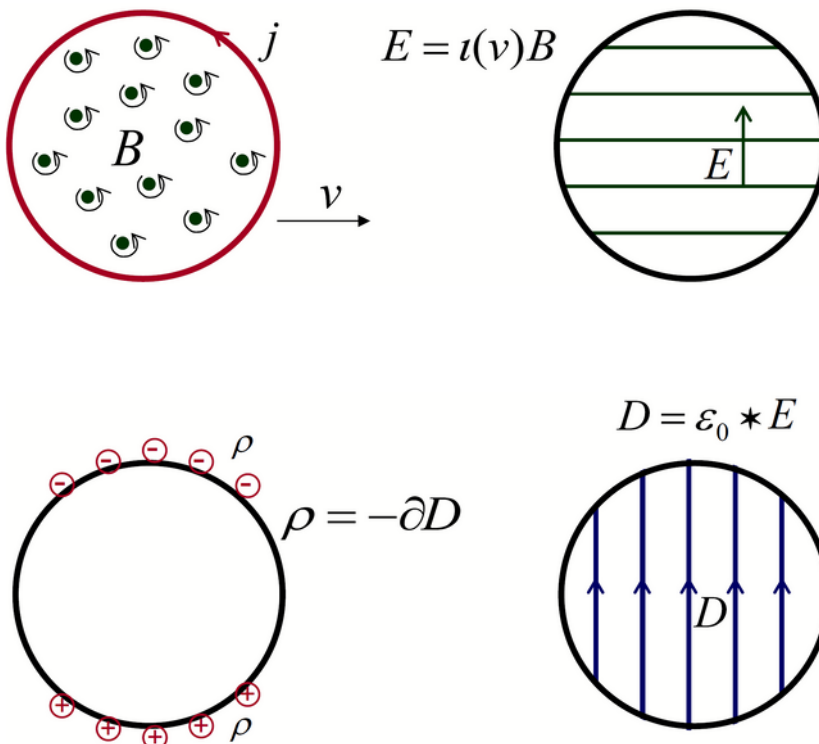
7.6 Spule in Bewegung: Relativitätsprinzip

Wir betrachten eine lange, gerade, stromführende Spule mit Zylindersymmetrie um die z -Achse.

Im Ruhesystem ($\mathcal{IS}-0$) der Spule haben wir: $B^{(0)} = b^{(0)} \chi^{(0)} dx \wedge dy$, $\chi^{(0)} = \Theta(L^2 - x^2 - y^2)$,
 $H^{(0)} = \frac{b^{(0)}}{\mu_0} \chi^{(0)} [dz; \mathcal{R}]$, $j^{(0)} = \frac{b^{(0)}}{\mu_0} [d\chi^{(0)} \wedge dz; \mathcal{R}]$.

Nun sei die Spule im Zustand der gleichförmigen geradlinigen Bewegung ($\mathcal{IS}-1$) mit Geschwindigkeit

$v = |v| e_x$. In Bildern:



In Formeln:

$$B = b \chi \, dx \wedge dy, \quad E = \gamma(v) B = |\gamma| b \chi \, dy,$$

$$H = \frac{1}{\mu_0} *B = \frac{b}{\mu_0} \chi \, [dz; \mathbb{R}], \quad D = \epsilon_0 *E = \epsilon_0 |\gamma| b \chi \, [dz \wedge dx; \mathbb{R}],$$

$$\rho = dD = \epsilon_0 |\gamma| b \frac{\partial \chi}{\partial y} \, d\text{vol}, \quad j = dH - \dot{D} = \frac{b}{\mu_0} [dx \wedge dz; \mathbb{R}] - \epsilon_0 |\gamma|^2 b \frac{\partial \chi}{\partial x} [dx \wedge dz; \mathbb{R}].$$

Bemerkungen. 1) Die charakteristische Funktion χ des Spulengebiets ist zeitabhängig.

Im Galilei-Modell der Raum-Zeit erwartet man $\chi = \Theta(L^2 - (x - vt)^2 - y^2)$. Die Magnetfeldstärke b muss konstant sein, weil man sonst Ladungen und Ströme im Inneren (!) des Spulengebiets hätte.

2) Die Beziehung $E = \gamma(v) B$ folgt aus dem Relativitätsprinzip. In der Tat wirkt auf eine in IS-0 ruhende Testladung q die Nullkraft $q(E^{(0)} - \gamma(0)B^{(0)}) = 0$ (wegen $E^{(0)} = 0$), und dann muss die Testladung nach dem Relativitätsprinzip auch in IS-1 kraftfrei sein; also $q(E - \gamma(v)B) = 0$.

3) Die Verschiebungsstromdichte berechnet sich wie folgt: $-\dot{D} = \mathcal{L}_v D = \epsilon_0 |\gamma| b (\mathcal{L}_v \chi) [dz \wedge dx; \mathbb{R}]$ und $\mathcal{L}_v \chi = \gamma(v) d\chi = |\gamma| \frac{\partial \chi}{\partial x}$.

Bei der Erstellung der obigen Formeln haben wir benutzt, dass die Naturgesetze (hier: alle Gleichungen der Elektrodynamik) nach dem Relativitätsprinzip in allen Inertialsystemen gleich lauten. Unser frappierendes Ergebnis ist, dass im IS-1 Ladungsdichte $\rho \neq 0$ vorliegt, obwohl die Ladungsdichte im IS-0 verschwindet. Was ist davon zu halten? Wir analysieren die Situation zunächst im Galilei-Modell der Raum-Zeit.

Dazu vorab zwei Vorbereitungen.

Vorbereitung 1. Bei Umsetzung des Relativitätsprinzips sind zwei Sichtweisen möglich (man spricht manchmal von passiver bzw. aktiver Transformation).

Zum einen können wir betonen, dass physikalische Prozesse (wie die Weltgeschichte unserer Spule) eine invariante, von allen Beobachtern losgelöste Existenz zukommt; insbesondere lassen sich physikalische Prozesse koordinatenfrei kartographieren und chronologisieren.

Zur Beschreibung der Spule im IS- i ($i=0,1$) wählen wir dann ein angepasstes Koordinatensystem $x^{(i)}, y^{(i)}, z^{(i)}, t^{(i)}$. Der Übergang von einem Inertialsystem ins andere ist lediglich eine Koordinatentransformation. Wir wissen, wie dieser Koordinatenwechsel im Galilei-Modell aussieht:

$$dx^{(0)} = dx^{(1)} - v dt^{(1)}, \quad dt^{(0)} = dt^{(1)}, \quad dy^{(0)} = dy^{(1)}, \quad dz^{(0)} = dz^{(1)}.$$

Diese Sichtweise ("passive Transformation") ist physikalisch natürlich.

Zum anderen können wir so vorgehen, dass wir ein einziges Koordinatensystem x, y, z, t festlegen und alles in diesem Koordinatensystem ausdrücken. Der Wechsel zwischen Inertialsystemen wird jetzt als Abbildung ("aktive Transformation") $\psi: M_4 \rightarrow M_4$ ($M_4 := E_3 \times \mathbb{R}$) aufgefasst, welche die ruhende Spule in die gleichförmig und geradlinig bewegte Spule überführt.

Der Abbildung $\psi: M_4 \rightarrow M_4$ von Weltpunkten (oder allgemeiner: von Weltketten) entspricht die Abbildung $\psi^{-1*}: \Omega^k(M_4) \rightarrow \Omega^k(M_4)$ (Rückzug mit der inversen Abbildung) von Koordinatenfunktionen ($k=0$) oder allgemeiner von k -Formen. Im Galilei-Modell haben wir:

$$\psi^{-1*}(dx) = dx - |v| dt, \quad \psi^{-1*}(dt) = dt, \quad \psi^{-1*}(dy) = dy, \quad \psi^{-1*}(dz) = dz.$$

Die zwei Sichtweisen sind mathematisch äquivalent. Wir machen uns im folgenden die zweite zueigen, weil sie leichte Vorteile in Rechnung und Notation einbringt.

Vorbereitung 2. Da wir vorhaben, Welt-Abbildungen $\psi^{-1*}: \Omega^k(M_4) \rightarrow \Omega^k(M_4)$ auszuführen, empfiehlt es sich, die physikalischen Größen zu Weltgrößen in $\Omega^k(M_4)$ bzw. $\tilde{\Omega}^k(M_4)$ zusammenzufassen.

Der Übergang zur Raum-Zeit $M_4 = E_3 \times \mathbb{R}$ erfordert zudem eine Ausdehnung des Ableitungsbegriffes.

Wir schreiben $d = d + dt \wedge \frac{d}{dt}$ für die äußere Ableitung in Raum und Zeit.

1. Beobachtung: B und E gehören zusammen: $F = B + E \wedge dt \in \Omega^2(M_4)$. F steht für Feldstärke (und Faraday-Form) und hat die absolute physikalische Dimension $[F] = \frac{\text{Energie}}{\text{Strom}} = \frac{\text{Wirkung}}{\text{Ladung}}$.

Die homogenen Maxwell-Gleichungen $\dot{B} + dE = 0$ und $dB = 0$ sind äquivalent zu $dF = 0$.

2. Beobachtung: ρ und j gehören zusammen: $J = \rho - j \wedge dt \in \tilde{\Omega}^3(M_4)$. Die ungerade 3-Form J heißt "Vierestrom". Sie hat die absolute physikalische Dimension $[J] = \text{Ladung}$.

Die Kontinuitätsgleichung $\dot{\rho} + dj = 0$ ist äquivalent zu $dJ = 0$.

Galilei-Modell? Wir Galilei-transformieren die Faraday-Form vom Zustand der Ruhe ($F^{(0)}$) in den

Zustand der Bewegung: $F = \psi^{-1*} F^{(0)} = \psi^{-1*} B^{(0)} = b^{(0)} \psi^{-1*} (\chi^{(0)} dx) \wedge dy = b^{(0)} \chi (dx - |v| dt) \wedge dy$

mit $\chi = \psi^{-1*} \chi^{(0)} = \Theta(L^2 - (x - |v|t)^2 - y^2)$. Hieraus lesen wir ab: $B = b^{(0)} \chi dx \wedge dy$ und

$E = |v| b^{(0)} \chi dy$, was mit den obigen Ausdrücken für B, E übereinstimmt, wenn $b^{(0)} = b$

(was sich später als unhaltbar herausstellen wird). So weit, so gut ...

Jetzt Galilei-transformieren wir in der gleichen Weise den Vierestrom:

$$\psi^{-1*} j^{(0)} = \psi^{-1*} (-j^{(0)} \wedge dt) = -\frac{b^{(0)}}{\mu_0} [\psi^{-1*} (d\chi^{(0)}) \wedge dz; \mathcal{R}] \wedge dt.$$

Mit der Rechenregel $\psi^{-1*} d = d \psi^{-1*}$ ("äußere Ableitung vertauscht mit Rückzug von Formen")

$$\text{erhalten wir } \psi^{-1*} j^{(0)} = -\frac{b^{(0)}}{\mu_0} [d\chi \wedge dz; \mathcal{R}] \wedge dt \stackrel{?}{=} j.$$

An dieser Stelle stehen wir vor einem gravierenden Problem: wegen $\psi^{-1*}(dt) = dt$ im Galilei-Modell führt $\rho^{(0)} = 0$ im IS-0 unweigerlich zu $\rho = 0$ im IS-1, im Widerspruch zur Vorhersage (siehe oben) der Maxwell'schen Theorie. Wenn wir am Relativitätsprinzip ("kein Inertialsystem ist ausgezeichnet") festhalten wollen, müssen wir entweder die Maxwell'sche Theorie oder das Galilei-Modell der Raum-Zeit aufgeben.

Minkowski-Modell. Da die Maxwell'sche Theorie nachweislich stimmt, ist ein neues Modell für die die Raum-Zeit mit passenden Koordinatentransformationen zwischen Inertialsystemen zu entwickeln.

Wie wir aus dem Kapitel über Newton'sche Mechanik wissen, ist der Begriff der gleichförmigen und geradlinigen Bewegung in der affinen Struktur der Galilei-Raum-Zeit begründet. An diesem Begriff halten wir fest (jedenfalls solange allgemein-relativistische Effekte vernachlässigbar sind) und modellieren M_4 als affinen Raum. Gesucht ist dann eine affine Abbildung $\psi: M_4 \rightarrow M_4$, unter der die ruhende Spule (IS-0) in die bewegte Spule (IS-1) übergeht. Dazu machen wir den Ansatz

$$\psi^{-1*}(dx) = \alpha dx + \beta dt, \quad \psi^{-1*}(dy) = dy,$$

$$\psi^{-1*}(dt) = \alpha' dt + \beta' dx, \quad \psi^{-1*}(dz) = dz.$$

Damit die transformierte Spule $\psi^{-1*} \chi^{(0)} = \chi$ tatsächlich die Geschwindigkeit $|v|$ in Richtung der positiven x -Achse hat, muss gelten: $\beta = -|v|\alpha$, also $\psi^{-1*}(dx) = \alpha(dx - |v|dt)$. Durch Übertragen der entsprechenden Betrachtung vom Galilei-Modell sehen wir dann sofort $\psi^{-1*} F^{(0)} = F$, wenn $\alpha = \frac{b}{b^{(0)}}$.

Entscheidend ist jetzt die Rechnung für den Viererstrom:

$$\begin{aligned} \psi^{-1*} j^{(0)} &= -\frac{b^{(0)}}{\mu_0} [d\chi \wedge dz; \mathcal{R}] \wedge \psi^{-1*}(dt) \\ &= -\frac{b^{(0)}}{\mu_0} [(dx + \dot{\chi} dt) \wedge dz; \mathcal{R}] \wedge (\alpha' dt + \beta' dx) \\ &= -\frac{b^{(0)}}{\mu_0} [d\chi \wedge dz; \mathcal{R}] \wedge \alpha' dt - \frac{b^{(0)}}{\mu_0} \left[\frac{\partial \chi}{\partial y} dy \wedge dz; \mathcal{R} \right] \wedge \beta' dx - \frac{b^{(0)}}{\mu_0} [\dot{\chi} dt \wedge dz; \mathcal{R}] \wedge \beta' dx. \end{aligned}$$

Vergleich mit dem Maxwell-berechneten Ausdruck für j zeigt, dass sich die gewünschte Gleichheit

$$\psi^{-1*} j^{(0)} = j \text{ einstellt, wenn wir setzen } \alpha' = \alpha = \frac{b}{b^{(0)}} \text{ und } \beta' = -\mu_0 \epsilon_0 |v| \frac{b}{b^{(0)}}.$$

Insgesamt erhalten wir also $\psi^{-1*}(dx) = \alpha(dx - |v|dt)$, $\psi^{-1*}(dt) = \alpha(dt - \mu_0 \epsilon_0 |v| dx)$.

Der Parameter $\alpha = \frac{b}{b^{(0)}}$ bleibt fürs erste unbestimmt.

Beobachtung. Aus $\psi^{-1*}(dx) = \alpha(dx - |v|dt)$ folgt

$$\psi^{-1*}x = \alpha(x - |v|t) + \text{const}, \text{ und ohne Verlust setzen wir const} = 0.$$

Hiermit berechnen wir
$$\iint B = b \iint \chi \, dx \wedge dy = b \iint \Theta(L^2 - \alpha(x - |v|t)^2 - y^2) \, dx \wedge dy$$

$$= \frac{b}{\alpha} \iint \Theta(L^2 - x^2 - y^2) \, dx \wedge dy = b^{(0)} \iint \chi^{(0)} \, dx \wedge dy = \iint B^{(0)}.$$

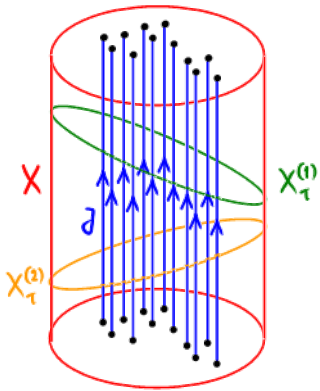
Der magnetische Fluss durch den Spulenquerschnitt hat also in IS-0 und IS-1 den gleichen Wert!

Dass dies kein Zufall ist, sondern ganz allgemein gilt, wollen wir nun erläutern.

Als Vorbereitung besprechen wir den analogen Fall der elektrischen Ladung.

Wir betrachten eine räumlich lokalisierte Ladungsverteilung (z.B. ein geladenes schwarzes Loch) mit

Viererstrom J . Passend zu J wählen wir eine Weltrohrumgebung $X \subset M_4$ (offen), also $\text{supp}(J) \subset X$.



Dann wählen wir zwei Raum-Zeit-Koordinatensysteme (nicht notwendig

Inertialsysteme) mit Zeitkoordinaten $t^{(1)}$ bzw. $t^{(2)}$ und setzen

$$X_\tau^{(i)} := \{ p \in X \mid t^{(i)}(p) = \tau \} \quad (i=1,2).$$

Die entsprechenden Beobachter ermitteln für die Gesamtladung die Werte

$$Q^{(i)}(\tau) = \iiint_{X_\tau^{(i)}} J = \iiint_{X_\tau^{(i)}} j^{(i)}.$$

Man zeigt nun $Q^{(i)}(\tau + \Delta\tau) = Q^{(i)}(\tau) \equiv Q^{(i)}$:

$$Q^{(i)}(\tau + \Delta\tau) - Q^{(i)}(\tau) = \iiint_{X_{\tau+\Delta\tau}^{(i)}} J - \iiint_{X_\tau^{(i)}} J = \iiint_{X_{\tau+\Delta\tau}^{(i)} - X_\tau^{(i)}} J = \iiint_{\partial V} J = \iiint_V dJ = 0.$$

durch Hinzuzügen von Randteilen, wo $J=0$.

Mit dem gleichen Argument sieht man: $Q^{(1)} = Q^{(2)}$.

Wichtiges Fazit: die Gesamtladung ist nicht nur zeitunabhängig, sondern auch noch für alle Beobachter gleich.

(Hingegen ist die Ladungsdichte vor Integration zeitabhängig und beobachterabhängig, wie wir am Beispiel der Spule in Ruhe und Bewegung gesehen haben.)

Eine im Wesentlichen identische Argumentation führt zu dem Ergebnis, dass der gesamte magnetische Fluss

zeitunabhängig und beobachterunabhängig ist. Dazu sei Y eine dreidimensionale Weltrohrumgebung

der Welthistorie des zweidimensionalen Spulenquerschnitts (worum der gesamte magnetische Fluss enthalten ist).

Ähnlich wie vorher sei $Y_\tau^{(i)} := \{ p \in Y \mid t^{(i)}(p) = \tau \}$ ($i=1,2$) und $\Phi^{(i)}(\tau) = \iiint_{Y_\tau^{(i)}} F = \iiint_{Y_\tau^{(i)}} B^{(i)}$.

Wie zuvor (jetzt mit $dF=0$ statt $dJ=0$) zeigt man, dass gilt $\Phi^{(i)}(\tau + \Delta\tau) = \Phi^{(i)}(\tau) \equiv \Phi^{(i)}$

(unabhängig von der Zeit) und $\Phi^{(1)} = \Phi^{(2)}$ (unabhängig vom Beobachter).

Es verbleibt immer noch die Bestimmung des bislang unbestimmten Parameters α in den Ausdrücken für $\varphi^{1*}(dx)$ und $\varphi^{1*}(dt)$. Hierzu müssen wir zusätzliche Information heranziehen und verwenden, dass neben der elektrischen Ladung und dem magnetischen Fluss ($[F] = \frac{\text{Wirkung}}{\text{Ladung}}$) eine weitere Integralinvariante existiert: das Wirkungsintegral S .

Hintergrund. In der Lagrange-Mechanik werden wir lernen:

$$S = \int L dt = \int (T - U) dt \quad \text{und} \quad \delta S = 0 \leadsto \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q} \quad (\text{Bewegungsgleichungen}).$$

In der Quantenmechanik lernt man, dass die Wirkung in Einheiten des Planck'schen Wirkungsquantums physikalisch bedeutsam ist. Aus diesen (und anderen) Gründen ist das Wirkungsintegral invariant (d.h. von Beobachter und Koordinatensystem unabhängig).

Wirkungsfunktional des elektromagnetischen Feldes: $S_{\text{E.M.}} = \int (E \wedge D - B \wedge H) \wedge dt.$

Wir wählen die charakteristische Funktion $\chi^{(0)}$ des Weltgebiets der Spule jetzt endlich in Raum und Zeit (\leadsto Abschneidefaktoren für z -Richtung und Zeitrichtung aufnehmen).

Im Ruhesystem ($IS=0$) der Spule berechnen wir

$$S_{\text{E.M.}}^{(0)} = \int (-B^{(0)} \wedge H^{(0)}) \wedge dt = - \frac{(b^{(0)})^2}{\mu_0} \int \chi^{(0)} d\text{vol}_3 \wedge dt,$$

und in $IS=1$ ergibt sich $S_{\text{E.M.}} = (|v|^2 \epsilon_0 b^2 - \frac{b^2}{\mu_0}) \int \chi d\text{vol}_4, \quad d\text{vol}_4 = d\text{vol}_3 \wedge dt.$

Nun investieren wir die zusätzliche Forderung, dass die Invarianz der Wirkung $S_{\text{E.M.}}^{(0)} = S_{\text{E.M.}}$ nicht nur für das elektromagnetische Feld gilt, sondern auch für die Materie (und andere Eichfelder) gelten muss. Es folgt, dass schon die individuellen Faktoren invariant sein müssen:

$$- \frac{(b^{(0)})^2}{\mu_0} = |v|^2 \epsilon_0 b^2 - \frac{b^2}{\mu_0} \quad \text{und} \quad \int \chi^{(0)} d\text{vol}_4 = \int \chi d\text{vol}_4.$$

Aus der ersten Gleichung deduziert man $\alpha = \frac{b}{b^{(0)}} = (1 - |v|^2 \epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}.$

Mit $c := (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$ haben wir dann das folgende Ergebnis für die transformierten Koordinatendifferentiale im Minkowski-Modell der Raum-Zeit:

$$\begin{aligned} \varphi^{-1*}(dx) &= \frac{dx - \frac{|v|}{c} c dt}{\sqrt{1 - \frac{|v|^2}{c^2}}} = \cosh \theta \cdot dx - \sinh \theta \cdot c dt, \\ \varphi^{-1*}(c dt) &= \frac{c dt - \frac{|v|}{c} dx}{\sqrt{1 - \frac{|v|^2}{c^2}}} = -\sinh \theta \cdot dx + \cosh \theta \cdot c dt, \end{aligned} \quad \tanh \theta = \frac{|v|}{c}.$$

(Lorentz-Transformation)

Beachte: im nichtrelativistischen Limes $\frac{|v|}{c} \ll 1$ geht das neue Transformationsgesetz in das alte (Galilei-Modell) über.

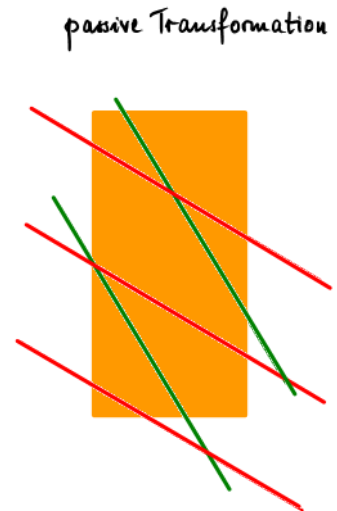
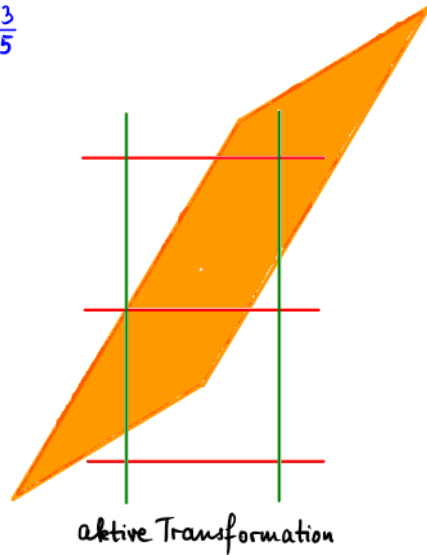
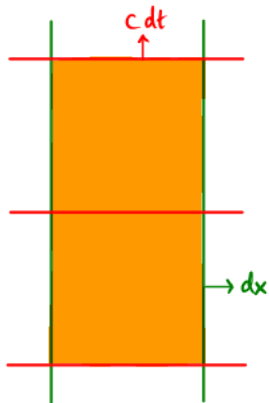
Wir überprüfen die Invarianz des Weltvolumens unter der obigen Lorentz-Transformation:

Vorbetrachtung: $\psi^*(dx \wedge cdt) = (\cosh\theta \cdot dx + \sinh\theta \cdot cdt) \wedge (\sinh\theta \cdot dx + \cosh\theta \cdot cdt)$
 $= (\cosh^2\theta - \sinh^2\theta) dx \wedge cdt = dx \wedge cdt.$

Hiermit verifizieren wir $\psi^* dvol_{\mathbb{M}_4} = dvol_{\mathbb{M}_4}$ und

$$\int_{M_4} \chi dvol_{\mathbb{M}_4} = \int_{M_4} (\psi^{-1*} \chi^{(0)}) dvol_{\mathbb{M}_4} = \int_{\psi^{-1}(M_4)} \chi^{(0)} \psi^* dvol_{\mathbb{M}_4} = \int_{M_4} \chi^{(0)} dvol_{\mathbb{M}_4}.$$

Graphische Illustration für $\frac{|v|}{c} = \frac{3}{5}$



Längenkontraktion. Notation: $dx \equiv dx_1$, $cdt \equiv dx_0$,
 $e_x \equiv e_1$, $\frac{1}{c}e_t \equiv e_0$.

$$D\psi(e_1) = \cosh\theta \cdot e_1 + \sinh\theta \cdot e_0,$$

$$D\psi(e_0) = \sinh\theta \cdot e_1 + \cosh\theta \cdot e_0.$$

$$l_{e_1} = D\psi(1 \cdot e_1 - \tau e_0) = e_1 \cosh\theta + e_0 \sinh\theta - \tau(e_1 \sinh\theta + e_0 \cosh\theta) = e_1(\cosh\theta - \tau \sinh\theta) + e_0 \cdot 0$$

so zu bestimmen, dass Orte zu gleichen Zeiten gemessen werden $\Rightarrow \tau = \frac{\sinh\theta}{\cosh\theta}$

$$= e_1 \left(\cosh\theta - \frac{\sinh^2\theta}{\cosh\theta} \right) = \frac{e_1}{\cosh\theta}.$$

Also

$$l = \frac{1}{\cosh\theta} \quad (\text{Längenkontraktion}).$$

Zeitdilatation. $D\psi(1 \cdot e_0) = e_1 \sinh\theta + \cosh\theta \cdot e_0.$

Eigenzeit

Zeit, die für den Beobachter während eines Zyklus der Eigenzeit verstreicht.

"Uhren in Bewegung gehen langsamer" (Zeitdilatation).

Experimentelle Bestätigung. Beim Auftreffen kosmischer Strahlung auf die äußere Erdatmosphäre werden u.a.

Myonen (mittlere Lebensdauer: $\tau_\mu \approx 2.2 \times 10^{-6} \text{ s}$) produziert. Im Galilei-Modell hätten diese Myonen eine mittlere Laufstrecke von maximal $c\tau_\mu \approx 6.6 \times 10^2 \text{ m}$, was nicht ausreicht, um die (hohe) Flusddichte der auf der Erdoberfläche ankommenden Myonen zu erklären.

7.7 Wellengleichung (für B) und Minkowski-Metrik

$$\ddot{B} = \frac{d}{dt} \dot{B} = \frac{d}{dt} (-dE) = -\frac{1}{\epsilon_0} d * \dot{D} = -\frac{1}{\epsilon_0} d * (dH - j) = -\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} d * d * B + \frac{1}{\epsilon_0} d * j.$$

Multipliziere mit $\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} \rightsquigarrow \frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} B + d * d * B = \mu_0 d * j.$

Benütze $*d*B = -\delta B$ und subtrahiere $\delta d B = 0$. Mit $\Delta = \delta d + d \delta$ folgt dann

$$\boxed{\left(\frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} - \Delta\right) B = \mu_0 d * j} \quad (\text{Wellengleichung für } B).$$

Spezielle Lösung im Vakuum ($j=0$): $B = f(x-ct) dx \wedge dy$.

Verifikation: $\frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} B = \frac{(-c)^2}{c^2} f''(x-ct) dx \wedge dy = (\Delta f)(x-ct) dx \wedge dy = \Delta B \quad (\checkmark).$

Deutung. Ist f eine Buckelfunktion (\cap), so bewegt sich der Buckel (ohne Formänderung) mit Geschwindigkeit c . Hieraus ergibt sich die Bedeutung von c als Geschwindigkeit elektromagnetischer Wellen im Vakuum (kurz: Lichtgeschwindigkeit).

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} - \Delta =: \square \quad \text{heißt Wellenoperator (oder d'Alembert-Operator).}$$

Unter einer Lorentz-Transformation

$$(Dx)(\partial_0) = \cosh \theta \partial_0 + \sinh \theta \partial_1,$$

$$(Dx)(\partial_1) = \sinh \theta \partial_0 + \cosh \theta \partial_1,$$

bleibt der Wellenoperator $\square = \partial_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2 - \partial_3^2$ unverändert:

$$(\cosh \theta \partial_0 + \sinh \theta \partial_1)^2 - (\sinh \theta \partial_0 + \cosh \theta \partial_1)^2 = (\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta) (\partial_0^2 - \partial_1^2) = \partial_0^2 - \partial_1^2.$$

Die Rechnung für eine Lorentz-Transformation in x_2 -, x_3 - oder beliebige Richtung geht analog.

Es folgt, dass die Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen gleich ist!

(Vgl. den experimentellen Befund von Michelson-Morley, 1887).

Erinnerung/Nachhilfe (Vektorfelder, partielle Ableitungen werden mit der Jacobi-Matrix transformiert):

$$dx'_j = \sum_i \frac{\partial x'_j}{\partial x_i} dx_i \quad \Leftrightarrow \quad \sum_j \frac{\partial x'_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x'_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Äquivalent zur Invarianz des Wellenoperators ist die Invarianz der

Minkowski-Metrik:

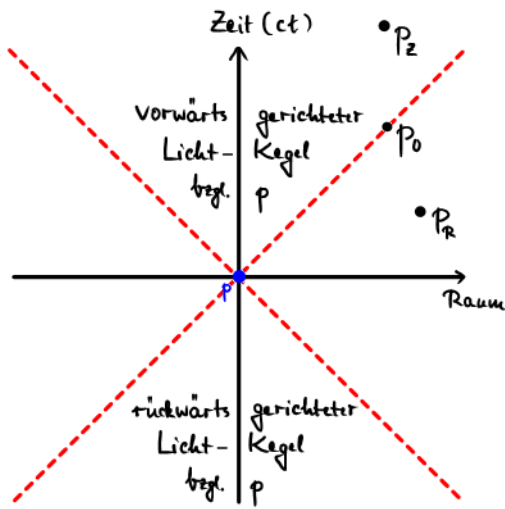
$$g = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ = -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2.$$

Beachte: $dt^2 = dt \otimes dt$ (nicht $dt \wedge dt = 0$).

Seien p und p' zwei Weltpunkte mit Differenzvektor

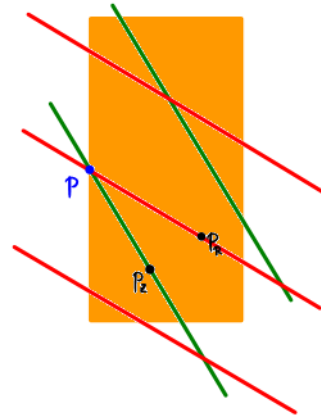
$u = p' - p \in V = \mathbb{R}^4$. Man unterscheidet 3 Fälle:

$$g(u, u) \begin{cases} > 0 & \text{raumartiger} \\ = 0 & \text{lichtartiger} \\ < 0 & \text{zeitartiger} \end{cases} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Weltvektor } u \\ \text{oder} \\ \text{Weltabstand} \\ \text{zwischen } p \text{ und } p'. \end{array}$$

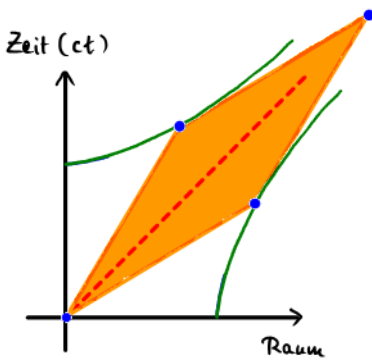


$p_2 - p$ zeitartig,
 $p_0 - p$ lichtartig,
 $p_1 - p$ raumartig.

Ist $u = p' - p$ raumartig (bzw. zeitartig), so existiert ein Inertialsystem, in dem die Ereignisse p und p' zur gleichen Zeit (bzw. am gleichen Ort) stattfinden.



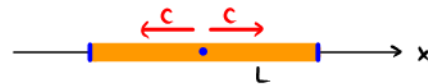
Nochmal Längenkontraktion & Zeitdilatation.



Die Eckpunkte (blau) des Rauten-Weltgebiets liegen auf der Lichtlinie $g(u, u) = 0$ und dem raumartigen (bzw. zeitartigen) Hyperbelast $g(u, u) = +1$ (bzw. $g(u, u) = -1$).

Angesichts der experimentell nachgewiesenen Invarianz (Unabhängigkeit vom Inertialsystem) der Lichtgeschwindigkeit ist die Vorstellung einer absoluten Zeit / Gleichzeitigkeit nicht haltbar:

Beispiel. In der Mitte eines ruhenden linearen Objekts der Länge $2L$ werden gleichzeitig zwei Lichtpulse längs der Ausdehnungsrichtung des Objekts abgeschickt:



Die beiden Lichtpulse kommen zur Zeit $\Delta t = L/c$ **gleichzeitig** an den Objektenden an.

Nun betrachten wir denselben Vorgang aus einem Inertialsystem, in dem sich das Objekt mit Geschwindigkeit $v = |v|e_x$ längs seiner Ausdehnungsrichtung bewegt.

1. Galilei-Modell:

$(c \pm |v|)\Delta t = L \pm |v|\Delta t$

Aus der Sicht des neuen Inertialsystems kommen die beiden Lichtpulse immer noch zur gleichen Zeit Δt an.

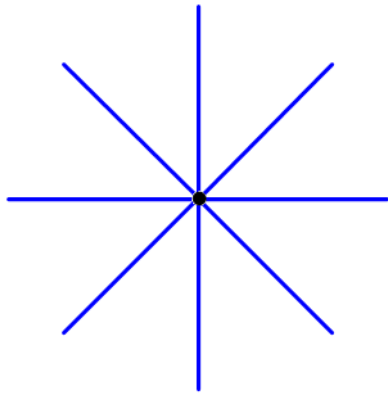
2. Minkowski-Modell:

$c\Delta t = L\sqrt{1-|v|^2/c^2} \pm |v|\Delta t$

Aus der Sicht des neuen Inertialsystems kommt der mit dem Objekt gleichlaufende Puls später an ($\Delta t = \frac{L}{c}\sqrt{\frac{1+|v|/c}{1-|v|/c}}$) als der entgegenlaufende ($\Delta t = \frac{L}{c}\sqrt{\frac{1-|v|/c}{1+|v|/c}}$).

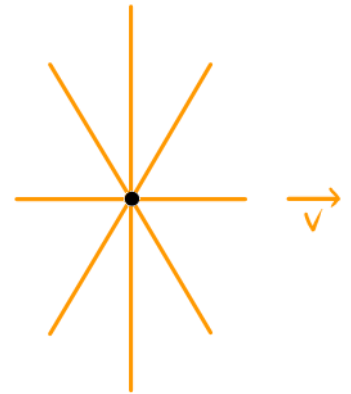
7.8 Bremsstrahlung einer Punktladung

Siehe W. Thirring, Lehrbuch der Mathematischen Physik; Band 2: Klassische Feldtheorie

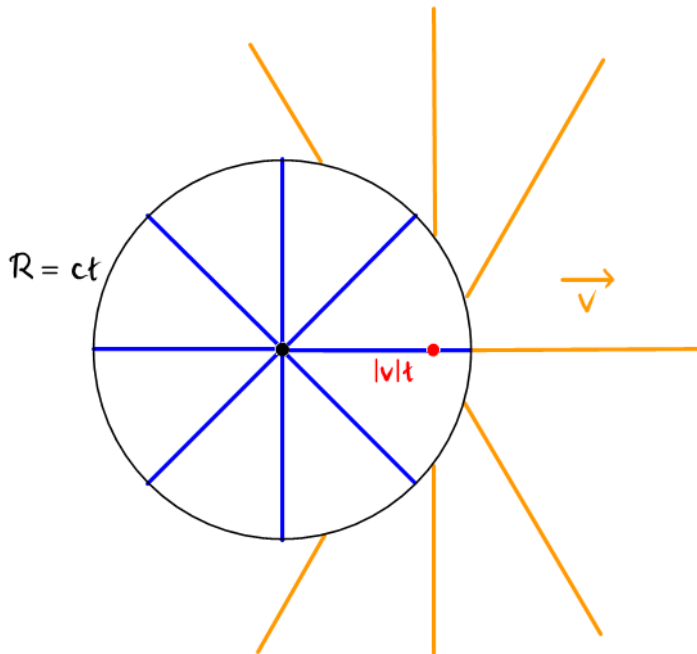


Elektrische Flusslinien einer Punktladung in Ruhe.

Elektrische Flusslinien einer gleichförmig und geradlinig bewegten Punktladung mit Geschwindigkeit $|v| = \frac{4}{5}c$



Ein starkes elektrisches Feld bremst die Punktladung linear und quasi instantan in den Zustand der Ruhe ab. Das Lorentz-kontrahierte bewegte Flusslinienbild (orange) wird dann zum isotropen statischen Flusslinienbild (blau) umgebogen. Das Verbiegen erfolgt an der um den Ruhepunkt zentrierten und mit Lichtgeschwindigkeit expandierenden Kugeloberfläche (schwarz). Das Intensitätsmaximum des abgestrahlten elektromagnetischen Signals liegt auf einem in Vorwärtsrichtung geneigten Kegel (zentriert um die Bewegungsachse). Im Limes $|v| \rightarrow c$ geht der Öffnungswinkel des Kegels gegen Null.



Beachte:

wegen $dD = \rho = 0$ (außerhalb der Punktladung) schließen die "blauen" Flusslinien stetig (durch Verlauf längs der Lichtfläche $R = ct$) an die "orange-farbenen" an.

7.9 Raum-Zeit-Formulierung der Elektrodynamik

Homogene Maxwell-Gleichungen: $dB = 0$ und $dE = -\dot{B} \wedge \Rightarrow dF = 0$ für $F = B + E \wedge dt$.

Inhomogene Maxwell-Gleichungen: $dD = \rho$ und $dH = j + \dot{D} \wedge \Rightarrow dG = J$ für $G = D - H \wedge dt$ und $J = \rho - j \wedge dt$.

Materialgleichungen: $D = \epsilon_0 * E$ und $B = \mu_0 * H \wedge$?

Hodge-Sternoperator für M_4 (Minkowski-Raum)

Metrischer Tensor $(\cdot, \cdot) : \Omega^k(M_4) \times \Omega^k(M_4) \rightarrow \Omega^0(M_4)$;

$$(dx, dx) = (dy, dy) = (dz, dz) = 1, \quad (cdt, cdt) = -1$$

$$dvol_4 = dvol_3 \wedge cdt, \quad dvol_3 = |dx \wedge dy \wedge dz|, \quad dt \text{ orientiert durch Zukunftsrichtung.}$$

Wie zuvor wird $*$: $\Omega^k(M_4) \rightarrow \tilde{\Omega}^{4-k}(M_4)$ definiert durch $\alpha \wedge * \beta = (\alpha, \beta) dvol_4$.

$$\text{Beispiele. } \left. \begin{array}{l} dx \wedge * dx = 1 \cdot dvol_4 \\ dy \wedge * dx = dz \wedge * dx = dt \wedge * dx = 0 \end{array} \right\} * dx = [dy \wedge dz, \mathbb{R}] \wedge cdt = \iota(\partial_x) dvol_4.$$

$$\left. \begin{array}{l} cdt \wedge * cdt = -dvol_4 \\ dx \wedge * cdt = dy \wedge * cdt = dz \wedge * cdt = 0 \end{array} \right\} * cdt = dvol_3.$$

$$(dx \wedge dy) \wedge * (dx \wedge dy) = \overset{!}{1} dvol_4 \dots \wedge * (dx \wedge dy) = [dz, \mathbb{R}] \wedge cdt.$$

$$(dz \wedge cdt) \wedge * (dz \wedge cdt) = -dvol_4 \dots \wedge * (dz \wedge cdt) = -[dx \wedge dy, \mathbb{R}].$$

Materialgesetz. Berechne $*F$ für $F = B + E \wedge dt$.

$$*_4 B = *_4 (B_{xy} dx \wedge dy + \dots) = \mu_0 H_z [dz, \mathbb{R}] \wedge cdt + \dots = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H \wedge dt.$$

$$*(E \wedge dt) = \frac{1}{c} * (E_z dz \wedge cdt + \dots) = \frac{1}{c} \frac{D_{xy}}{\epsilon_0} [-dx \wedge dy, \mathbb{R}] + \dots = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} D.$$

$$\text{Es folgt } *F = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} (D - H \wedge dt) = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} G \quad \text{oder} \quad \boxed{G = -\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} *F}.$$

7.10 Poincaré-Gruppe und Lorentz-Gruppe

Minkowski-Raum $(M_4, V \approx \mathbb{R}^4, +)$ ist affiner Raum (\wedge Gerade = gleichförmig und geradlinige Bewegung) von Weltpunkten / Ereignissen. Minkowski-Metrik: $g = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$.

Definition Poincaré-Gruppe: die Gruppe aller affinen Abbildungen $\varphi : M_4 \rightarrow M_4$, deren linearer Teil $L := D_\varphi \varphi$ die Minkowski-Metrik erhält: $g(Lu, Lv) = g(u, v)$ für alle $u, v \in V \approx \mathbb{R}^4$.

Die Poincaré-Gruppe ist 10-dimensional und geht im nichtrelativistischen Limes ($|v| \ll c$) in die Galilei-Gruppe über.

Definition Lorentz-Gruppe: die Untergruppe von Poincaré-Transformationen, die einen ausgewählten Weltpunkt ("Koordinatenursprung") festhalten, $\varphi(o) = o$.

Die Lorentzgruppe ist 6-dimensional und geht im nichtrelativistischen Limes in das semidirekte Produkt der Drehgruppe mit der Gruppe spezieller Galilei-Transformationen über. Bezeichnung: $O(V; g) = O(3, 1)$.

Mitteilung: die Invarianzgruppe von $G = -\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} * F$ ist größer (s konforme Gruppe).

Betrachte z.B. eine Raum-Zeit-Dilatation (Streckung) mit Fixpunkt o :

$$S: M_4 \rightarrow M_4, \quad p \mapsto o + s(p - o).$$

Es gilt $g(DS(u), DS(v)) = s^2 g(u, v) \neq g(u, v)$ (für $s \neq 1$), also ist DS keine Lorentz-Transformation (und S keine Poincaré-Transformation). Trotzdem gilt

$$G = -\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} * F \iff S^* G = -\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} * S^* F,$$

denn S^* kommutiert mit $*$: $\Omega^k(M_4) \rightarrow \tilde{\Omega}^{4-k}(M_4)$ für $k=2$ (und nur für $k=2$).

Es folgt, dass S^* Vakuum-Lösungen ($J=0$) auf Vakuum-Lösungen abbildet.

Aufgabe. Jede Raum-Zeit-Dilatation $S: M_4 \rightarrow M_4$ bildet eine Lösung F, G, J der elektromagnetischen Theorie ($dF=0, dG=J, G = -\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} * F$) wieder auf eine Lösung ab. Interpretieren Sie diese allgemeine Beziehung zwischen Lösungen im Grenzfall der Elektrostatik.

Aufgabe. Wie lässt sich der dynamische Vorgang von Abschn. 7.8 (Bremsstrahlung einer Punktladung) im Lichte konformer Invarianz (hier: mittels Raum-Zeit-Dilatationen) verstehen?

Hinweis. Sei $o \in M_4$ der Brems(welt-)punkt des abrupten Bremsvorgangs. Dann gilt $S^* J = J$ für jede Raum-Zeit-Dilatation $S: M_4 \rightarrow M_4$ mit Fixpunkt o .

Aufgabe. Was passiert im alternativen Szenario, in dem eine anfänglich ruhende Punktladung instantan in den Zustand der gleichförmigen und geradlinigen Bewegung versetzt wird?

7.11 Elektrodynamik in Materie

Motivation. Die Gleichungen der elektromagnetischen Theorie zusammen mit dem Kraftgesetz für bewegte Ladungen geben im Prinzip eine vollständige Beschreibung elektromagnetischer Phänomene im Rahmen der klassischen Physik. Ihre Gültigkeit setzt jedoch voraus, daß in die inhomogenen Maxwell-Gleichungen wirklich *alle* Ladungen und Ströme eingehen – die in Materie auf atomaren oder mikroskopischen Skalen existierenden eingeschlossen. Dieser Umstand nimmt der oben formulierten exakten Theorie ihre Vorhersagekraft, denn die atomaren Ladungsverteilungen und -bewegungen und ihre Reaktion auf elektromagnetische Felder sind im allgemeinen zu kompliziert, als daß wir hoffen könnten, sie im Detail zu erfassen. Zudem erfordert ihre korrekte Beschreibung den Formalismus der Quantenstatistik, der den Rahmen dieser Vorlesung bei weitem sprengt. Um das schwierige Problem der Berechnung atomarer Prozesse von unserem eigentlichen Ziel, nämlich der Vorhersage *makroskopischer* elektromagnetischer Phänomene, abzutrennen, führen wir Näherungen ein und formulieren eine *Maxwellsche Theorie in Materie*, welche die mikroskopischen Details auf einfache Weise berücksichtigt. Unser Vorgehen wird dabei so sein, daß wir im ersten Schritt ein exaktes Umschreiben der elektromagnetischen Theorie vornehmen. Im zweiten Schritt führen wir dann ein Raum- und Zeitmittel durch, das die in Materie rapiden Schwankungen der elektromagnetischen Felder auf mikroskopischen Skalen eliminiert, und ersetzen die Materialgleichungen durch phänomenologische Beziehungen.

Wir beginnen, indem wir eine Aufspaltung der Ladungen und Ströme in zwei Anteile vornehmen:

$$\rho = \rho^{\text{ext}} + \rho^{\text{mat}}, \quad \text{und} \quad j = j^{\text{ext}} + j^{\text{mat}}.$$

Den jeweils ersten Summanden nennen wir den externen Anteil, den zweiten den Materieanteil. Generell haben wir uns vorzustellen, daß sich die externen Ladungen und Ströme außerhalb der Materie befinden oder jedenfalls durch äußeren Zugriff manipuliert werden können. Im Unterschied hierzu ist der Materieanteil der sich jenseits unserer Kontrolle befindliche Anteil, welcher sich in Reaktion auf die Kraftwirkung elektromagnetischer Felder in Materie einstellt. Die Aufspaltung in zwei Anteile ist nicht immer eindeutig, sondern muß der jeweiligen Problemstellung angepaßt werden. Eine sinnvolle Aufspaltung erfüllt die Kontinuitätsgleichung

$$\dot{\rho}^{\text{ext}} + \text{d}j^{\text{ext}} = 0.$$

Es folgt dann mit $\dot{\rho} + \text{d}j = 0$ auch die Kontinuitätsgleichung für Materieladungen und -ströme. Wir vereinbaren außerdem, überschüssige Ladungen immer als extern zu zählen, d.h. ρ^{mat} verschwinde nach Integration über den gesamten von Materie erfüllten Raumbereich.

Elektrische Polarisierung. In einem polarisierbaren Medium bewirkt die Anwesenheit elektrischer Felder eine Umorganisation der mikroskopischen Ladungen. Zwei Mechanismen sind zu nennen. Zum einen können durch die

Kraftwirkung der elektrischen Feldstärke Ladungen, die sich sonst neutralisieren, gegeneinander verschoben werden, zum anderen richten sich permanent getrennte Ladungen, z.B. Moleküle mit einem statischen Dipolmoment, längs des elektrischen Feldes aus (Abb. 1.13). Die Umorganisation von Ladungen

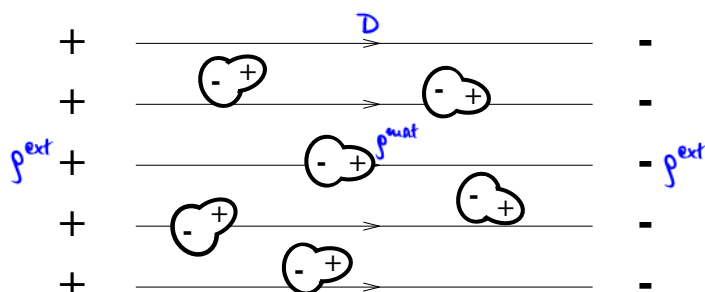
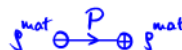


Abbildung 1.13. Polare Moleküle (z.B. in einem Lösungsmittel) richten sich im elektrischen Feld aus.

$$P \in \tilde{\Omega}^2(E_3)$$

wird durch die *elektrische Polarisierung* P , eine 2-Form, quantitativ erfaßt. Für eine beliebige orientierte Fläche S definieren wir $\int_S P$ als die gesamte Materieladung, die infolge der Kraftwirkung der elektrischen Feldstärke durch S "hindurchgeschoben" wurde. Dabei zählen wir die Materieladung relativ zu einem lokal neutralen Referenzzustand in der fernen Vergangenheit. Ist V ein dreidimensionales Gebiet mit Rand ∂V , so folgt:

$$\int_V \rho^{\text{mat}} = Q^{\text{mat}}(V) = - \int_{\partial V} P = - \int_V dP .$$



Das Minuszeichen erklärt sich aus der Tatsache, daß das Hinausfließen positiver Ladung durch ∂V eine entsprechende negative Ladung in V zurückläßt. Die Beliebigkeit von V resultiert in

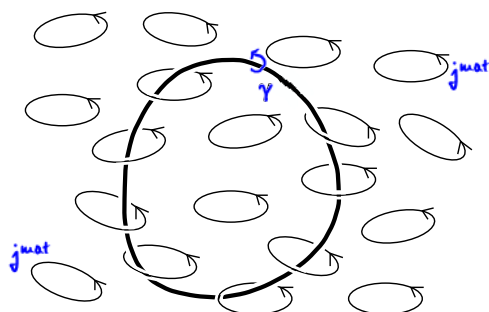
$$\rho^{\text{mat}} = -dP.$$

Überdeckt V den gesamten materieerfüllten Raum, so ergibt sich wegen $P = 0$ außerhalb der Materie die Gleichung $Q^{\text{mat}}(V) = - \int_{\partial V} P = 0$, d.h. die gesamte Materieladung verschwindet in Übereinstimmung mit der oben getroffenen Vereinbarung.

Magnetisierung. Das magnetische Analogon zu einem elektrisch polarisierbaren Medium ist ein Material, das sich unter dem Einfluß einer magnetischen Feldstärke B magnetisch ordnet. In der Atomphysik lernt man, daß der orbitale Drehimpuls und der Spin von Elektronen in ungesättigten Atomhüllen Ursache eines atomaren magnetischen Dipolmoments ist. In einem simplen klassischen Bild könnten wir uns vorstellen, daß die Elektronen der Atomhülle sich auf elliptischen Bahnen bewegen, was einem atomaren Kreisstrom, und somit einem magnetischen Dipolmoment entspricht. Diese

atomaren Kreisströme werden durch die Kraftwirkung der magnetischen Feldstärke polarisiert, d.h. sie richten sich im Feld partiell aus und addieren sich zu einem lokalen Gesamtstrom, dem sogenannten Magnetisierungsstrom. Zur quantitativen Beschreibung dieses Sachverhalts führen wir die *Magnetisierung* M , eine 1-Form, ein. Sie ist durch die Forderung definiert, daß das Linienintegral $\int_{\gamma} M$ für eine beliebige Kurve γ dem um γ zirkulierenden Magnetisierungsstrom gleich sei (Abb. 1.14).

mit äußerer Orientierung



$$M \in \tilde{\Omega}^1(E_3)$$

Abbildung 1.14. Das Linienintegral $\int_{\gamma} M$ ist gleich dem um γ zirkulierenden Magnetisierungsstrom.

transversal

Zur Herleitung einer zu $\rho^{\text{mat}} = -dP$ analogen Formel für j^{mat} betrachten wir eine transversal orientierte Fläche S und berechnen den gesamten Materiestrom $I^{\text{mat}}(S)$ durch S . Dabei ist zu berücksichtigen, daß zu $I^{\text{mat}}(S)$ neben dem Magnetisierungsstrom auch der von der zeitlichen Änderung von P herrührende Polarisierungsstrom beiträgt. Es gilt daher

$$\int_S j^{\text{mat}} = I^{\text{mat}}(S) = \frac{\partial}{\partial t} \int_S P + \int_{\partial S} M = \int_S (\dot{P} + dM),$$

woraus die folgende Gleichung resultiert:

$$j^{\text{mat}} = \dot{P} + dM.$$

Man überzeugt sich leicht, daß dieser Ausdruck zusammen mit jenem für ρ^{mat} die Kontinuitätsgleichung für die Materieladungen erfüllt. Wie P verschwindet auch M außerhalb der Materie.

Mathematische Argumentation. Vom didaktischen Gesichtspunkt leidet unsere Darstellung unter dem Mangel, daß sie ein gewisses Verständnis der Atomphysik sowie einiger Begriffe wie des elektrischen und magnetischen Dipolmoments voraussetzt. Wir wollen deshalb als zusätzliche Information anbieten, daß die Gleichungen für die Ladungs- und Stromdichte in Materie auch mathematisch gut motiviert sind

, und zwar wie folgt. Als topdimensionale und deshalb geschlossene Form mit verschwindendem Raumintegral besitzt

ρ^{mat} ein Potential: $\rho^{\text{mat}} = -dP$. Nach obiger Diskussion wird P als die Polarisierung identifiziert. Wie ρ^{mat} ist auch die 2-Form $j^{\text{mat}} - \dot{P}$ geschlossen: $d(j^{\text{mat}} - \dot{P}) = -\dot{\rho}^{\text{mat}} + \dot{\rho}^{\text{mat}} = 0$. Folglich ist sie nach Poincaré auf jedem sternförmigen Materiegebiet exakt, und wir können $j^{\text{mat}} - \dot{P} = dM$ setzen. Das Potential M läßt sich wie oben erläutert als die Magnetisierungs-1-Form auffassen.

Maxwellsche Theorie in Materie. Es sei betont, daß die Polarisierung P im allgemeinen nichtlokal von E abhängt. Anders ausgedrückt wird $P_a(\dots, t)$ nicht nur durch E am Ort a zur Zeit t bestimmt, sondern auch durch die Werte von E zu früheren Zeiten $t' < t$ und anderswo im Raum. Die Ursachen dieser Nichtlokalität sind die Trägheit und endliche Ausdehnung der Materieladungen.¹⁴ Um die nichtlokale oder *funktionale* Abhängigkeit der Polarisierung von der elektrischen Feldstärke evident zu machen, schreiben wir auch $P[E]$ für P . Ähnlich wie $P[E]$ in nichtlokaler Weise von E abhängt, so ist auch M ein im allgemeinen nichtlokales Funktional der magnetischen Feldstärke B , und wir schreiben zur besonderen Betonung dieser Abhängigkeit $M[B]$ für M .

Wir können jetzt die Materieladungen und -ströme zugunsten der Polarisierung P und der Magnetisierung M aus den Gleichungen der elektromagnetischen Theorie eliminieren. Dazu definieren wir die 2-Form $\mathcal{D} = D + P$ und die 1-Form $\mathcal{H} = H - M$. Die Größen \mathcal{D} und \mathcal{H} sind Hilfsfelder ohne direkte physikalische Bedeutung. Sie genügen den modifizierten inhomogenen Maxwell-Gleichungen $d\mathcal{D} = \rho - \rho^{\text{mat}} = \rho^{\text{ext}}$ und

$$d\mathcal{H} = j + \dot{D} - dM = j + \dot{\mathcal{D}} - j^{\text{mat}} = j^{\text{ext}} + \dot{\mathcal{D}},$$

in die nur noch der externe Anteil der Ladungen und Ströme eingeht. Außerdem treten an die Stelle der Materialgleichungen im Vakuum die Beziehungen

$$\mathcal{D} = \varepsilon_0 \star E + P[E], \quad \text{und} \quad \mathcal{H} = \mu_0^{-1} \star B - M[B].$$

Diese Gleichungen drücken die Hilfsfelder \mathcal{D} und \mathcal{H} durch die elektromagnetischen Feldstärken E und B aus. Infolge der Eigenschaften der Funktionale $P[E]$ und $M[B]$ sind sie im allgemeinen zeitlich und räumlich nichtlokal, anisotrop (in Kristallen), inhomogen (in ungeordneten Medien) und nichtlinear (in Ferroelektrika und Ferromagneten). Zusammenfassend haben wir das folgende Gleichungssystem der Maxwellschen Theorie in Materie:

inhomogene Maxwell-Gln	Material-Gleichungen	homogene Maxwell-Gln
$d\mathcal{D} = \rho^{\text{ext}}$	$\mathcal{D} = \varepsilon_0 \star E + P[E]$	$dE = -\dot{B}$
$d\mathcal{H} = j^{\text{ext}} + \dot{\mathcal{D}}$	$\mathcal{H} = \mu_0^{-1} \star B - M[B]$	$dB = 0$

¹⁴ Die räumliche Nichtlokalität ist typisch von atomarer Dimension, während die Nichtlokalität in der Zeit durch atomare Schwingungsdauern bestimmt wird.

Phänomenologie. Die obige Reformulierung der Maxwell'schen Theorie ist exakt und deshalb genauso schwierig zu behandeln wie die Theorie in ihrer ursprünglichen Form. An die Stelle der Berechnung von ρ^{mat} und j^{mat} tritt jetzt das äquivalente Problem der Berechnung von $P[E]$ und $M[B]$. Die Nützlichkeit der Umformulierung besteht darin, daß sie sich gut für die Einführung von Näherungen eignet. Zu diesem Zweck führt man zunächst eine Mittelungsprozedur durch, um die rapiden zeitlichen und räumlichen Schwankungen auf atomaren Skalen zu eliminieren.

Die Mittelung vereinfacht die komplizierten funktionalen Abhängigkeiten $P[E]$ und $M[B]$ und läßt uns die Materialgleichungen durch einfache "makroskopische" Beziehungen ersetzen.

Homogenes Dielektrikum. Im Fall eines homogenen Dielektrikums gilt per Definition des dielektrischen Tensors $\varepsilon_{ij}^k = -\varepsilon_{ji}^k$

$$D_{ij}(\mathbf{p}, t) = \varepsilon_0 \int_0^\infty \left(\int \sum_k \varepsilon_{ij}^k(\mathbf{p} - \bullet, t - s) E_k(\bullet, s) \, d\text{vol} \right) ds .$$

Für ein isotropes Medium im statischen Limes reduziert sich ε_{ij}^k zu einer einzigen skalaren Größe ε , und wir erhalten die simple Materialgleichung

$$\mathcal{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \star E .$$

Homogenes Magnetikum. Im magnetischen Fall ist es Konvention, die Feldstärke durch die Erregung auszudrücken. Die Materialgleichungen in linearer Näherung lauten dann

$$B_{ij}(\mathbf{p}, t) = \mu_0 \int_0^\infty \left(\int \sum_k \mu_{ij}^k(\mathbf{p} - \bullet, t - s) \mathcal{H}_k(\bullet, s) \, d\text{vol} \right) ds .$$

$\mu_{ij}^k = -\mu_{ji}^k$ heißt der Tensor der magnetischen Permeabilität. Im isotropen und statischen Limes resultiert wieder ein sehr einfaches Gesetz:

$$B = \mu_0 \mu \star \mathcal{H} .$$

Für $\mu > 1$ wird B , die totale magnetische Feldstärke in Materie, relativ zum äußeren Feld $B^{\text{ext}} = \mu_0 \star \mathcal{H}$ verstärkt. Das magnetische Medium heißt in diesem Fall ein *Paramagnet*. Im umgekehrten Fall ($0 < \mu < 1$) liegt ein *Diamagnet* vor. Supraleiter, die ein äußeres Magnetfeld vollständig verdrängen, sind perfekte Diamagneten ($\mu = 0$).

Ohmsches Gesetz. Die Gleichungen der Elektrodynamik in Materie eignen sich besonders gut zur Beschreibung von Dielektrika und magnetischen Materialien. Anders ist die Situation in metallischen Leitern. Die vollständige Abschirmung äußerer Felder im Gleichgewicht entspricht einer divergenten dielektrischen Konstanten ($\varepsilon = \infty$). In Metallen bewirkt die Anwesenheit eines elektrischen Feldes (im quasi-stationären oder dynamischen Fall) mehr als nur eine elektrische Polarisierung. Die Kraftwirkung der elektrischen Feldstärke

beschleunigt die Leitungselektronen, und dissipative Prozesse, wie z.B. Kollisionen mit dem Atomgitter, bewirken dann eine Relaxation (über Zeitskalen der Größenordnung 10^{-14} s) zu einem stromführenden Zustand, der durch das *Ohmsche Gesetz*

$$j = \sigma * E$$

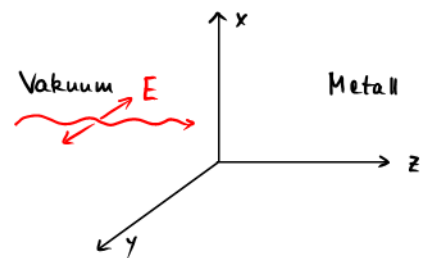
bestimmt ist. Die Materialkonstante σ heißt die elektrische Leitfähigkeit. Sie hat die physikalische Dimension $[\sigma] = \text{Strom}/(\text{Spannung} \times \text{Länge})$. Zum Beispiel hat Kupfer bei $T = 300\text{K}$ (Zimmertemperatur) die elektrische Leitfähigkeit $\sigma = 5.7 \times 10^7 (\text{Ohm} \times \text{Meter})^{-1}$. Dabei ist 1 Ohm = 1 Volt/Ampere die Einheit des elektrischen Widerstandes im SI-Maßsystem.

7.12 Skin-Effekt

Hier besprechen wir eine Anwendung des Ohmschen Gesetzes.

Ist ein metallischer Draht (der Dicke a und der elektrischen Leitfähigkeit σ) einer Wechselspannung mit geringer Frequenz ausgesetzt, so fließt der resultierende Strom im gesamten Drahtquerschnitt (mit homogener Stromdichte). Das Verhalten bei hohen Frequenzen ω ist jedoch anders; gilt $\omega \gg (a^2 \mu_0 \sigma)$, so fließt der Wechselstrom hauptsächlich in einer Haut (s "Skin-Effekt") der Dicke $\lambda = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma}}$ an der Oberfläche des Leiters ($\lambda \ll a$). Im Fall eines Kupferdrahts beträgt diese Eindringtiefe λ ca. 1 cm für $\omega = 50$ Hz und ca. 1 mm für $\omega = 5$ kHz.

Eindringtiefe. Wir berechnen $\lambda = \lambda(\omega)$ in einer einfachen verwandten Situation. Eine ebene elektromagnetische Welle mit elektrischem Feld $E = |E_0| dy \operatorname{Re}(e^{i(kz - \omega t)})$ treffe vom Vakuum kommend ($z < 0$) auf einen Metallkörper mit elektrischer Leitfähigkeit σ . Beim Eindringen ins Metall wird die elektromagnetische Welle in Wechselstrom & Wärme umgewandelt (Leistung $\int E \cdot j$ s Ohmsche Dissipation $\sigma \int E \cdot E$) und klingt deshalb ab. Unter der Annahme einer stationären Situation (d.h. alle Größen oszillieren gemäß $e^{-i\omega t}$ mit der gleichen Frequenz ω) können wir wie folgt vorgehen (wir arbeiten mit komplexen Größen und nehmen den Realteil erst zum Schluss).



$$1. \quad dE = -\dot{B} = i\omega B = i\omega \mu_0 *H \quad \wedge \quad *dE = i\omega \mu_0 H.$$

$$2. \quad dH = j + \dot{D} \stackrel{\text{Ohm}}{\approx} j = \sigma *E \quad (\text{für } z > 0). \quad 1. \& 2. \Rightarrow *d*dE = i\omega \mu_0 \sigma E.$$

$$\text{Mit } d*dE = dD/\epsilon_0 = \rho/\epsilon_0 = 0 \quad \text{folgt} \quad -\Delta E = 2i\lambda^{-2} E \quad (\lambda = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma}}) \quad \text{für } z > 0.$$

Wir suchen jetzt eine Lösung der Form $E \propto e^{i(kz - \omega t)}$ auch für $z > 0$.

$$\text{Einsetzen liefert } k^2 = 2i\lambda^{-2} \quad \text{und somit } \pm k = \sqrt{2i} \lambda^{-1} = \frac{1+i}{\lambda}.$$

Die physikalisch zutreffende Lösung für $z > 0$ ist dann $E = |E_0| dy e^{-z/\lambda} \operatorname{Re}(e^{i(z/\lambda - \omega t)})$.

Aufgabe. Berechne die an der Vakuum-Metall-Grenzfläche reflektierte Welle durch korrektes Anschließen der Lösungen in $z=0$.

7.13 Fourier-Transformation

Resümee Fourier-Reihe:

Periodische Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(x+2\pi) = f(x)$.

Hermiteches Skalarprodukt: $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \overline{f(x)} g(x) dx$.

Die "elementaren" periodischen Funktionen $x \mapsto e^{inx}$ ($n \in \mathbb{Z}$) bilden ein Orthonormalsystem:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i(n-m)x} dx = \delta_{m,n}.$$

Jede stetige periodische Funktion lässt sich als Fourier-Reihe darstellen:

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{inx} \quad \text{mit Fourier-Koeffizienten} \quad f_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

Kommentar. Fourier-Transformation benötigt eigentlich Maßtheorie & Lebesgue-Integral (s. SS 2016).

Definition. Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$, d.h. $\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < \infty$. Dann heißt

$$\tilde{f} \equiv \mathcal{F}f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad k \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ikx} dx \quad \text{die Fourier-Transformierte von } f.$$

Mitteilung: \tilde{f} ist beschränkt und stetig.

Beispiel 1. $f = \chi_{[-a,a]}$ ($0 < a < \infty$).

$$\sqrt{2\pi} \tilde{f}(k) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-a,a]}(x) e^{-ikx} dx = \int_{-a}^a e^{-ikx} dx = \frac{2 \sin(ka)}{k}.$$

Beachte: \tilde{f} ist beschränkt und stetig, aber $\tilde{f} \notin L^1(\mathbb{R})$.

Beispiel 2. $f(x) = e^{-a|x|}$ ($a > 0$).

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi} \tilde{f}(k) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-a|x|} e^{-ikx} dx = \int_0^{\infty} e^{-(a+ik)x} dx + \int_{-\infty}^0 e^{(a-ik)x} dx \\ &= \frac{1}{a+ik} + \frac{1}{a-ik} = \frac{2a}{a^2+k^2}. \end{aligned}$$

Ableitungsoperator P : $(Pf)(x) = \frac{1}{i} f'(x)$, $(P\tilde{f})(k) = \frac{1}{i} \tilde{f}'(k)$;

Multiplikationsoperator Q : $(Qf)(x) = x f(x)$, $(Q\tilde{f})(k) = k \tilde{f}(k)$.

Satz (PQ-Regeln).

(i) Sei $f \in C^m(\mathbb{R})$ und $P^n f \in L^1(\mathbb{R})$. Dann gilt $\widetilde{P^n f} = Q^n \tilde{f}$ für $m \geq n$ und $|\tilde{f}(k)| \leq \frac{\text{const}}{1+|k|^m}$.

(ii) Sei $Q^n f \in L^1(\mathbb{R})$ für $m \geq n$. Dann gilt $\tilde{f} \in C^m(\mathbb{R})$ und $\widetilde{Q^n f} = (-1)^n P^n \tilde{f}$.

Bemerkung. Grob gesagt fällt \tilde{f} umso schneller ab (im Unendlichen), je glatter f ist.

Und je schneller f abfällt, desto glatter ist \tilde{f} .

Zu (ii) für $n=1$. Im Fall von $Qf \in L^1(\mathbb{R})$ hat man

$$(\tilde{P\tilde{f}})(k) = \frac{1}{i} \frac{d}{dk} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ikx} dx \stackrel{\checkmark}{=} -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x f(x) e^{-ikx} dx = -\widetilde{(Qf)}(k).$$

Motivation. Unter Fourier-Transformation ist weder $L_1(\mathbb{R})$ noch $C_c^\infty(\mathbb{R})$ invariant. Deshalb folgende Defn.

Definition (Schwartz-Raum, schnell fallende glatte Funktionen):

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid x^m \frac{d}{dx^n} f(x) \text{ beschränkt für jedes Paar } m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}.$$

Eine Funktion $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ heißt Schwartzfunktion.

Nach den PQ-Regeln ist die Fourier-Transformierte einer Schwartzfunktion $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ wieder eine Schwartzfunktion $\tilde{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Beachte auch $C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L_1(\mathbb{R})$.

Beispiel. Die Gauss-Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ ist eine Schwartzfunktion mit der speziellen Eigenschaft

$$\tilde{f} = f: \quad \tilde{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2} - ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x+ik)^2} e^{-\frac{k^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{k^2}{2}} = f(k).$$

Eigenschaften. (i) $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow P^n f, Q^n f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ für alle $n = 0, 1, 2, \dots (\infty)$.

(ii) $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (Faltungsintegral: $(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(y) g(x-y) dy$).

Satz. Die Fourier-Transformation $F: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist eine Bijektion. Es gilt die Umkehrformel

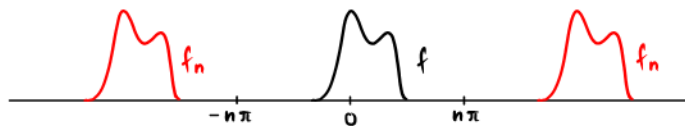
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk.$$

Korollar. Es gilt $(F^2 f)(x) = f(-x)$ und $F^4 = \text{Id}$.

Beweis der Umkehrformel für $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Es gilt $\text{supp}(f) \subset (-n\pi, n\pi)$ für ein genügend groß gewähltes $n \in \mathbb{N}$.

Definiere $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ durch $f_n(x) = f_n(x + 2\pi n)$ und $f_n \equiv f$ auf $[-n\pi, n\pi]$.



Betrachte $g_n(y) := f_n(ny) = g_n(y + 2\pi) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} g_\ell^{(n)} e^{i\ell y}$ (Fourier-Reihe).

$$\begin{aligned} \text{Fourier-Koeffizienten: } g_\ell^{(n)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g_n(y) e^{-i\ell y} dy = \frac{1}{2\pi n} \int_{-n\pi}^{n\pi} f_n(x) e^{-i\ell x/n} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\ell x/n} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi} n} \tilde{f}(\ell/n), \end{aligned}$$

$$\text{also } f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n} \tilde{f}(\ell/n) e^{i\ell x/n}.$$

Wegen \tilde{f} schnell fallend existiert eine Konstante $c > 0$ mit $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} |\tilde{f}(k)| \leq \frac{c}{1+k^2}$ für alle $k \in \mathbb{R}$.

Für $\varepsilon > 0$ beliebig wähle $N \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|\ell| > nN} \frac{1}{n} |\tilde{f}(\ell/n)| \leq 2 \sum_{\ell > nN} \frac{c/n}{1+(\ell/n)^2} < \varepsilon \quad \text{und} \quad 2 \int_N^\infty \frac{c dk}{1+k^2} < \varepsilon.$$

Nun sei $A_N := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^N \tilde{f}(k) e^{ikx} dk$ und $B_N := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\ell=-nN}^{nN} \frac{1}{n} \tilde{f}(\ell/n) e^{i\ell x/n}$.

Für N fest sei nun n groß genug gewählt, dass gilt $|A_N - B_N| < \varepsilon$.

Für $A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk$ und $B = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n} \tilde{f}(\ell/n) e^{i\ell x/n}$ folgt dann mittels

Dreiecksungleichung $|A - B| = |(A - A_N) + (A_N - B_N) + (B_N - B)|$
 $< |A - A_N| + |A_N - B_N| + |B_N - B| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$.

Folglich konvergiert $B \equiv f_n(x)$ für $n \rightarrow \infty$ gegen $A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk$. Nun konvergiert aber $f_n(x)$ per Definition punktweise (also für jeden festen Wert von x) gegen $f(x)$ im gleichen Limes $n \rightarrow \infty$. Damit ist die Umkehrformel $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk$ im Fall $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ bewiesen.

Mitteilung. Die Umkehrformel für den allgemeineren Fall $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ erhält man durch ein Zusatzargument, in das neben dem Faltungssatz (siehe unten) das Fundamentallemma der Variationsrechnung (siehe Kapitel 8) eingeht.

Faltungssatz. Für $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt:

(i) $\widetilde{f * g} = \sqrt{2\pi} \tilde{f} \cdot \tilde{g}$,
 (ii) $\tilde{f} * \tilde{g} = \sqrt{2\pi} \widetilde{f \cdot g}$.

zu (ii). $(\tilde{f} * \tilde{g})(k) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(k-k') \tilde{g}(k') dk' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i(k-k')x} dx \right) \tilde{g}(k') dk' =$
 $= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}} \tilde{g}(k') e^{ik'x} dk' \right) e^{-ikx} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x) e^{-ikx} dx = \sqrt{2\pi} \widetilde{(f \cdot g)}(k).$

7.14 Lösung der 1D Wellengleichung

Wir betrachten die homogene Wellengleichung $\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) f(x, t) = 0$

zu den Anfangsbedingungen $f(x, 0) = u(x)$ und $\dot{f}(x, 0) = v(x)$.

Durch Übergang zur Fouriertransformierten Gleichung und Verwenden der PQ-Regel $\widetilde{P^2 f} = Q^2 \tilde{f}$

erhalten wir $\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + k^2 \right) \tilde{f}(k, t) = 0$.

Lösungsansatz: $\tilde{f}(k, t) = A_k \cos(ckt) + B_k \sin(ckt)$.

Anfangsbedingungen $\leadsto \tilde{u}(k) = \tilde{f}(k, 0) = A_k$, $\tilde{v}(k) = \left(\frac{\partial}{\partial t} \tilde{f} \right)(k, 0) = B_k \cdot kc$,

also $\tilde{f}(k, t) = \tilde{u}(k) \cos(ckt) + \tilde{v}(k) \frac{\sin(ckt)}{kc}$. \leadsto Lösung als Fourier-Integral:

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(k, t) e^{ikx} dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\tilde{u}(k) \cos(ckt) + \tilde{v}(k) \frac{\sin(ckt)}{kc} \right) e^{ikx} dk.$$

Behauptung: $f(x,t) = \frac{1}{2} \left(u(x+ct) + u(x-ct) + \frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} v(x') dx' \right).$

Beweis. $\frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} v(x') dx' = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[x-ct, x+ct]}(x') v(x') dx' = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-ct, ct]}(x'-x) v(x') dx' = (\chi_{[-ct, ct]} * v)(x).$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2} u(x+ct) + \frac{1}{2} u(x-ct) + \frac{1}{2c} (\chi_{[-ct, ct]} * v)(x) \right) e^{-ikx} dx$$

$$= \frac{1}{2} \tilde{u}(k) e^{ikct} + \frac{1}{2} \tilde{u}(k) e^{-ikct} + \frac{\sqrt{2\pi}}{2c} \tilde{\chi}_{[-ct, ct]}(k) \tilde{v}(k) = \tilde{u}(k) \cos(kct) + \frac{\tilde{v}(k)}{2c} \cdot \frac{2 \sin(kct)}{k} \checkmark = \tilde{f}(k, t).$$

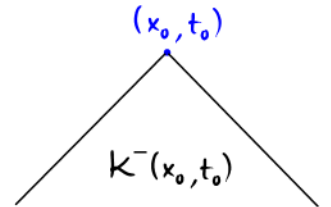
Inhomogene Gleichung. Wir betrachten jetzt $\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) f(x,t) = g(x,t)$

Zur Anfangsbedingung $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(x,t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \dot{f}(x,t) = 0.$

Behauptung: $f(x,t) = \frac{c}{2} \int_{-\infty}^t \left(\int_{x-c(t-t')}^{x+c(t-t')} g(x',t') dx' \right) dt'.$

Begründung dazu. Rückwärts gerichteter Lichtkegel bzgl. (x_0, t_0) :

$$K^-(x_0, t_0) = \left\{ p \in M_2 \mid t(p) < t_0 \text{ und } |x(p) - x_0| < c |t(p) - t_0| \right\}.$$



Stelle $\int_{-\infty}^t \left(\int_{x-c(t-t')}^{x+c(t-t')} g(x',t') dx' \right) dt' = \int_{M_2} g \chi_{K^-(x_0, t_0)} d\text{vol}_2$ als Faltungintegral dar:

$$\chi_{K^-(x_0, t_0)}(x', t') = \chi_{K^-(0,0)}(x'-x_0, t'-t_0) = \chi_{K^+(0,0)}(x_0-x', t_0-t') \quad (K^+ \text{ vorwärts gerichteter Lichtkegel})$$

$$\int_{M_2} g \chi_{K^-(x_0, t_0)} d\text{vol}_2 = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} g(x', t') \chi_{K^+(0,0)}(x_0-x', t_0-t') dx' \right) dt' = (g * \chi_{K^+(0,0)})(x_0, t_0).$$

Raum-Zeit-Fouriertransformation: $\tilde{f}(k, \omega) := \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,t) e^{-i(kx-\omega t)} dx dt.$

Faltungssatz? Hier nicht direkt anwendbar, da $\chi_{K^+(0,0)}$ nicht L^1 -integrierbar (und schon gar nicht schnell fallend). Wir behelfen uns mit einem Trick ("Regularisierung"): wir ersetzen $\chi_{K^+(0,0)}$ durch

$$\chi_{K^+(0,0)}^R(x,t) := \chi_{K^+(0,0)}(x,t) e^{-\varepsilon t} \quad (\varepsilon > 0) \text{ und nehmen am Ende den Limes } \varepsilon \rightarrow 0.$$

$$\widehat{(g * \chi_{K^+(0,0)}^R)}(k, \omega) = 2\pi \widehat{g}(k, \omega) \widehat{\chi_{K^+(0,0)}^R}(k, \omega).$$

$$2\pi \widehat{\chi_{K^+(0,0)}^R}(k, \omega) = \int_0^\infty \left(\int_{-ct}^{ct} e^{-ikx} dx \right) e^{i\omega t - \varepsilon t} dt = \frac{2}{k} \int_0^\infty \sin(kct) e^{i\omega t - \varepsilon t} dt = \frac{2c}{(kc)^2 - (\omega + i\varepsilon)^2}.$$

Insgesamt haben wir also $\frac{c}{2} \widehat{(g * \chi_{K^+(0,0)}^R)}(k, \omega) = \frac{\widehat{g}(k, \omega)}{k^2 - (\omega + i\varepsilon)^2/c^2}.$

Andererseits ergibt Fourier-Transformation der inhomogenen Wellengleichung $\left(-\frac{\omega^2}{c^2} + k^2 \right) \tilde{f}(k, \omega) = \tilde{g}(k, \omega)$

oder $\tilde{f}(k, \omega) = \frac{\tilde{g}(k, \omega)}{k^2 - \omega^2/c^2}.$

7.15 Lösung der 3D Wellengleichung

Homogene Wellengleichung: $\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) f = 0$

mit Anfangsbedingungen $f(p, t=0) = u(p)$ und $\dot{f}(p, t=0) = v(p)$.

Fourier-Transformation (im Ortsraum) ergibt $\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + |k|^2\right) \tilde{f}(k, t) = 0$, $|k|^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$.

Lösung: $\tilde{f}(k, t) = \tilde{u}(k) \cos(|k|ct) + \tilde{v}(k) \frac{\sin(|k|ct)}{|k|c}$.

Behauptung. Für $u \equiv 0$ lautet die Lösungsformel nach Fourier-Umkehr

$$f(p, t) = \frac{t}{4\pi} \int_{S_{ct}(p)} v_{T_p}$$

$S_{ct}(p)$ = Sphäre mit Mittelpunkt p und Radius ct ;

T_p = Raumwinkelform bzgl. p .

Nachweis. Fourier-Darstellung von v : $v(\cdot) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{v}(k) e^{ik(\cdot-0)} d^3k$ (Koord. Ursprung 0).

Hiermit haben wir durch Vertauschen der Integrationsreihenfolge (or Faltungssatz)

$$\frac{t}{4\pi} \int_{S_{ct}(p)} v_{T_p} = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{v}(k) \left(\frac{t}{4\pi} \int_{S_{ct}(p)} e^{ik(\cdot-0)}_{T_p} \right) d^3k.$$

Nun gilt $\int_{S_{ct}(p)} e^{ik(\cdot-0)}_{T_p} = e^{ik(p-0)} \int_{S_{ct}(p)} e^{ik(\cdot-p)}_{T_p}$ und

$$\frac{t}{4\pi} \int_{S_{ct}(p)} e^{ik(\cdot-p)}_{T_p} = \frac{t}{4\pi} \int_{S_{ct}(0)} e^{ik(\cdot-0)}_{T_0} = \frac{t}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{i|k|ct \cos\theta} \sin\theta d\theta d\phi = \frac{\sin(|k|ct)}{|k|c}. \quad \text{Es folgt}$$

$$\frac{t}{4\pi} \int_{S_{ct}(p)} v_{T_p} = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{v}(k) \frac{\sin(|k|ct)}{|k|c} e^{ik(p-0)} d^3k \quad \text{und somit durch Vergleich mit oben die Behauptung.}$$

Notation. $\mathcal{M}_{p,t}[f] := \frac{t}{4\pi} \int_{S_{ct}(p)} f_{T_p}$.

Aufgabe. Wie ist die Operation $f \mapsto \mathcal{M}_{p,t}[f]$ im Kettenbild zu interpretieren?

Aufgabe. Das allgemeine Anfangswertproblem der homogenen 3D Wellengleichung mit Anfangszeit $t=0$ (siehe oben) hat die Lösung $f(p, t) = \mathcal{M}_{p,t}[v] + \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{M}_{p,t}[u]$.

Inhomogene Wellengleichung (im E_3): $\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) f(\cdot, t) = g(\cdot, t)$. "retardierte Zeit"

Mitteilung. Eine spezielle Lösung (mit $f \equiv 0$ für $g \equiv 0$) ist $f(p, t) = \int_{E_3} \frac{g(\cdot, t - \frac{1}{c} r_p(\cdot))}{4\pi r_p(\cdot)} dvol_3$.

Aufgabe: verifiziere diese Lösungsformel durch ähnliche Argumentation wie in 1D.

Bemerkung. Dieser 3D Ausdruck ist in gewissem Sinne "einfacher" als der entsprechende 1D Ausdruck, denn der Träger des 3D Integralkerns liegt im Rand der Lichtkegels (nicht im Lichtkegel insgesamt).

8 Lagrange-Mechanik

Bei der Untersuchung mechanischer Systeme ist es häufig nützlich, zu krummlinigen Koordinaten überzugehen, z.B. zum Zweck der Berücksichtigung von Zwangsbedingungen. Die Newtonschen Bewegungsgleichungen haben den Nachteil, nur in Galileischen Koordinatensystemen ihre einfache Gestalt $m\ddot{q}_j = F_j(q, \dot{q}, t)$ anzunehmen. In den folgenden Abschnitten entwickeln wir die Lagrange-Formulierung der Mechanik, mit der Lagrange-Funktion als zentraler Größe, die eine viel größere Freiheit in der **Koordinatenwahl** lässt. Insbesondere gestattet sie eine durchsichtige Formulierung des Zusammenhangs zwischen Symmetrien und Erhaltungssätzen (dessen Behandlung wir allerdings auf das Kapitel über die Hamilton-Mechanik verschieben). Ferner ist die Lagrange-Funktion die fundamentale Größe in der relativistisch kovarianten Formulierung der Quantenfeldtheorie.

8.1 Variationsrechnung

(Arnold, Seiten 55ff.) Die Variationsrechnung beschäftigt sich mit den Extrema von Funktionen, deren Definitionsbereich ein unendlich-dimensionaler Raum ist: eine Menge von Kurven. Solche Funktionen heißen **Funktionale**.

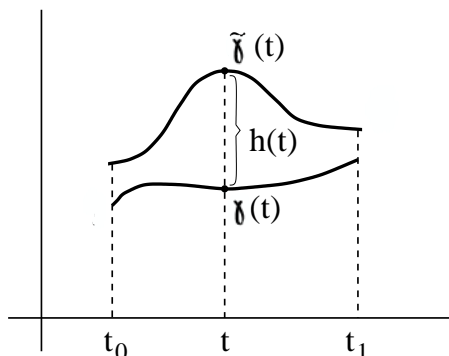
Beispiel. Als Beispiel für ein Funktional nennen wir die **Eigenzeit** des Minkowski-Modells der speziellen Relativitätstheorie. Dazu beobachten wir (aus der Sicht eines Inertialsystems) die Bewegung eines Teilchens $\gamma : I \rightarrow E_3$ im Zeitintervall $I = [t_0, t_1]$. Das Eigenzeit-Funktional ordnet der Bewegungskurve γ diejenige Zeit $\tau[\gamma]$ zu, die auf einer "inneren Uhr" des Teilchens während des Zeitintervalls $[t_0, t_1]$ des Beobachters verstreicht:

$$\tau[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 - |\dot{\gamma}(t)/c|^2} dt. \tag{8.1}$$

Im nichtrelativistischen Grenzfall ($|\dot{\gamma}| \ll c$) gilt $\tau[\gamma] = t_1 - t_0$ (absolute Zeit; unabhängig von γ). Für relativistische Geschwindigkeiten $|\dot{\gamma}| \sim c$ ist die Eigenzeit des Minkowski-Modells kleiner als die Zeitdifferenz $t_1 - t_0$ des Galilei-Modells.

Allgemeiner ist ein Funktional Φ eine Abbildung von einem Raum von Kurven nach \mathbb{R} .

Differenzierbarkeit. Dem Folgenden legen wir einen affinen Raum $(A, V \simeq \mathbb{R}^n, +)$ mit Normfunktion $|\cdot| : V \rightarrow \mathbb{R}$ zugrunde. Neben $\gamma : I \rightarrow A$ betrachten wir eine zweite Kurve $\tilde{\gamma} : I \rightarrow A$ und erklären $h : I \rightarrow V$ als die Differenzfunktion $h(t) = \tilde{\gamma}(t) - \gamma(t)$. Als Funktionenraum für



dieses **Inkrement** h wählen wir den Banachraum $C^0(I, V)$ aller stetigen beschränkten Funktionen $h : I \rightarrow V$ mit Norm $\|h\| = \sup_{t \in I} |h(t)|$. In diesem Kontext heißt ein Funktional Φ *differenzierbar* (in γ), wenn sich die Differenz $\Phi[\tilde{\gamma}] - \Phi[\gamma]$ wie

$$\Phi[\gamma + h] - \Phi[\gamma] = F[\gamma, h] + R[\gamma, h] \quad (8.2)$$

schreiben lässt, wobei F linear von h abhängt und R stärker als von erster Ordnung mit h gegen Null geht; d.h. falls $\|h\| < \varepsilon$, dann soll gelten: $|R[\gamma, h]| < C\varepsilon^\alpha$ mit $\alpha > 1$. Der lineare Anteil, F , heißt die **Variation** von Φ . Man schreibt auch $F[\gamma, h] = (D_\gamma \Phi)(h)$ und nennt $D_\gamma \Phi$ die **Funktionalableitung** von Φ in γ .

Mitteilung. Die Variation eines differenzierbaren Funktionals ist eindeutig bestimmt.

Wirkungsfunktional. Für die klassische Mechanik sind (Wirkungs-)Funktionale der Form

$$S[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t) dt \quad (8.3)$$

von Interesse, mit L einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $L : A \times V \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Wir starten den affinen Raum A ("Ortsraum") mit affinen Koordinaten $x_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ aus ($i = 1, \dots, n$). Die induzierten Koordinaten für V ("Geschwindigkeitsraum") bezeichnen wir mit $(dx_i)_a \equiv \dot{x}_i$ (unabhängig von $a \in A$). Unter der Bedingung $\gamma \in C^1(I, A)$ (also γ stetig differenzierbar) gilt:

Satz. Das Funktional $S[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma, \dot{\gamma}, t) dt$ ist differenzierbar und hat die Variation

$$F[\gamma, h] = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) h_i dt + \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} h_i \right) \Big|_{t_0}^{t_1}. \quad (8.4)$$

Bemerkung. Das Symbol $\frac{d}{dt}$ steht für die **totale Zeitableitung**, d.h. für die Ableitung nach der variablen Zeit der Kurve $t \mapsto \gamma(t)$:

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n h_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n h_i(t) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t) \right) dt. \quad (8.5)$$

Dagegen stehen $\partial L / \partial x_i$, $\partial L / \partial \dot{x}_i$, $\partial L / \partial t$ für die partiellen Ableitungen von L nach seinem ersten, zweiten bzw. dritten Argument.

Beweis des Satzes. Wir entwickeln das Wirkungsfunktional bis zur linearen Ordnung in h :

$$\begin{aligned} S[\gamma + h] - S[\gamma] &= \int_{t_0}^{t_1} \left(L(\gamma + h, \dot{\gamma} + \dot{h}, t) - L(\gamma, \dot{\gamma}, t) \right) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} h_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{h}_i \right) dt + \mathcal{O}(h^2). \end{aligned}$$

Hieraus liest man ab:

$$F[\gamma, h] = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} h_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{h}_i \right) dt \quad \text{und} \quad R[\gamma, h] = \mathcal{O}(h^2). \quad (8.6)$$

Partielles Integrieren liefert

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{h}_i dt = - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n h_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} dt + \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} h_i \right) \Big|_{t_0}^{t_1} \quad (8.7)$$

und somit die Behauptung.

Extremalität. Ein differenzierbares Funktional Φ heißt **extremal** in γ , wenn $F[\gamma, h]$ für alle h gleich Null ist. Hiermit kommt man zur folgenden Aussage.

Satz. Auf jeder eingeschränkten Menge von differenzierbaren Kurven, die durch zwei fest gewählte Punkte $\gamma(t_0) = a_0 \in A$ und $\gamma(t_1) = a_1 \in A$ laufen, ist das Funktional $S[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma, \dot{\gamma}, t) dt$ genau dann extremal in γ , wenn längs γ gilt

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (8.8)$$

Bemerkungen. Mit $T\gamma(t) := (\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t)$ lautet die Bedingung ausführlich geschrieben

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_i} \circ T\gamma \right) (t) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \circ T\gamma \right) (t) = 0, \quad t \in [t_0, t_1], \quad i = 1, \dots, n. \quad (8.9)$$

Eine Beweisrichtung des obigen Satzes (\Leftarrow) ist trivial. Der andere Schluss (\Rightarrow) folgt mit der Einschränkung an die zulässigen Kurven ($h(t_0) = h(t_1) = 0$) aus der Formel (8.4) zusammen mit

Fundamentallemma (der Variationsrechnung): Verschwindet für eine Funktion $f \in C^0(I, V^*)$ das Integral $\int_{t_0}^{t_1} \sum_i f_i(t) h_i(t) dt$ für alle $h \in C^\infty(I, V)$, so gilt $f \equiv 0$ (Nullfunktion).

Beispiel. Das Eigenzeit-Funktional des Minkowski-Modells ist $\tau[\gamma] = \int_I \sqrt{1 - |\dot{\gamma}/c|^2} dt$. Wir verifizieren, dass die Extrema von τ für fest vorgegebene Randpunkte ($\gamma(t_0) = a_0$ und $\gamma(t_1) = a_1$) gleichförmige und geradlinige Bewegungen sind. Wir haben $L(\gamma, \dot{\gamma}, t) = \sqrt{1 - |\dot{\gamma}/c|^2}$ und

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{-\dot{\gamma}_i/c^2}{\sqrt{1 - |\dot{\gamma}/c|^2}}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{-\ddot{\gamma}_i/c^2}{\sqrt{1 - |\dot{\gamma}/c|^2}} - \frac{\dot{\gamma}_i}{c^2} \frac{\sum \dot{\gamma}_j \ddot{\gamma}_j/c^2}{\sqrt{1 - |\dot{\gamma}/c|^2}^3}. \quad (8.10)$$

Wie man sieht, verschwinden diese Ausdrücke für $\ddot{\gamma} = 0$ (keine Beschleunigung). Umgekehrt folgt aus der Forderung der Extremalität von τ (bei fest gehaltenen Randpunkten)

$$0 = \sum_{i=1}^3 \dot{\gamma}_i \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = \frac{\langle \dot{\gamma}, \ddot{\gamma} \rangle / c^2}{\sqrt{1 - |\dot{\gamma}/c|^2}^3} \quad (8.11)$$

und somit $\langle \dot{\gamma}, \ddot{\gamma} \rangle = 0$. Nullsetzen des letzten Ausdrucks in (8.10) ergibt dann $\ddot{\gamma} = 0$.

Definition. Die Gleichungen (8.8) heißen die **Euler-Lagrange-Gleichungen** zum Funktional $S[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma, \dot{\gamma}, t) dt$. Der Ausdruck auf der linken Seite von (8.8) heißt die **Euler-Ableitung** von L .

8.2 Lagrange-Systeme

Es soll nun erläutert werden, was der Inhalt von Abschnitt 8.1 mit der klassischen Mechanik zu tun hat. Wir betrachten ein mechanisches System von N Punkten (alle im E_3) mit Massen

m_1, \dots, m_N an den Orten $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ und konservativen Kräften mit potentieller Energie $U : E_3^{(1)} \times \dots \times E_3^{(N)} \rightarrow \mathbb{R}$. Wir vergleichen die Newtonschen Bewegungsgleichungen

$$\langle m_i \ddot{\gamma}_i, \cdot \rangle = -d_i U \quad (i = 1, \dots, N) \quad (8.12)$$

mit den Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} \quad (i = 1, \dots, N) \quad (8.13)$$

zu einem noch zu definierenden Funktional

$$S[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma_1(t), \dots, \gamma_N(t), \dot{\gamma}_1(t), \dots, \dot{\gamma}_N(t), t) dt. \quad (8.14)$$

Hier verwenden wir die Schreibweise $\partial L / \partial \mathbf{r}_i = (\partial L / \partial x_{i,1}, \partial L / \partial x_{i,2}, \partial L / \partial x_{i,3})$ mit $x_{i,j} : E_3^{(i)} \rightarrow \mathbb{R}$ ($j = 1, 2, 3$) den kartesischen Koordinaten des i -ten Punkts. $\partial L / \partial \dot{\mathbf{r}}_i$ ist analog erklärt.

Hamiltonsches Prinzip der kleinsten Wirkung. Lösungen des mechanischen Systems (8.12) zu den Randwerten $\gamma_i(t_0) = a_0^{(i)}$ und $\gamma_i(t_1) = a_1^{(i)}$ ($i = 1, \dots, N$) sind Extrema des Funktionals $S = \int_{t_0}^{t_1} L dt$ (mit denselben Randwerten für die zulässigen Kurven), wobei $L = T - U$ die Differenz von kinetischer und potentieller Energie ist.

Begründung des Hamiltonschen Prinzips. Nach dem zweiten Satz von Abschnitt 8.1 ist lediglich zu verifizieren, dass die Gleichungen (8.12) und (8.13) äquivalent sind. Dies sieht man aber sofort aus $\partial L / \partial \dot{\mathbf{r}}_i \circ T\gamma = \langle m_i \dot{\gamma}_i, \cdot \rangle$ und $\partial L / \partial \mathbf{r}_i = -\partial U / \partial \mathbf{r}_i$ für $L \circ T\gamma = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\dot{\gamma}_i|^2 - U(\gamma_1, \dots, \gamma_N)$.

Definition. Die Größe $L = T - U$ heißt **Lagrange-Funktion**, das Integral $S = \int_{t_0}^{t_1} L dt$ **Wirkung**.

Bemerkungen. **(i)** Die Bezeichnung ‘Hamiltonsches Prinzip der kleinsten Wirkung hat historische Gründe. Besser wäre ‘Hamiltonsches Prinzip der extremalen Wirkung’. **(ii)** Dass die Formulierung des Prinzips der kleinsten Wirkung die Teilchenorte zu verschiedenen Zeiten vorgibt und festhält, widerspricht scheinbar dem Geist der Newtonschen Mechanik, wo ja der Anfangszustand, also alle Orte und Geschwindigkeiten zur Anfangszeit, vorzugeben sind. Eine tiefere Einsicht in den Sinn des Wirkungsprinzips gewinnt man erst im Licht der Feynmanschen Formulierung der Quantenmechanik. **(iii)** Der hier eingeführte Formalismus ist u.a. deshalb nützlich, weil sich die Bewegungsgleichungen für eine sehr große Klasse von mechanischen Systemen in der Form von Euler-Lagrange-Gleichungen zu einem Wirkungsfunktional mit Lagrange-Funktion L schreiben lassen.

Beispiel: Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld. Die Newtonschen Bewegungsgleichungen lauten hier

$$\langle m \ddot{\gamma}(t), \cdot \rangle = e E_{\gamma(t)} - e B_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \cdot), \quad (8.15)$$

wobei E (B) die elektrische (bzw. magnetische) Feldstärke ist. In der Elektrodynamik zeigt man, dass E und B sich folgendermaßen schreiben lassen:

$$B = dA, \quad E = -d\phi - \frac{\partial A}{\partial t}, \quad (8.16)$$

mit einer differenzierbaren Funktion ϕ (dem elektrischen Skalarpotential) und einer 1-Form A (dem Vektorpotential). Wir behaupten, dass

$$L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t) = \frac{m}{2} |\dot{\gamma}(t)|^2 - e\phi(\gamma(t), t) + e A_{\gamma(t), t}(\dot{\gamma}(t)) \quad (8.17)$$

als Lagrange-Funktion für dieses System taugt. Zum Nachweis stellen wir die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen durch explizite Rechnung in **kartesischen Koordinaten** x_1, x_2, x_3 auf:

$$(i) \quad \frac{\partial L}{\partial x_i} \circ T\gamma = -e \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + e \sum_{j=1}^3 \dot{\gamma}_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i}.$$

$$(ii) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \circ T\gamma = m\ddot{\gamma}_i + e \frac{d}{dt} A_i = m\ddot{\gamma}_i + e \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \dot{\gamma}_j + \frac{\partial A_i}{\partial t} \right).$$

Wie immer ist $\gamma_i = x_i \circ \gamma$ und $\dot{\gamma}_i(t) = (dx_i)_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))$. Die Gleichung $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i}$ lautet demnach

$$m\ddot{\gamma}_i = e \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) - e \sum_{j=1}^3 \dot{\gamma}_j \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \right) = eE_i - e \sum_j \dot{\gamma}_j B_{ji},$$

was mit der i -ten Komponente von (8.15) übereinstimmt.

Lagrange-Systeme. Wir betonen, dass sich nicht für alle mechanischen Systeme eine Lagrange-Funktion finden lässt. In dieser Vorlesung werden nur solche Systeme betrachtet, für die eine Lagrange-Funktion existiert. Solche Systeme nennen wir **Lagrange-Systeme**.

Wir fragen nun, wann zwei Lagrange-Funktionen L_1 und L_2 dieselben Euler-Ableitungen besitzen und somit zu denselben Euler-Lagrange-Gleichungen führen.

Satz. Die Euler-Ableitungen zweier Lagrange-Funktionen $L_1, L_2 : U \times \mathbb{R}^f \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit einfach zusammenhängendem Definitionsgebiet $U \subset \mathbb{R}^f$ sind genau dann identisch, wenn die Differenz $L_1 - L_2$ die totale Zeitableitung einer Funktion $M : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist.

Beweis. (\Leftarrow) Sei $L_1 - L_2 = dM/dt$. Integration über die Zeit liefert

$$\int_{t_a}^{t_b} L_1 dt = \int_{t_a}^{t_b} L_2 dt + M \Big|_{t_a}^{t_b}.$$

Die Euler-Ableitung einer Lagrange-Funktion L ist gegeben durch die Variation des Funktionals $\int_{t_a}^{t_b} L dt$ unter der Nebenbedingung, dass am Rand $t \in \{t_a, t_b\}$ nicht variiert wird. Wegen dieser Bedingung trägt der Term $M \Big|_{t_a}^{t_b}$ nicht zur Euler-Ableitung bei, und es folgt sofort die Behauptung.

(\Rightarrow) Sei jetzt die Euler-Ableitung von $G := L_1 - L_2$ gleich Null. Als Konsequenz des ersten Satzes von Abschnitt 8.1 ist dann das Integral

$$\int_{t_a}^{t_b} G(\gamma(t) + h(t), \dot{\gamma}(t) + \dot{h}(t), t) dt$$

von h unabhängig, vorausgesetzt es gilt $h(t_a) = h(t_b) = 0$. Diese Unabhängigkeit ermöglicht die Einführung einer **Stammfunktion** M für G . Dazu fixieren wir eine Anfangszeit t_a und einen

Anfangsort q_a . Für beliebige Enddaten (t_b, q_b) wählen wir dann irgendeine differenzierbare Kurve $t \mapsto \gamma(t)$ mit $\gamma(t_a) = q_a$ und $\gamma(t_b) = q_b$ und setzen

$$M(q_b, t_b) := \int_{t_a}^{t_b} G(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t) dt.$$

Auf diese Weise wird eine Funktion $M : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ erklärt. Für die totale Zeitableitung dieser Funktion gilt $dM/dt = L_1 - L_2$, denn

$$\frac{d}{dt}M(\gamma(t), t) = \frac{d}{dt} \int_{t_a}^t G(\gamma(\tau), \dot{\gamma}(\tau), \tau) d\tau = G(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t).$$

Beispiel: Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld. Die durch (8.16) gegebenen Felder E und B bleiben unter sogenannten **Eichtransformationen**

$$A \mapsto A + d\chi, \quad \phi \mapsto \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (8.18)$$

(χ zweimal differenzierbar, sonst beliebig) ungeändert, was man mit $d^2 = 0$ und $d \circ \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \circ d = 0$ sofort einsieht. Die Lagrange-Funktion (8.17) ändert sich dabei um eine totale Zeitableitung:

$$L \mapsto L + e \left(\frac{\partial \chi}{\partial t} + \sum \frac{\partial \chi}{\partial x_j} \dot{\gamma}_j \right) = L + e \frac{d\chi}{dt}, \quad (8.19)$$

weshalb die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen unter Eichtransformationen invariant sind. In (8.15), wo nur die **“eichinvarianten”** Größen E und B eingehen, ist diese Eigenschaft explizit.

Notation. Bislang haben wir zwischen den Koordinatenfunktionen für Ort ($x_i : E_3 \rightarrow \mathbb{R}$) und Geschwindigkeit ($\dot{x}_i : V \simeq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$) und den Komponenten einer Bahnkurve [$\gamma_i(t) = (x_i \circ \gamma)(t)$] und deren Geschwindigkeit [$\dot{\gamma}_i(t) = \frac{d}{dt}(x_i \circ \gamma)(t) = (dx_i)_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))$] sorgfältig unterschieden. Wir werden uns jetzt dem üblichen Gebrauch anpassen und diese Unterscheidung nicht länger strikt aufrecht erhalten. Für die Orte eines Lagrange-Systems mit f Freiheitsgraden schreiben wir in der Regel $q \equiv (q_1, \dots, q_f)$ und meinen damit je nach Kontext ganz simpel den Ort oder aber die Orts-Koordinatenfunktionen oder aber die Komponenten des Ortsvektors einer Bahnkurve $t \mapsto \gamma(t)$. Für die Geschwindigkeiten eines Lagrange-Systems mit f Freiheitsgraden schreiben wir i.d.R. $\dot{q} \equiv (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f)$ und meinen damit je nach Kontext die Geschwindigkeit oder die Koordinatenfunktionen der Geschwindigkeit oder die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors $\dot{\gamma}(t)$ der Bahnkurve.

8.3 Invarianz unter Punkttransformationen

Wie verhalten sich die Euler-Lagrange-Gleichungen unter **Koordinatenwechsel**? Als grundlegende Eigenschaft verlangen wir von jeder Lagrange-Funktion, dass sie eine koordinatenunabhängige Bedeutung hat. Für die schon angesprochenen Beispiele, insbesondere für $L = T - U$, ist diese Eigenschaft offensichtlich. Wir deklarieren sie hier als allgemeines Prinzip.

Die koordinatenfreie Bedeutung der Lagrange-Funktion L überträgt sich auf das Wirkungsfunktional $S = \int L dt$. Die Euler-Lagrange-Gleichungen folgen aus $S = \int L dt$ per Variation

unter Nebenbedingungen. Da auch die letztere Operation koordinatenfrei erklärt ist, haben die Euler-Lagrange-Gleichungen immer dieselbe Form, unabhängig von der Wahl der Koordinaten.

Punkttransformationen. Eine Abbildung $U \times \mathbb{R} \rightarrow U \times \mathbb{R}$ der Form $(q, t) \mapsto (\varphi(q, t), t)$ heißt *Punkttransformation*. Nach dem oben Gesagten behalten die Euler-Lagrange-Gleichungen unter Punkttransformationen ihre Form.

Beispiel. Teilchen im Zentralkraftfeld, $L = \frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{x}}|^2 - U(|\mathbf{x}|)$, in zwei Dimensionen. Die Einführung von ebenen Polarkoordinaten durch

$$x_1 = r \cos \phi, \quad x_2 = r \sin \phi,$$

führt auf $L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - U(r)$. Die Euler-Lagrange-Gleichungen in diesen Koordinaten sind

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} &= 0 = m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 + U'(r) \quad \text{und} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} &= 0 = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}). \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung besagt, dass der Drehimpuls $l = mr^2\dot{\phi}$ erhalten ist. Wenn wir $\dot{\phi} = l/mr^2$ in die erste Gleichung einsetzen, dann entsteht

$$m\ddot{r} + V'(r) = 0 \quad \text{mit} \quad V(r) = U(r) + \frac{l^2}{2mr^2}.$$

Dies ist die in Abschn. 1.9 ausführlich diskutierte Bewegungsgleichung für die Radialkoordinate r .

Terminologie. Wir vereinbaren die folgende Sprechweise. Ist $L(q, \dot{q}, t)$ die Lagrange-Funktion eines mechanischen Systems, so nennen wir q_k ($k = 1, \dots, f$) *verallgemeinerte Koordinaten*, \dot{q}_k *verallgemeinerte Geschwindigkeiten*, $\partial L / \partial \dot{q}_k =: p_k$ *verallgemeinerte Impulse* und $\partial L / \partial q_k$ *verallgemeinerte Kräfte*. Eine verallgemeinerte Koordinate heißt *zyklisch*, wenn die Lagrange-Funktion von ihr unabhängig ist.

Im obigen Beispiel ist der verallgemeinerte Impuls zur Winkelkoordinate ϕ gerade der Drehimpuls. Wie man dort sehen konnte, folgt aus der Winkelunabhängigkeit von L die Erhaltung des Drehimpulses. Dies ist ein allgemeines Resultat: der verallgemeinerte Impuls p_k zu einer zyklischen Koordinate q_k ist erhalten ($p_k = \text{const}$), denn

$$\dot{p}_k = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0. \quad (8.20)$$

8.4 Zwangsbedingungen

In vielen physikalischen Systemen lässt sich eine grobe Einteilung der wirkenden Kräfte in zwei Kategorien vornehmen: “stark” und “schwach”. Zum Beispiel sind die chemischen Bindungskräfte zwischen den Kohlenstoffatomen eines Diamanten sehr viel stärker als die auf die Einzelatome wirkende gravitative Anziehung durch die Erde. Wie man in einem solchen Fall, wo eine klare Trennung zwischen “starken” und “schwachen” Kräften vorliegt, vorzugehen hat, ist Thema des gegenwärtigen Abschnitts.

Wir wollen von der Annahme ausgehen, dass infolge der Wirkung der “starken” Kräfte die Bewegung eines Teils der Freiheitsgrade des mechanischen Systems auf eine sehr kleine Umgebung eines bestimmten Unterraums des Phasenraums eingeschränkt wird. Zum Beispiel ändern sich unter normalen Bedingungen die Abstände zwischen den Kohlenstoffatomen in einer Diamantstruktur nur geringfügig als Funktion der Zeit, wogegen der Diamant als ganzes relativ leicht beweglich ist. In diesem Fall ist es eine für viele Zwecke vernünftige mathematische Idealisierung, den Grenzübergang zu unendlich starken Bindungskräften durchzuführen und die Relativbewegung der Kohlenstoffatome überhaupt zu unterdrücken.

Das Beispiel des Diamanten deutet einen allgemeinen Mechanismus an, wie “starke” Kräfte zu einer Einschränkung der Bewegung der konstituierenden Massenpunkte führen. Ein einfaches und pragmatisches Vorgehen besteht nun darin, die Einschränkung der Bewegung durch die Vorgabe von sogenannten **Zwangsbedingungen** zu bewerkstelligen. Im genannten Beispiel würde man als die Zwangsbedingungen die Gesamtheit aller Bedingungen wählen, die die Relativpositionen aller Kohlenstoffatome festsetzen. Weitere Beispiele für mechanische Systeme, bei denen sich eine Behandlung mittels Zwangsbedingungen empfiehlt, sind:

- (i) Die Bewegung eines Punkts (oder mehrerer Punkte) verläuft auf einer vorgegebenen Fläche.
- (ii) Gasteilchen, die in ein Volumen eingeschlossen sind.

Im Folgenden steht n für die Zahl der Freiheitsgrade vor Berücksichtigung der Zwangsbedingungen (also $n = 3N$ für ein System von N Punkten im \mathbb{R}^3). Wir bezeichnen mit $A \subset \mathbb{R}^n$ den Ortsraum des mechanischen Systems ohne Zwangsbedingungen und mit $x_1, \dots, x_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ die Gesamtheit der Koordinaten.

Definition. Eine (zeitunabhängige) Zwangsbedingung heißt **holonom**, wenn sie sich als Gleichung

$$f = 0 \tag{8.21}$$

mit einer Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ausdrücken lässt. Für die weitere Behandlung (s.u.) verlangen wir zudem, dass f differenzierbar ist und das Differential $(df)_a$ für kein $a \in f^{-1}(0)$ verschwindet.

Beispiel. Das ebene Pendel unterliegt der holonomen Zwangsbedingung $f = x_1^2 + x_2^2 - l^2 = 0$. Das Differential $df = 2(x_1 dx_1 + x_2 dx_2)$ ist überall auf der Kreislinie $f = 0$ ungleich Null.

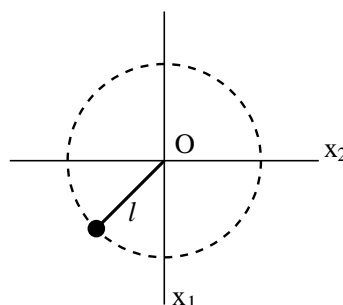
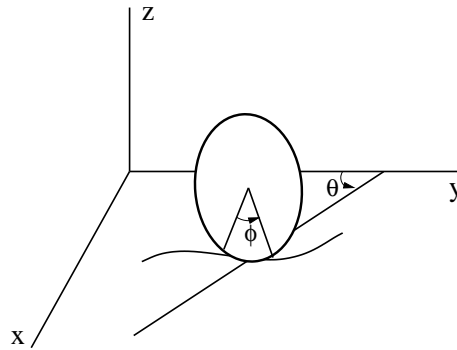


Figure 1: Ebenes Pendel

Kontrastbeispiel (rollende Scheibe). In dieser Vorlesung werden nur holonome Zwangsbedingungen diskutiert. Ein einfaches Beispiel für ein System mit **nicht-holonomen** Zwangsbedingungen ist das folgende (s. Goldstein, Mechanik). Betrachten wir eine Scheibe, die auf der horizontalen xy -Ebene rollt. Sie sei gezwungen, sich so zu bewegen, dass die Ebene der Scheibe stets vertikal ist. (Die Scheibe könnte eines von zwei Rädern sein, die auf einer gemeinsamen Achse angebracht sind.) Zur Beschreibung der Bewegung kann man als Koordinaten die zwei Koordinaten x, y des Scheibenzentrums, einen Drehwinkel ϕ um die Scheibenachse und den Winkel θ zwischen Scheibenachse und, sagen wir, der y -Achse wählen.



Vertikale Scheibe, die auf einer horizontalen Ebene rollt.

Infolge des Zwangs (die Scheibe rolle ohne Schlupf) ist der Betrag der Geschwindigkeit des Scheibenzentrums proportional zu $\dot{\phi}$: $v = a\dot{\phi}$, wobei a der Radius der Scheibe ist. Der Geschwindigkeitsvektor steht senkrecht zur Scheibenachse: $\dot{x} = v \cos \theta$, $\dot{y} = v \sin \theta$. Kombinieren wir diese Bedingungen, so erhalten wir zwei Differentialgleichungen als Zwangsbedingungen:

$$dx - a \cos \theta d\phi = 0, \quad dy - a \sin \theta d\phi = 0, \quad (8.22)$$

und diese können nicht integriert werden, ehe man das vollständige Problem tatsächlich gelöst hat. Solche **nichtintegrierbaren** Zwangsbedingungen sind nur spezielle Fälle nichtholonomer Zwangsbedingungen; die Zwangsbedingungen können auch in Form von Ungleichungen auftreten.

Rangbedingung. Im allgemeinsten hier betrachteten Fall liegen r holonome Zwangsbedingungen vor:

$$f_1 = \dots = f_r = 0. \quad (8.23)$$

Die Funktionen $f_k : A \rightarrow \mathbb{R}$ seien genügend oft stetig differenzierbar. Wir wollen annehmen, dass die Zwangsbedingungen unabhängig sind, d.h. es gelte

$$\{(df_1)_a, \dots, (df_r)_a\} \quad \text{linear unabhängig} \quad (8.24)$$

für alle Stellen $a \in A$ im Lösungsraum von (8.23).

Zwangskräfte. Vom Newtonschen Standpunkt aus gesehen signalisiert die Existenz von Zwangsbedingungen die Anwesenheit von sogenannten **Zwangskräften**, die dafür sorgen, dass die Bewegung des mechanischen Systems auf der durch (8.23) festgelegten Teilmenge von $A \subset \mathbb{R}^n$ verläuft.

Gäbe es diese Kräfte nämlich nicht und verschwänden auch alle anderen Kräfte, so wäre die Bewegung der Punkte gleichförmig und geradlinig und könnte im allgemeinen nicht die Bedingungen (8.23) erfüllen.

Idealisierung. Die Zwangskräfte sind per Postulat *idealer* Natur: sie leisten keine Arbeit, d.h. sie “stehen senkrecht” auf der durch (8.23) ausgezeichneten Teilmenge des \mathbb{R}^n , auf der die Bewegung verläuft. (Eine präzise Formulierung dieses Sachverhalts wird unten im d’Alembertschen Prinzip gegeben.) Bezeichnen wir die Summe der inneren und/oder äußeren Kräfte, die das mechanische System antreiben, mit F und die Zwangskräfte mit Z , so lauten die Newtonschen Bewegungsgleichungen

$$m_k \ddot{x}_k = F_k + Z_k \quad (k = 1, \dots, n). \quad (8.25)$$

Die Notation ist hier so gewählt, dass für ein System von N Punkten im \mathbb{R}^3 ($n = 3N$) gilt: $m_1 = m_2 = m_3 =$ Masse des ersten Punkts, $m_4 = m_5 = m_6 =$ Masse des zweiten Punkts usw.

Beispiel. Beim ebenen Pendel wirkt zusätzlich zur Schwerkraft F eine Zwangskraft Z in Richtung der Pendelachse; genauer: die Ebenen der Kraftform Z liegen tangential zum Kreis des Pendels, und zwar mit solcher Stärke, dass die entsprechenden Ebenen von F genau neutralisiert werden.

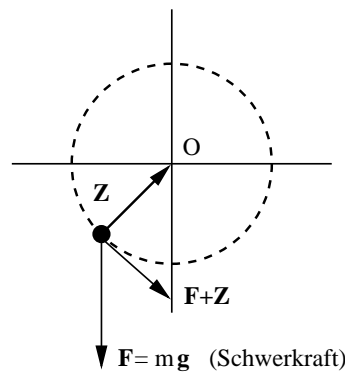


Figure 2: Ebenes Pendel (nochmal)

Reduktion. Die Beschreibung der Bewegung des Systems anhand der Gleichungen (8.25) ist unökonomisch: sie erfordert mehr Koordinaten als wegen der Existenz der Zwangsbedingungen (8.23) nötig ist, und sie involviert die (zunächst) unbestimmten Funktionen Z_k . Es liegt auf der Hand, welches Ziel man hier verfolgen sollte: man wird versuchen, zu $f = n - r$ Bewegungsgleichungen für f verallgemeinerte Koordinaten überzugehen, wo die Zwangskräfte nicht mehr in Erscheinung treten. Für den Fall holonomer Zwangsbedingungen lässt sich dieses Ziel in der Tat erreichen. Wir geben zunächst die Vorschrift an, nach der man in der Praxis vorgeht, und schicken eine Begründung hinterher.

Gebrauchsanweisung. Gegeben sei ein System mit Lagrange-Funktion $L : A \times V \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Wir bezeichnen mit M die Lösungsmenge der holonomen Zwangsbedingungen (8.23),

$$M := \{a \in A \mid f_k(a) = 0; k = 1, \dots, r\}. \quad (8.26)$$

(A) **Parametrisiere** M durch eine differenzierbare Abbildung $\varphi : U \rightarrow M$ mit $U \subset \mathbb{R}^f$, $f = n - r$; d.h. $(f_k \circ \varphi)(q) = 0$ für alle $q \in U$ und $k = 1, \dots, r$. [Dies funktioniert im allgemeinen nur **lokal**. Die lokale Existenz von φ aber ist durch den Satz über implizit definierte Funktionen und die Rangbedingung (8.24) gesichert.]

(B) Eine Kurve $\gamma : I \rightarrow U$ wird durch φ in eine Kurve $\varphi \circ \gamma$ in M abgebildet. Definiere die Lagrange-Funktion des Systems mit Zwangsbedingungen, $\bar{L} : U \times \mathbb{R}^f \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, durch

$$\bar{L}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t) := L((\varphi \circ \gamma)(t), \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma)(t), t). \quad (8.27)$$

(C) Wähle einen Satz von Koordinatenfunktionen $q_1, \dots, q_f : U \rightarrow \mathbb{R}$ and stelle die Euler-Lagrange-Gleichungen zu \bar{L} auf:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial \bar{L}}{\partial q_k} \quad (k = 1, \dots, f). \quad (8.28)$$

Bemerkung: Folgt man dieser Vorschrift, so sind die Zwangsbedingungen identisch erfüllt, und die Einführung von Zwangskräften erübrigt sich.

Beispiel: Ebenes Pendel. Hierunter verstehen wir bekanntlich einen Punkt mit Masse m , der sich unter dem Einfluss der Schwerkraft auf einer Kreislinie M im \mathbb{R}^2 bewegt. O.B.d.A. wählen wir M als die Lösungsmenge der Gleichung $x_1^2 + x_2^2 - l^2 = 0$. Zur Implementierung dieser Zwangsbedingung parametrisieren wir M durch Skalierung als Bild der Einheitskreises $S^1 = \{q \in \mathbb{R}^2 \mid |q|^2 = 1\}$:

$$\varphi : S^1 \rightarrow M, \quad q \mapsto lq. \quad (8.29)$$

Die Lagrange-Funktion $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + mgx_1$ reduziert sich dann zu

$$\bar{L}(q, \dot{q}, t) = L(lq, l\dot{q}, t) = \frac{1}{2}ml^2|\dot{q}|^2 + mglq_1. \quad (8.30)$$

Als Koordinatenfunktion für S^1 empfiehlt sich ein **Winkel** θ , sagen wir $q_1 = \cos \theta$, $q_2 = \sin \theta$. Mit dieser Koordinatenwahl wird die reduzierte Lagrange-Funktion ausgedrückt durch

$$\bar{L} = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta. \quad (8.31)$$

Die Bewegungsgleichung für θ ist die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial \theta} = 0 = ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin \theta.$$

Äquivalent gilt $\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin \theta$ mit $\omega = \sqrt{g/l}$.

8.5 Begründung der Gebrauchsanweisung

In diesem Abschnitt begründen wir, warum die Gebrauchsanweisung richtig ist (Arnold, Seiten 91ff.). Der Einfachheit halber betrachten wir ein autonomes System mit Lagrange-Funktion

$$L = \frac{m}{2}|\dot{x}|^2 - U(x), \quad |\dot{x}|^2 = \sum_{k=1}^n \dot{x}_k^2. \quad (8.32)$$

Wie zuvor gelten die r zeitunabhängigen holonomen Zwangsbedingungen (8.23). Die Newtonschen Bewegungsgleichungen (8.25) für eine Bahnkurve $t \mapsto \Gamma(t)$ lauten in diesem Fall

$$\langle m\ddot{\Gamma}(t), \cdot \rangle + (dU)_{\Gamma(t)} = Z_{\Gamma(t)}, \quad (8.33)$$

mit Z der Zwangskraft.

Tangentialraum. Zu jedem Punkt $a \in M$ im Lösungsraum der Zwangsbedingungen definieren wir jetzt einen linearen Raum,

$$T_a M := \{ \xi \in \mathbb{R}^n \mid (df_k)_a(\xi) = 0; k = 1, \dots, r \}. \quad (8.34)$$

$T_a M$ heißt der **Tangentialraum** an die differenzierbare Mannigfaltigkeit M im Punkt a .

D'Alembertsches Prinzip: *die Zwangskräfte leisten keine virtuelle Arbeit,*

$$Z_a(\xi) = 0 \quad \text{für alle } \xi \in T_a M. \quad (8.35)$$

Im Visualisierungsbild für Linearformen können wir auch sagen, dass die (Hyper-)Ebenenschar der Zwangskraft Z in jedem Punkt $a \in M$ tangential zu M liegt.

Bemerkung. Das d'Alembertsche Prinzip lässt sich nicht aus (8.23) und (8.25) deduzieren, sondern muss hier als zusätzliches physikalisches Postulat investiert werden. Es impliziert, dass das System auf dem durch die Zwangsbedingungen (8.23) eingeschränkten Konfigurationsraum, nämlich auf M , **„ideal gleitet“**, dass also insbesondere Reibungsverluste – die ja in realen Systemen immer vorliegen – vernachlässigbar sind. Mit (8.33) können wir anstelle von (8.35) auch schreiben:

$$\langle m\ddot{\Gamma}(t), \xi \rangle + (dU)_{\Gamma(t)}(\xi) = 0 \quad \text{für alle } \xi \in T_{\Gamma(t)} M. \quad (8.36)$$

Tangentialabbildung. Sei nun $\varphi : U \rightarrow M$, $q \mapsto \varphi(q)$ die parametrisierende Abbildung von Schritt (A) der Gebrauchsanweisung, und

$$\begin{aligned} T\varphi : U \times \mathbb{R}^f &\rightarrow TM \\ (q, \dot{q}) &\mapsto (\varphi(q), D_q \varphi(\dot{q})) \end{aligned} \quad (8.37)$$

die zugehörige **Tangentialabbildung**. Wie in Schritt (B) bilden wir

$$\bar{L} := L \circ T\varphi. \quad (8.38)$$

Satz. Sei $\gamma : I \rightarrow U$ eine differenzierbare Kurve und $\Gamma = \varphi \circ \gamma : I \rightarrow M$ ihr Bild unter φ . Für $I = [t_0, t_1]$ schreiben wir $\gamma(t_j) = q^{(j)} \in U$ und $\Gamma(t_j) = a^{(j)} \in M$ ($j = 0, 1$). Dann sind die folgenden Aussagen zueinander äquivalent:

(i) Das Wirkungsfunktional $\bar{S}[\gamma] := \int_{t_0}^{t_1} \bar{L}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt$ ist extremal in γ auf der durch $\gamma(t_0) = q^{(0)}$ und $\gamma(t_1) = q^{(1)}$ eingeschränkten Kurvenmenge.

(ii) Das d'Alembertsche Prinzip (8.36) ist erfüllt.

Bemerkung: Es wird also die Äquivalenz des d'Alembertschen Prinzips zum Hamiltonschen Prinzip der kleinsten Wirkung (für die Bewegung auf TM) behauptet.

Beweis des Satzes. Die Extremalität von \bar{S} in γ bedeutet

$$0 = D_\gamma \bar{S}(h) := \frac{d}{d\varepsilon} \int_{t_0}^{t_1} \bar{L}(\gamma(t) + \varepsilon h(t), \dot{\gamma}(t) + \varepsilon \dot{h}(t)) dt \Big|_{\varepsilon=0}.$$

Um diese Bedingung auszuwerten, gehen wir zu $\Gamma = \varphi \circ \gamma$ über:

$$\begin{aligned} \varphi(\gamma(t) + \varepsilon h(t)) &= \Gamma(t) + \varepsilon \xi(t) + O(\varepsilon^2), \\ \dot{\varphi}(\gamma(t) + \varepsilon h(t)) &= \dot{\Gamma}(t) + \varepsilon \dot{\xi}(t) + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

wobei $\xi(t) := (D_{\gamma(t)} \varphi)(h(t))$. Dann entsteht:

$$\begin{aligned} 0 = D_\gamma \bar{S}(h) &= \frac{d}{d\varepsilon} \int_{t_0}^{t_1} L(\Gamma(t) + \varepsilon \xi(t), \dot{\Gamma}(t) + \varepsilon \dot{\xi}(t)) dt \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \frac{d}{d\varepsilon} \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{1}{2} m |\dot{\Gamma} + \varepsilon \dot{\xi}|^2 - U(\Gamma + \varepsilon \xi) \right) dt \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} (\langle m \dot{\Gamma}, \dot{\xi} \rangle - (dU)_\Gamma(\xi)) dt \\ &\stackrel{\xi(t_0)=\xi(t_1)=0}{=} - \int_{t_0}^{t_1} (\langle m \ddot{\Gamma}, \xi \rangle + (dU)_\Gamma(\xi)). \end{aligned} \quad (8.39)$$

Da $h(t)$ beliebig gewählt werden kann, ist auch $\xi(t) \in T_{\Gamma(t)}M$ beliebig. Damit folgt aus dem Verschwinden des Ausdrucks in (8.39) das d'Alembertsche Prinzip in der Form von Gleichung (8.36) und somit die Äquivalenz von (i) und (ii). ■

Hiermit ist aber jetzt die Richtigkeit der Gebrauchsanweisung gezeigt, denn aus dem Hamiltonschen Extremalprinzip für \bar{S} , (i), folgen die Euler-Lagrange-Gleichungen (8.28).

8.6 Parametrische Resonanz

Modell einer Schaukel. Wenn die Parameter eines Systems periodisch von der Zeit abhängen, dann kann eine Gleichgewichtslage instabil sein, selbst wenn sie für jeden festen Wert der Parameter stabil ist. Diese Instabilität ermöglicht das Aufschaukeln auf z.B. einer **Kinderschaukel**, wie im Folgenden gezeigt werden soll. Dazu betrachten wir den eindimensionalen, harmonischen Oszillator mit periodisch variierender Frequenz,

$$\ddot{q} + \omega^2(t) q = 0, \quad \omega(t+T) = \omega(t), \quad (8.40)$$

oder das äquivalente Hamiltonsche System (mit Masse $m = 1$)

$$\dot{q} = p, \quad \dot{p} = -\omega^2(t) q, \quad \omega(t+T) = \omega(t). \quad (8.41)$$

Gleichung (8.40) ist ein einfaches Modell für die Schaukel: ein Pendel mit periodisch variierender Länge $l(t)$ und zugehöriger Frequenz $\omega(t) = \sqrt{g/l(t)}$.

Sei $\phi_t \equiv \phi_{t,0}$ der Fluss des Hamiltonschen Systems (8.41). Da das System nichtautonom ist, gilt im allgemeinen keine Gruppeneigenschaft: $\phi_t \circ \phi_s \neq \phi_{t+s}$. Jedoch gilt immerhin $\phi_T \circ \phi_t = \phi_{T+t}$,

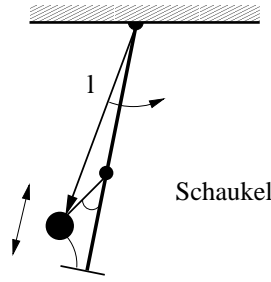
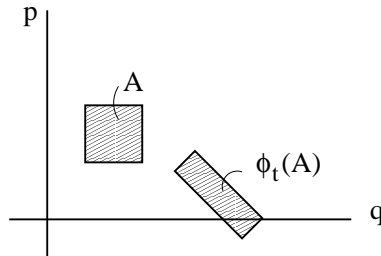


Figure 3: Schaukel

denn $\phi_{T+t,0} = \phi_{T+t,T} \circ \phi_{T,0}$ und $\phi_{T+t,T} = \phi_{t,0}$ als Konsequenz der Periodizität. Hieraus folgt insbesondere $\phi_{nT} = (\phi_T)^n$. Beachte auch, dass ϕ_t linear ist: $\phi_t^*(q, p) = (a_t q + b_t p, c_t q + d_t p)$. Wir schreiben $J_t := \begin{pmatrix} a_t & b_t \\ c_t & d_t \end{pmatrix}$.

Liouvillescher Satz. Der Fluss ϕ_t ist **flächentreu**, d.h. $\int_{\phi_t(A)} dp \wedge dq = \int_A dp \wedge dq$.



Beweis. Setze $\Omega(t) := \int_{\phi_t(A)} dp \wedge dq$. Dann gilt nach dem Transformationssatz

$$\Omega(t) = \int_A \phi_t^*(dp \wedge dq) = \text{Det}(J_t) \int_A dp \wedge dq. \quad (8.42)$$

Bis zur linearen Ordnung in t ist der Fluss gegeben durch

$$\phi_t^*(q, p) = (q + pt, p - \omega^2(0)qt) + \mathcal{O}(t^2). \quad (8.43)$$

Wir haben also

$$J_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ -\omega^2(0)t & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(t^2) \quad (8.44)$$

und somit $\text{Det}(J_t) = 1 + \mathcal{O}(t^2)$. Es folgt: $\left. \frac{d}{dt} \Omega(t) \right|_{t=0} = 0$.

Nun ist aber der Zeitpunkt $t = 0$ durch nichts ausgezeichnet, und mit der gleichen Argumentation zeigt man für $t = t_0$ beliebig: $\left. \frac{d}{dt} \Omega(t) \right|_{t=t_0} = 0$. Folglich ist $\Omega(t) = \Omega(0) = \text{const}$.

Stabilität. Eine lineare Transformation $J : V \rightarrow V$ eines normierten Vektorraums V heißt **stabil**, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $v \in V$ mit Länge $|v| < \delta$ gilt: $|J^n v| < \varepsilon$.

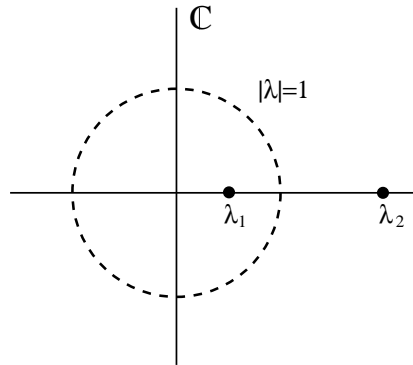
Die Gleichgewichtslage $q = 0, p = 0$ ist ein Fixpunkt des linearen Flusses ϕ_t , und wir fragen jetzt nach der Stabilität dieser Gleichgewichtslage. Dazu betrachten wir die Flussmatrix J_t für $t = nT$ und benützen $J_{nT} = J_T^n$ ($n \in \mathbb{N}$) sowie die flächenerhaltende Eigenschaft von $J_T \equiv J$.

Satz. Sei J eine lineare, flächentreue Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Dann ist die Abbildung stabil, falls $|\text{Tr } J| < 2$, und sie ist instabil, falls $|\text{Tr } J| > 2$.

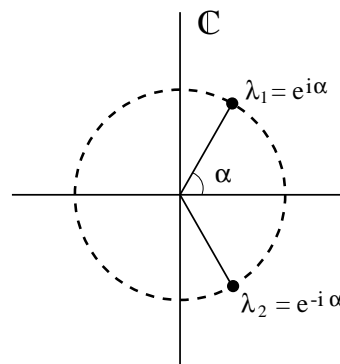
Beweis. Seien λ_1 und λ_2 die Eigenwerte von J . Sie genügen der charakteristischen Gleichung $\lambda^2 - \lambda(\text{Tr } J) + \text{Det } J = 0$. Da J flächentreu ist, gilt $\text{Det } J \equiv 1$. Die Wurzeln der quadratischen Gleichung ergeben sich somit zu

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(\text{Tr } J \pm \sqrt{(\text{Tr } J)^2 - 4}). \quad (8.45)$$

Für $|\text{Tr } J| > 2$ liegen zwei reelle Eigenwerte vor, einer dem Betrag nach kleiner als Eins, der andere dem Betrag nach größer als Eins. Die Abbildung ist dann **instabil**.



Für $|\text{Tr } J| < 2$ liegen die Eigenwerte auf dem Einheitskreis in der komplexen λ -Ebene: $1 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \lambda_1 \bar{\lambda}_1$. Die Abbildung ist in diesem Fall **stabil**. ■



Aufgrund von $J_{nT} = J_T^n$ reduziert sich die Stabilitätsanalyse nach dem obigen Satz auf die Berechnung von $\text{Tr } J_T$. Diese Berechnung lässt sich nur in Spezialfällen explizit durchführen.

Schwache Störung. Wir betrachten hier den Grenzfall einer schwachen Störung,

$$\omega(t) = (1 + \varepsilon f(t)) \omega, \quad f(t) = f(t + T), \quad \varepsilon \text{ klein.} \quad (8.46)$$

In diesem Fall gewinnt man bereits durch die Betrachtung des zeitunabhängigen Systems ($\varepsilon = 0$) eine wesentliche Einsicht. Für $\varepsilon = 0$ ist $\phi_T^*(q, p) = (q \cos \omega T + \frac{p}{\omega} \sin \omega T, -q \omega \sin \omega T + p \cos \omega T)$, und

$$J_T = \begin{pmatrix} \cos \omega T & (1/\omega) \sin \omega T \\ -\omega \sin \omega T & \cos \omega T \end{pmatrix}. \quad (8.47)$$

Man sieht: $|\text{Tr } J_T| = 2|\cos \omega T| \leq 2$. Da $|\text{Tr } J_T|$ stetig von ε abhängt, hat jeder Punkt $(T, 0)$ in der $T\varepsilon$ -Ebene mit $0 < T \neq \frac{\pi n}{\omega}$ ($n \in \mathbb{N}$) eine offene Umgebung, in der $|\text{Tr } J_T| < 2$ gilt. Man spricht dann von **starker Stabilität**.

Für $\omega T = \pi n$ ($n \in \mathbb{N}$), also $|\cos \omega T| = 1$, kann jedoch bereits eine infinitesimale Störung zu $|\text{Tr } J_T| > 2$, also zu Instabilität, führen. Dies sieht man explizit im folgenden

Beispiel. Betrachte eine **stückweise konstante** Störung:

$$f(t) = \begin{cases} +1/\omega & \text{für } 0 < t < T/2, \\ -1/\omega & \text{für } T/2 < t < T. \end{cases} \quad (8.48)$$

(So ruckartig schaukelt kein Kind, aber das Ergebnis ist qualitativ dasselbe.) Aus dem obigen Ergebnis sehen wir:

$$J_T = A_2 A_1, \quad A_k = \begin{pmatrix} \cos(\omega_k T/2) & (1/\omega_k) \sin(\omega_k T/2) \\ -\omega_k \sin(\omega_k T/2) & \cos(\omega_k T/2) \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2), \quad (8.49)$$

mit $\omega_1 = \omega + \varepsilon$, $\omega_2 = \omega - \varepsilon$. Der **Rand der stabilen Zone** ist die Lösungsmenge der Gleichung

$$2 = |\text{Tr } J_T| = \left| 2 \cos(\omega_1 T/2) \cdot \cos(\omega_2 T/2) - \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) \sin(\omega_1 T/2) \cdot \sin(\omega_2 T/2) \right|. \quad (8.50)$$

Nach einigen Umformungen entsteht hieraus die Gleichung

$$|\omega^2 \cos \omega T - \varepsilon^2 \cos \varepsilon T| = \omega^2 - \varepsilon^2. \quad (8.51)$$

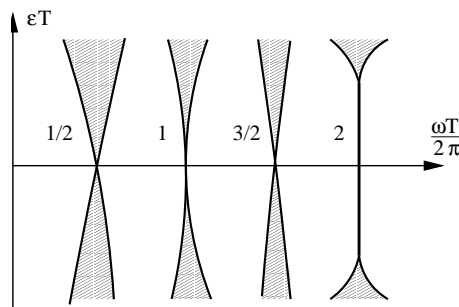
Für die Funktionen $T \mapsto \varepsilon(T)$, deren Graphen in der $T\varepsilon$ -Ebene mit dem Rand der stabilen Zone übereinstimmen, erhalten wir durch Entwicklung um $\omega T = n\pi$

$$\varepsilon(T) = \pm \frac{\omega}{2} (\omega T - n\pi) \quad (8.52)$$

im Fall von ungeradem n und

$$\varepsilon(T) = \pm \sqrt{\omega/T} \cdot \sqrt{|\omega T - n\pi|} \quad (8.53)$$

im Fall von geradem n . Die Zonen der Instabilität sind in der folgenden Figur schraffiert:



In realen Systemen mit Dämpfung durch Reibungsverluste beobachtet man Instabilität (**“parametrische Resonanz”**) meist nur für $n = 1, 2$, selten für $n = 3$.

9 Hamiltonsche Formulierung der Mechanik

In diesem Kapitel entwickeln wir die Hamiltonsche (oder “kanonische”) Formulierung der Mechanik, die den Ausgangspunkt für die Quantenmechanik bildet. Die Bewegungsgleichungen für ein mechanisches System mit f Freiheitsgraden schreiben wir als ein System von $2f$ Differentialgleichungen erster Ordnung in der Zeit. Wir werden sehen, dass solche Hamiltonschen Systeme unter einer sehr großen Gruppe von Transformationen, den sogenannten kanonischen Transformationen, forminvariant sind. Den Übergang von der Lagrange-Funktion zur Hamilton-Funktion vollziehen wir mit der Legendre-Transformation.

9.1 Legendre-Transformation

Beobachtung. Um das Folgende zu motivieren, erinnern wir an die Lagrange-Funktion des N -Teilchensystems im Euklidischen Raum E_3 mit konservativen Kräften,

$$L = T - U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\dot{\mathbf{r}}_i|^2 - U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N).$$

Die Teilchen-Impulse \mathbf{p}_i sind durch $\mathbf{p}_i = \partial L / \partial \dot{\mathbf{r}}_i = \langle m_i \dot{\mathbf{r}}_i, \cdot \rangle$ gegeben, und die Hamilton-Funktion ist gleich der Summe aus kinetischer und potentieller Energie:

$$H = T + U = \sum_i \frac{|\mathbf{p}_i|^2}{2m_i} + U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N).$$

Wie man sieht, hängen Lagrange-Funktion und Hamilton-Funktion folgendermaßen zusammen:

$$H = \sum_i \mathbf{p}_i(\dot{\mathbf{r}}_i) - L, \quad (9.1)$$

wobei auf der rechten Seite $\langle \dot{\mathbf{r}}_i, \cdot \rangle = \mathbf{p}_i/m_i$ einzusetzen ist. Diesen Zusammenhang wollen wir nun formalisieren und verallgemeinern.

Wir erläutern den Begriff der Legendre-Transformation zunächst für Funktionen einer einzigen Veränderlichen und geben später den allgemeinen Fall an.

Gegeben sei eine zweimal stetig differenzierbare konvexe Funktion $f : \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{R}$. **Konvexität** einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion f bedeutet $f''(x) > 0$ für alle $x \in I$. Wir definieren die Funktion g durch $g(x) := f'(x)$. Nach dem Satz über implizit definierte Funktionen besitzt g eine Umkehrfunktion h ($h \circ g = \text{Id}$). Diese Funktion gewinnt man durch Auflösen der Gleichung $y = g(x)$ nach x ; also $x = h(y)$.

Definition. Die **Legendre-Transformierte** $\mathcal{L}f$ von f ist erklärt durch

$$(\mathcal{L}f)(y) := y h(y) - f(h(y)). \quad (9.2)$$

Beispiele:

(i) Sei $f(v) = mv^2/2$. Dann ist $g(v) = f'(v) = mv =: p$ und $h(p) = p/m$. Folglich ist

$$(\mathcal{L}f)(p) = p \frac{p}{m} - \frac{m}{2} \left(\frac{p}{m} \right)^2 = \frac{p^2}{2m}.$$

(ii) Sei $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^\alpha/\alpha$. Dann ist $(\mathcal{L}f)(y) = y^\beta/\beta$, wobei $\alpha^{-1} + \beta^{-1} = 1$. Konvexität erfordert $\alpha > 1$.

(iii) Sei $f(x) = e^x$. Dann ist $(\mathcal{L}f)(y) = y(\ln y - 1)$.

Wir wollen nun einige Eigenschaften der Legendre-Transformation herausarbeiten. Die Notationen seien so wie oben eingeführt.

Satz. Die Legendre-Transformation hat die folgenden Eigenschaften:

1. $(\mathcal{L}f)' = h$.
2. $(\mathcal{L}f)'' = (f'' \circ h)^{-1}$.
3. Mit f ist auch $\mathcal{L}f$ konvex.
4. Die Legendre-Transformation ist **involutiv**, d.h. $\mathcal{L}^2 f := \mathcal{L}(\mathcal{L}f) = f$ für $f \in C^2(I)$, f konvex.

Beweis. Für die erste Eigenschaft bilden wir die Ableitung von (9.2):

$$\left(\frac{d}{dy}\mathcal{L}f\right)(y) = h(y) + y h'(y) - (f' \circ h)(y) h'(y).$$

Wegen $f' \circ h = g \circ h = \text{Id}$ heben sich die letzten beiden Terme auf der rechten Seite weg. Für die zweite Eigenschaft differenzieren wir nochmal: $(\mathcal{L}f)'' = h'$. Nun gilt aber wegen $(g \circ h)(y) = y$ die Beziehung $(g' \circ h) h' = 1$ und somit $h' = (g' \circ h)^{-1} = (f'' \circ h)^{-1}$. Hieraus folgt sofort die dritte Eigenschaft, denn $f'' > 0$ impliziert $(f'' \circ h)^{-1} > 0$.

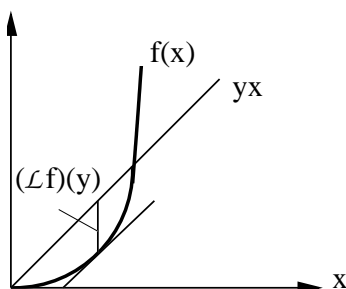
Da $\mathcal{L}f$ wieder konvex ist, können wir die Legendre-Transformation hierauf nochmals anwenden. Mit der ersten Eigenschaft $[(\mathcal{L}f)' = h]$ und $h(g(x)) = x$ folgt

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}^2 f)(x) &= x g(x) - (\mathcal{L}f)(g(x)) \\ &= x g(x) - g(x) h(g(x)) + f(h(g(x))) = f(x). \quad \square \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Legendre-Transformation lässt sich durch die Definition

$$(\mathcal{L}f)(y) := \sup_{x \in I} (yx - f(x)) \tag{9.3}$$

auf **beliebige stetige** konvexe Funktionen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ausdehnen. Gleichung (9.3) hat die nachstehende graphische Interpretation:



Hieraus lässt sich für den Spezialfall von konvexem $f \in C^2(I)$ die Äquivalenz von (9.3) zur obigen Definition leicht ersehen.

9.1.1 Verallgemeinerung auf Funktionen mehrerer Veränderlicher

Definition. Sei $V \equiv \mathbb{R}^n$ und $V^* := L(V, \mathbb{R})$ der Raum der linearen Abbildungen $V \rightarrow \mathbb{R}$. Sei weiter $f : V \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ von der Klasse C^2 und konvex, d.h. die Hessesche Form $D_x^2 f$ ist positiv definit für alle $x \in V$. Definiere $g : V \rightarrow V^*$ durch $g(x) = D_x f$ und die Umkehrabbildung $h : V^* \rightarrow V$ durch $h \circ g = \text{Id}$. Dann ist die **Legendre-Transformierte** $\mathcal{L}f : V^* \rightarrow \mathbb{R}$ erklärt durch

$$(\mathcal{L}f)(y) := y(h(y)) - f(h(y)). \quad (9.4)$$

Bemerkung: In Koordinatendarstellung bedeutet dies, dass man die Gleichungen $y_k = g_k(x) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ ($k = 1, \dots, n$) nach x auflöst: $x_l = h_l(y)$ ($l = 1, \dots, n$) und dann setzt:

$$(\mathcal{L}f)(y) := \sum_{l=1}^n y_l h_l(y) - f(h(y)).$$

Beachte, dass die Definitionsbereiche von $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ und $\mathcal{L}f : V^* \rightarrow \mathbb{R}$ zueinander dual sind.

Satz. Die Voraussetzungen seien wie in der obigen Definition. Dann gelten die Gleichungen

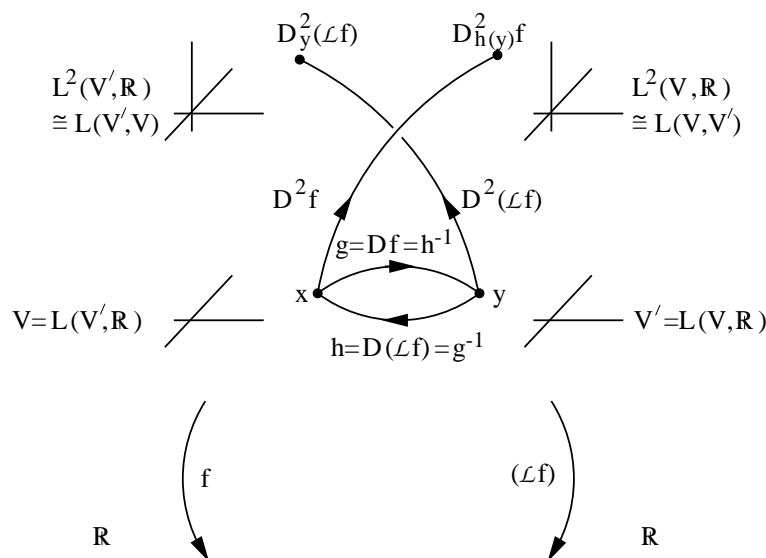
$$D_y(\mathcal{L}f) = h(y), \quad (9.5)$$

$$D_y^2(\mathcal{L}f) = (D_{h(y)}^2 f)^{-1}, \quad (9.6)$$

$$\mathcal{L}^2 f = f. \quad (9.7)$$

Bemerkung. Der Nachweis dieser Eigenschaften erfolgt wie im Beweis der analogen Aussagen des Satzes in Abschnitt 9.1. Für Gleichung (9.6) erinnere man sich an den natürlichen Isomorphismus zwischen $L^2(V, \mathbb{R})$ (den quadratischen Formen auf V) und $L(V, V^*)$ (den linearen Abbildung von V nach V^*). Dieser Isomorphismus konvertiert $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \omega(x, y)$ bekanntlich in $\omega : V \rightarrow V^* = L(V, \mathbb{R})$ durch Einsetzen ins linke Argument, $x \mapsto \omega(x, \cdot)$.

Graphische Veranschaulichung.



Parameter. Schließlich betrachten wir noch den wichtigen Fall, wo f von einem Parameter abhängt: $f : V \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, \alpha) \mapsto f(x; \alpha)$. Wir definieren die Legendre-Transformierte $\mathcal{L}f$ von

f als Funktion von x , indem wir den Parameter α **festhalten**. Damit ist gemeint, dass wir die Gleichungen

$$y_k = g_k(x; \alpha) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x; \alpha) \quad (k = 1, \dots, n), \quad (9.8)$$

nach x auflösen: $x_l = h_l(y; \alpha)$ ($l = 1, \dots, n$), und dann setzen:

$$(\mathcal{L}f)(y; \alpha) := \sum_{l=1}^n y_l h_l(y; \alpha) - f(h(y; \alpha); \alpha).$$

Es gelten dann wieder die Gleichungen (9.5)–(9.7), wobei beim Bilden der Differentiale D^2f , $D(\mathcal{L}f)$ und $D^2(\mathcal{L}f)$ der Parameter α als fest zu betrachten ist.

Ableitung. Für die partielle Ableitung nach dem Parameter gilt die Relation

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \mathcal{L}f = -\frac{\partial}{\partial \alpha} f. \quad (9.9)$$

Die Definition der **partiellen Ableitung** setzt bekanntlich voraus, dass alle Koordinaten feststehen. Deshalb muss hier ergänzt werden, dass auf beiden Seiten das jeweils natürliche Koordinatensystem gemeint ist; also $\{y_1, \dots, y_n; \alpha\}$ auf der linken Seite und $\{x_1, \dots, x_n; \alpha\}$ auf der rechten Seite. Zum Nachweis der behaupteten Relation berechnen wir

$$\left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \mathcal{L}f \right) (y; \alpha) = \sum_l y_l \frac{\partial h_l}{\partial \alpha}(y; \alpha) - \frac{\partial f}{\partial \alpha}(h(y; \alpha); \alpha) - \sum_l \frac{\partial f}{\partial x_l}(h(y; \alpha); \alpha) \frac{\partial h_l}{\partial \alpha}(y; \alpha).$$

Wegen der Definition von $h(y; \alpha)$ als Umkehrfunktion zu $y_l = \partial f / \partial x_l$ heben sich der erste und letzte Summand auf der rechten Seite gegenseitig auf. Es verbleibt der mittlere Summand, also die (negative) partielle Ableitung von f nach α bzgl. des Koordinatensystems $\{x_1, \dots, x_n; \alpha\}$.

Viele Parameter. Hängt f nicht von einem, sondern mehreren Parametern $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ ab, gehen wir ganz genauso vor. Es gelten dann wiederum die Gleichungen (9.5)–(9.7), und anstelle von (9.9) haben wir

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_k} \mathcal{L}f = -\frac{\partial}{\partial \alpha_k} f \quad (k = 1, \dots, m). \quad (9.9')$$

9.2 Die kanonischen Gleichungen

Wir erinnern an die Definition der Lagrange-Funktion L als Abbildung

$$L : (U \subset \mathbb{R}^f) \times \mathbb{R}^f \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \\ (q, \dot{q}, t) \mapsto L(q, \dot{q}, t).$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen zur Lagrange-Funktion L schreiben wir in der Form

$$\dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k} \quad (k = 1, \dots, f), \quad \text{wobei} \quad p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad (9.10)$$

der verallgemeinerte Impuls zu q_k ist, den wir ab sofort den **kanonischen Impuls** nennen.

Satz. Die Euler-Lagrange-Gleichungen $\dot{p}_k = \partial L / \partial q_k$ mit dem kanonischen Impuls $p_k = \partial L / \partial \dot{q}_k$ ($k = 1, \dots, f$) sind äquivalent zu dem System von Gleichungen

$$\boxed{\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}} \quad (k = 1, \dots, f), \quad (9.11)$$

wobei H die Legendre-Transformierte von L als Funktion der Geschwindigkeiten \dot{q} ist.

wobei H die Legendre-Transformierte von L als Funktion der Geschwindigkeiten \dot{q} ist.

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass aus den Euler-Lagrange-Gleichungen das Gleichungssystem (9.11) folgt (\Rightarrow). Es gelte also $\dot{p}_k = \partial L / \partial q_k$ für $p_k = \partial L / \partial \dot{q}_k$. Um die Resultate von Abschnitt 9.1 anzuwenden, machen wir die Identifikationen

$$L = f, \quad H = \mathcal{L}f, \quad \dot{q} = x, \quad p = y; \quad (q, t) = \alpha.$$

Wir bezeichnen die Umkehrfunktionen zu $p_k = g_k(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}(q, \dot{q}, t)$ mit $\dot{q}_k = h_k(q, p, t)$ und haben somit

$$H(q, p, t) = \sum_{k=1}^f p_k h_k(q, p, t) - L(q, h(q, p, t), t). \quad (9.12)$$

Das System (9.11) folgt dann sofort aus den Gleichungen (9.5) und (9.9') von Abschnitt 9.1.1:

$$\begin{aligned} \dot{q}_k &= h_k(q, p, t) \stackrel{(9.5)}{=} \frac{\partial H}{\partial p_k}(q, p, t) \quad \text{und} \\ \dot{p}_k &= \frac{\partial L}{\partial q_k}(q, h(q, p, t), t) \stackrel{(9.9')}{=} -\frac{\partial H}{\partial q_k}(q, p, t). \end{aligned}$$

Für die Umkehrrichtung (\Leftarrow) gehen wir vom Gleichungssystem (9.11) aus und benützen die involutive Eigenschaft der Legendre-Transformation: aus $H = \mathcal{L}L$ folgt $L = \mathcal{L}H$. Die Argumentation verläuft dann völlig analog zu oben.

Definition. Die Gleichungen (9.11) heißen *Hamiltonsche* oder *kanonische Gleichungen*; die Funktion H heißt *Hamilton-Funktion*.

Beispiel 1. Eine Lagrange-Funktion für das Teilchen im elektromagnetischen Feld ist bekanntlich

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{m}{2} |\dot{q}|^2 + e \dot{q} \cdot A(q, t) - e \varphi(q, t),$$

siehe Gleichung (8.17) von Abschnitt 8.2. Der kanonische Impuls ist per Definition

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \langle m \dot{q}, \cdot \rangle + eA(q, t), \quad (9.13)$$

was sich vom mechanischen (oder *kinematischen*) Impuls $\langle m \dot{q}, \cdot \rangle$ des Teilchens um den Term $eA(q, t)$ unterscheidet! Durch Auflösen nach \dot{q} erhalten wir $\langle \dot{q}, \cdot \rangle = \frac{1}{m}(p - eA)$. Damit ist die Legendre-Transformierte von L als Funktion von \dot{q} gegeben durch

$$\begin{aligned} H(q, p, t) &= p \cdot \dot{q} - L(q, \dot{q}, t) \\ &= \frac{1}{m} \langle p, (p - eA) \rangle - \frac{1}{2m} |p - eA|^2 - \frac{e}{m} \langle p - eA, A \rangle + e \varphi \\ &= \frac{1}{2m} |p - eA(q, t)|^2 + e \varphi(q, t). \end{aligned} \quad (9.14)$$

Wie erwartet ist die Hamilton-Funktion auch hier wieder die Summe von kinetischer Energie $m|\dot{q}|^2/2$ und potentieller Energie $e\varphi$.

Beispiel 2. Nach einem Gesetz der geometrischen Optik (*“Fermat’sches Prinzip”*) bewegt sich Licht vom Punkt a zum Punkt b in der kürzest möglichen Zeit, d.h. der Lichtstrahl minimiert das

Laufzeitfunktional $S = \int_a^b c^{-1} ds$, wobei $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ das Euklidische Längenelement und $c = c_0/n$ die Lichtgeschwindigkeit des optischen Mediums mit **Brechungsindex** n ist. Wenn wir annehmen, dass der Lichtweg in der xy -Ebene längs des Graphen einer Funktion $x \mapsto y(x)$ verläuft, können wir auch schreiben

$$S = \frac{1}{c_0} \int L dx \quad \text{mit} \quad L(y, y', x) = n(x, y) \sqrt{1 + y'^2}. \quad (9.15)$$

Die Funktion L lässt sich als Lagrange-Funktion eines Lagrange-Systems mit verallgemeinerter Ortskoordinate y , verallgemeinerter Geschwindigkeit $y' = dy/dx$ und "Zeitparameter" x auffassen. Der zugehörige kanonische Impuls ist dann

$$p = \frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{ny'}{\sqrt{1 + y'^2}} = g(y'). \quad (9.16)$$

Die Umkehrfunktion hierzu lautet $y' = h(p) = p/\sqrt{n^2 - p^2}$, und die Hamilton-Funktion $H = py' - L$ ergibt sich zu

$$H(y, p, x) = -\sqrt{n^2(x, y) - p^2}. \quad (9.17)$$

Falls der Brechungsindex nicht von x abhängt, ist das System autonom und nach einem bekannten Resultat für autonome Hamiltonsche Systeme gilt der **"Energiesatz"**,

$$-H = \sqrt{n^2(y) - p^2} =: n_0 = \text{const.} \quad (9.18)$$

Durch Einsetzen von $p = g(y')$ in den Energiesatz entsteht

$$n_0 = \sqrt{n^2(y) - p^2} = \frac{n(y)}{\sqrt{1 + y'^2}}. \quad (9.19)$$

Auflösen nach y' ergibt $y' = \pm \sqrt{(n/n_0)^2 - 1}$, und Trennung der Variablen liefert dann

$$\pm \int dx = n_0 \int \frac{dy}{\sqrt{n^2(y) - n_0^2}}, \quad (9.20)$$

womit das Problem der Berechnung der Lichtbahn auf eine Quadratur zurückgeführt ist.

Aufgabe. Berechne den Verlauf der Lichtbahn für den linearen Fall $n(y) = n_0(1 + y/a)$.

An dieser Stelle machen wir eine **Bestandsaufnahme**. Wir sind per Legendre-Transformation von der Lagrange-Funktion L zur Hamilton-Funktion H übergegangen, wobei die Geschwindigkeiten \dot{q} durch die kanonischen Impulse p als unabhängige Variable ersetzt wurden. Aus den Euler-Lagrange-Gleichungen $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k}$ entstanden die Hamilton-Gleichungen $\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$, $\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$ ($k = 1, \dots, f$). Während es sich bei dem ersten Satz um ein System von f Differentialgleichungen zweiter Ordnung für $q(t)$ handelt, ist der zweite Satz ein System von $2f$ Differentialgleichungen erster Ordnung für $q(t)$ und $p(t)$. In der Lagrange-Formulierung spielen die Geschwindigkeiten \dot{q} eine den verallgemeinerten Ortskoordinaten q untergeordnete Rolle: die Euler-Lagrange-Gleichungen sind lediglich unter Punkttransformationen $q \mapsto \varphi(q, t)$ forminvariant, und das Transformationsgesetz für \dot{q} wird durch φ festgelegt. Durch den Übergang zur Hamiltonschen Formulierung werden die Impulse p den Ortskoordinaten q formal gleichgestellt. (In der Tat werden wir Hamiltonsche Systeme kennenlernen, wo eine Unterscheidung zwischen Orten und Impulsen global gar nicht möglich ist!) Dies führt u.a. zu einer Vergrößerung der Gruppe von Transformationen, welche die Bewegungsgleichungen forminvariant lassen, siehe Abschnitt 9.6.

9.3 Die Symplektische Gruppe $\text{Sp}(2f)$

Motivation. Zum Einstieg ins Thema betrachten wir die kanonischen Gleichungen eines Hamiltonschen Systems mit einem Freiheitsgrad ($f = 1$):

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}.$$

In Matrixform geschrieben lauten diese Gleichungen

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial H / \partial q \\ \partial H / \partial p \end{pmatrix}.$$

Unser Augenmerk richtet sich jetzt auf die schiefsymmetrische Matrix

$$j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.21)$$

Sie bestimmt eine **schiefsymmetrische** Bilinearform J auf der Phasenebene $M = \mathbb{R}^2$ durch

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} u_q & u_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_q \\ v_p \end{pmatrix} = u_q v_p - u_p v_q. \quad (9.22)$$

Diese Bilinearform ist zu vergleichen mit der *symmetrischen* Bilinearform

$$\langle u, v \rangle = \sum_i u_i v_i$$

eines Euklidischen Skalarprodukts. Wie wir aus dem Kapitel über starre Körper wissen, ist die Invarianzgruppe im letzteren Fall die **orthogonale Gruppe** (oder Drehgruppe). In analoger Weise bringt uns die Forderung der Invarianz von J zur **symplektischen Gruppe**. Ein gewisses Verständnis dieser Gruppe ist notwendig für die weitere Entwicklung der Hamiltonschen Mechanik.

Symplektischer Vektorraum. Sei W ein reeller Vektorraum gerader Dimension, $\dim W = 2f$, und $\omega : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \omega(x, y) = -\omega(y, x)$ eine schiefsymmetrische Bilinearform. Ist ω nichtentartet, so heißt das Paar (W, ω) ein symplektischer Vektorraum.

Beispiel. Das Hauptbeispiel für einen symplektischen Vektorraum ist die Summe $W = V \oplus V^*$ eines reellen Vektorraum $V \simeq \mathbb{R}^f$ mit seinem Dualraum V^* . Auf einem solchen Raum W definiert man $\omega : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ für $x_i = v_i + f_i \in V \oplus V^* = W$ durch

$$\omega(v_1 + f_1, v_2 + f_2) = f_2(v_1) - f_1(v_2), \quad (9.23)$$

mittels der kanonischen Paarung $V^* \otimes V \rightarrow \mathbb{R}$, $f \otimes v \mapsto f(v)$. Diese kanonische Bilinearform ω ist schiefsymmetrisch und nichtentartet.

Symplektische Gruppe. Sei (W, ω) ein symplektischer Vektorraum der Dimension $2f$. Die Gruppe aller linearen Abbildungen $S : W \rightarrow W$, die ω invariant lassen, also für alle $x, y \in W$ die Relation

$$\omega(Sx, Sy) = \omega(x, y) \quad (9.24)$$

erfüllen, heißt die symplektische Gruppe in $2f$ Dimensionen und wird mit $\text{Sp}(W, \omega) \equiv \text{Sp}(2f, \mathbb{R}) \equiv \text{Sp}(2f)$ bezeichnet. Die Elemente von $\text{Sp}(2f)$ heißen **symplektische Abbildungen**.

Matrixdarstellung. Sei nun $\{e_1, \dots, e_{2f}\}$ eine Basis von W . Wie immer definieren wir die Matrix einer linearen Abbildung $S: W \rightarrow W$ durch

$$Se_i = \sum_j e_j S_{ji}. \quad (9.25)$$

Außerdem setzen wir $\omega_{ij} = \omega(e_i, e_j)$. Wir wollen nun sehen, welcher Bedingung die Matrix einer symplektischen Abbildung S unterliegt. Dazu entwickeln wir Se_i und Se_j nach der Basis $\{e_1, \dots, e_{2f}\}$ wie in (9.25) und berechnen

$$\omega_{ij} = \omega(e_i, e_j) = \omega(Se_i, Se_j) = \sum_{kl} \omega(e_k, e_l) S_{ki} S_{lj} = \sum_{kl} S_{ki} \omega_{kl} S_{lj}.$$

Bezeichnet \tilde{S} die Matrix von S und $\tilde{\omega}$ die Matrix von ω , so erhalten wir

$$\tilde{S}^t \tilde{\omega} \tilde{S} = \tilde{\omega}. \quad (9.26)$$

Beispiel. Betrachte den symplektischen Vektorraum (W, ω) mit $W = \mathbb{R}^2$ und $\tilde{\omega} = (\omega_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Eine reelle 2×2 -Matrix $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist die Matrixdarstellung einer symplektischen Abbildung, wenn sie Gleichung (9.26) erfüllt. Wegen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix} = (ad - bc) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

übersetzt sich die Bedingung (9.24) an S in $ad - bc = 1$, d.h. $\text{Sp}(2)$ besteht aus den linearen Abbildungen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit Determinante Eins.

Volumenerhaltung. Wir zeigen jetzt, dass $\text{Det} S = 1$ ganz allgemein für alle $S \in \text{Sp}(2f)$ gilt. Dazu betrachten wir die mit dem äußeren Produkt \wedge gebildete alternierende $2f$ -lineare Form $\Omega := \omega \wedge \omega \wedge \dots \wedge \omega$ (f Faktoren). Da Ω top-dimensional und somit eine Volumenform ist, gilt

$$(i) \quad \Omega(Sv_1, \dots, Sv_{2f}) = \text{Det} S \cdot \Omega(v_1, \dots, v_{2f}),$$

per Definition der Determinante. Da mit ω auch Ω unter $\text{Sp}(2f)$ invariant ist, gilt andererseits

$$(ii) \quad \Omega(Sv_1, \dots, Sv_{2f}) = \Omega(v_1, \dots, v_{2f}).$$

Aus der Kombination von (i) und (ii) folgt $\text{Det} S = 1$. Wegen der Bedeutung von $\text{Det} S$ als Volumenänderung können wir auch sagen, dass symplektische Abbildungen **volumenerhaltend** sind.

Reziprozität. Das charakteristische Polynom $\chi(\lambda) = \text{Det}(\lambda - S)$ einer symplektischen Abbildung $S \in \text{Sp}(2f)$ hat die Eigenschaft

$$\chi(\lambda) = \lambda^{2f} \chi(\lambda^{-1}). \quad (9.27)$$

Zum Beweis bringen wir die Gleichung (9.26) für die Matrixdarstellung \tilde{S} von S in die Form $\tilde{S}^{-1} = \tilde{\omega}^{-1} \tilde{S}^t \tilde{\omega}$. Hiermit finden wir

$$\text{Det}(\lambda - S^{-1}) = \text{Det}(\lambda - \tilde{\omega}^{-1} \tilde{S}^t \tilde{\omega}) = \text{Det}(\tilde{\omega}^{-1}) \text{Det}(\lambda - \tilde{S}^t) \text{Det}(\tilde{\omega}) = \text{Det}(\lambda - S) = \chi(\lambda),$$

wobei für das zweite Gleichheitszeichen die **Multiplikativität** der Determinante benutzt wurde. Andererseits gilt:

$$\text{Det}(\lambda - S^{-1}) = \text{Det}(S^{-1})\text{Det}(\lambda S - 1) = (-\lambda)^{2f}\text{Det}(\lambda^{-1} - S) = \lambda^{2f}\chi(\lambda^{-1}).$$

Durch Vergleich der beiden Ausdrücke für $\text{Det}(\lambda - S^{-1})$ folgt die Behauptung (9.27).

Quadrupel. Wegen $\chi(0) = \text{Det}(-S) = \text{Det}S = 1$ folgt aus $\chi(\lambda) = \lambda^{2f}\chi(\lambda^{-1})$, dass mit λ auch λ^{-1} Nullstelle von χ und somit Eigenwert von S ist. Da darüber hinaus mit jeder komplexen Nullstelle λ des reellen Polynoms χ auch die komplex konjugierte Zahl $\bar{\lambda}$ eine Nullstelle von χ ist, treten die Eigenwerte symplektischer Abbildungen i.a. als Quadrupel $(\lambda, \lambda^{-1}, \bar{\lambda}, \bar{\lambda}^{-1})$ auf.

Beispiel. Die 2×2 -Matrix J_T von Abschnitt 8.6 ist symplektisch. Aus Dimensionsgründen sind in diesem Beispiel ($f = 1$) nur zwei Fälle möglich:

(i) $\lambda = \bar{\lambda}$. Dann haben wir ein Paar von reellen Eigenwerten $(\lambda, \lambda^{-1}) = (\bar{\lambda}, \bar{\lambda}^{-1})$.

(ii) $\lambda = \bar{\lambda}^{-1}$ (oder $|\lambda|^2 = 1$). Dann haben wir ein Paar $(\lambda, \bar{\lambda}) = (\bar{\lambda}^{-1}, \lambda^{-1})$.

9.4 Hamiltonsche Systeme

Wir wollen jetzt die allgemeine Formulierung Hamiltonscher Systeme kennenlernen. Ein wichtiges Beispiel, dessen Behandlung diese Allgemeinheit erforderlich macht, ist der klassische Spin.

Definition. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $2f$ und ω eine 2-Form auf M . Ist ω geschlossen und nichtentartet, so heißt ω eine **symplektische Struktur** auf M , und das Paar (M, ω) heißt eine **symplektische Mannigfaltigkeit**.

Vorbereitung. Nun betrachten wir ein mechanisches System mit Ortskoordinaten (q_1, \dots, q_f) und Impulskoordinaten (p_1, \dots, p_f) . Der Phasenraum sei $M = \mathbb{R}^f \times \mathbb{R}^f$, und wir erklären eine geschlossene nichtentartete 2-Form ω auf M durch $\omega = \sum_{k=1}^f dp_k \wedge dq_k$. Das Paar (M, ω) ist dann eine symplektische Mannigfaltigkeit. Weiter sei $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und X_H das zugehörige **Hamiltonsche Vektorfeld**:

$$X_H = \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial p_k} \right). \quad (9.28)$$

Dieses Vektorfeld setzen wir jetzt in die zweite Position von ω ein:

$$\omega(\cdot, X_H) = \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k + \frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k \right) = dH. \quad (9.29)$$

Offenbar lässt sich die Beziehung zwischen H und X_H **koordinatenfrei** durch

$$\boxed{\omega(\cdot, X_H) = dH} \quad (9.30)$$

formulieren. Sind ω und H gegeben, und ist ω geschlossen und nichtentartet, so definieren wir X_H fortan durch Gleichung (9.30).

Eine Lösung γ der Bewegungsgleichungen eines Hamiltonschen Systems ist per Definition eine Integralkurve $\gamma : I \rightarrow M$ von X_H , d.h. es gilt $\dot{\gamma}(t) = X_H(\gamma(t))$ für $t \in I$. Diese Vorbetrachtungen motivieren die folgende Verallgemeinerung der Definition Hamiltonscher Systeme.

Definition. Ein *Hamiltonsches System* ist ein Tripel (M, ω, H) . Hierbei ist (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit — nämlich der mit einer geschlossenen nichtentarteten 2-Form ω versehene Phasenraum M — und $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, die Hamilton-Funktion. Die Bewegungsgleichungen eines solchen Systems sind die Hamiltonschen Gleichungen

$$\dot{x} = X_H(x), \quad (9.31)$$

wobei das Hamiltonsche Vektorfeld X_H durch Gleichung (9.30) bestimmt ist.

Bemerkung. Diese Definition lässt sich auf nichtautonome Systeme ausdehnen. Die Hamilton-Funktion ist dann eine Funktion $H : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $X_H : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2f}$ wird wieder durch Gleichung (9.30) bestimmt, wobei allerdings jetzt dH nicht das totale Differential ist, sondern $dH := \sum_{i=1}^{2f} (\partial H / \partial x^i) dx_i$. Es fehlt also der Term $(\partial H / \partial t) dt$. Die Bewegungsgleichungen sind wieder $\dot{x} = X_H(x, t)$.

9.4.1 Der klassische Spin

In der Quantenmechanik lernt man, dass Elementarteilchen wie z.B. das Elektron eine intrinsische Eigenschaft besitzen, den sogenannten “Spin”, welcher sich unter der Galilei-Gruppe wie ein *(Bahn-)Drehimpuls* transformiert. Wir erinnern daran, dass in Abschnitt 2.2 (KTP1) der Drehimpuls als schiefssymmetrische lineare Abbildung

$$\ell = -\ell^T : V \rightarrow V \quad (9.32)$$

des Euklidischen Vektorraums $V \simeq \mathbb{R}^3$ eingeführt worden war.

Modellierung. Ohne in darstellungstheoretische Feinheiten einzusteigen [eigentlich ist in der Quantentheorie von Spin-Freiheitsgraden die Drehgruppe $SO(3)$ durch ihre doppelte Überlagerung, $Spin(3) \cong SU(2)$, zu ersetzen], modellieren wir den Spin in klassischer Vorstellung als schiefssymmetrische lineare Abbildung $\sigma = -\sigma^T : V \rightarrow V$ in Analogie zum Bahndrehimpuls. Zusätzlich verlangen wir, dass σ die Eigenschaft eines *Generators* (siehe Abschnitt 2.1, KTP1) hat, also

$$\sigma^2 = -\Pi, \quad (9.33)$$

mit Π dem Projektor auf eine variable Ebene in $V \simeq \mathbb{R}^3$. Für die Spur folgt $\text{Tr } \sigma^2 = -\text{Tr } \Pi = -2$. Umgekehrt folgt aus $\sigma = -\sigma^T$ und $\text{Tr } \sigma^2 = -2$ die Generatorbedingung $\sigma^2 = -\Pi$ (siehe hierzu Abschnitt 2.1.1, KTP1). Die *Bewegungsgleichung* für einen Spin σ im Magnetfeld B lautet

$$\dot{\sigma} = \mu [\sigma, B], \quad (9.34)$$

wobei die magnetische Feldstärke $B = \sum_{i>j} B_{ij} dx_i \wedge dx_j$ (unter Verwendung des Euklidischen Skalarprodukts) als schiefssymmetrische lineare Abbildung $B = \sum_{i>j} B_{ij} J_{ij}$ aufgefasst wird, und

die Klammer $[\sigma, B]$ der **Kommutator** von Abbildungen ist. Die Konstante μ heißt das “gyromagnetische Verhältnis”; sie hat die physikalische Dimension von Ladung pro Masse. Aus (9.34) schließt man durch die folgende kurze Rechnung,

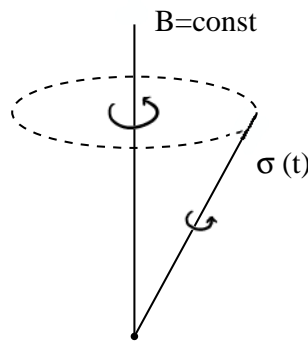
$$\frac{d}{dt} \text{Tr} \sigma^2 = 2 \text{Tr}(\sigma \dot{\sigma}) = 2\mu \text{Tr}(\sigma[\sigma, B]) = 2\mu \text{Tr}(B[\sigma, \sigma]) = 0,$$

dass $\text{Tr} \sigma^2 = -2$ erhalten und somit die Einschränkung $\sigma^2 = -\Pi$ mit der Dynamik verträglich ist.

Larmor-Präzession. Wir betrachten nun die spezielle Situation, dass $B = |B|J_3$ nicht von der Zeit abhängt. (Wie zuvor kürzen wir ab: $J_{21} \equiv J_3$, $J_{32} \equiv J_1$, $J_{13} = J_2$; siehe Gleichung (2.78) von Abschnitt 2.5.) In diesem Fall lauten die Bewegungsgleichungen (9.34) für $\sigma = \sum \sigma_i J_i$ in Komponentenschreibweise

$$\dot{\sigma}_1 = \omega_L \sigma_2, \quad \dot{\sigma}_2 = -\omega_L \sigma_1, \quad \dot{\sigma}_3 = 0, \quad (9.35)$$

mit $\omega_L \equiv \mu|B|$. Dieses System kennen wir bereits vom kräftefreien symmetrischen Kreisel. Seine allgemeine Lösung ist eine reguläre Präzession um die 3-Achse mit Winkelgeschwindigkeit ω_L . Im Falle des Spins nennt man diese Präzession *Larmor-Präzession*, und ω_L heißt **Larmor-Frequenz**.



Bemerkung. Durch die Verwendung des Isomorphismus $\mathbb{R}^3 \simeq \mathfrak{so}(3)$ von Abschnitt 2.1.1, Aufgabe (2.26), lassen sich σ und B als **axiale Vektoren** $\vec{\sigma}$ und \vec{B} auffassen. Unter diesem Isomorphismus geht das Kommutatorprodukt $[\sigma, B]$ in das Vektorprodukt $\vec{\sigma} \times \vec{B}$ über. Die lineare Differentialgleichung $\frac{d}{dt} \vec{\sigma} = \mu \vec{\sigma} \times \vec{B}$ können wir als dynamisches System in \mathbb{R}^3 auffassen. Allerdings sprengt der klassische Spin bei dieser Sichtweise den Rahmen des Hamilton-Formalismus (wegen der ungeraden Dimension von \mathbb{R}^3). Im Folgenden ist es unser Ziel, den klassischen Spin im Magnetfeld als Hamiltonsches System (M, ω, H) zu beschreiben.

Phasenraum. Den obigen Ausführungen gemäß wählen wir den zweidimensionalen Raum

$$M := \{\sigma \in \mathfrak{so}(3) \mid \sigma^2 = -\Pi\}, \quad \mathfrak{so}(3) = \{X \in \text{End}(\mathbb{R}^3) \mid X = -X^T\}, \quad (9.36)$$

als Phasenraum für den klassischen Spin. Durch Differenzieren von $\text{Tr} \sigma^2 = -2$ längs einer Kurve in M erhält man $\text{Tr}(\sigma \dot{\sigma}) = 0$. Der **Tangententialraum** zu einem Punkt $\sigma \in M$ ist daher

$$T_\sigma M = \{X \in \mathfrak{so}(3) \mid \text{Tr}(\sigma X) = 0\}. \quad (9.37)$$

Auf $T_\sigma M$ hat man die Bilinearform

$$\omega_\sigma : T_\sigma M \times T_\sigma M \rightarrow \mathbb{R}, \quad (X, Y) \rightarrow \text{Tr}(\sigma[X, Y]), \quad (9.38)$$

die wegen $[X, Y] = -[Y, X]$ schiefssymmetrisch ist.

Aufgabe. (i) Es existiert eine Bijektion $M \rightarrow S^2$ (2-Sphäre). (ii) Der Tangentialraum $T_\sigma M$ hat die alternative Charakterisierung

$$T_\sigma M = \{X \in \mathfrak{so}(3) \mid X = [\sigma, Y] \text{ für ein } Y \in \mathfrak{so}(3)\}. \quad (9.39)$$

(iii) Die lineare Abbildung $\text{ad}(\sigma) : T_\sigma M \rightarrow T_\sigma M, X \mapsto [\sigma, X]$ ist bijektiv, und es gilt $\text{ad}^2(\sigma) = -\text{Id}$, also $[\sigma, [\sigma, X]] = -X$. (iv) Die Bilinearform $\omega_\sigma : T_\sigma M \times T_\sigma M \rightarrow \mathbb{R}$ ist nichtentartet.

Hamiltonsches System. Die Zuordnung $\sigma \mapsto \omega_\sigma$ definiert eine 2-Form ω auf M . Aus simplen Dimensionsgründen ($\dim M = 2$) ist ω geschlossen. Nach Aufgabe (iv) ist ω außerdem nichtentartet und somit eine symplektische Struktur auf M . Als Hamilton-Funktion nehmen wir

$$H : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad \sigma \mapsto \mu \text{Tr}(\sigma B). \quad (9.40)$$

Bewegungsgleichung. Wir zeigen jetzt, dass (9.34) die durch das Hamiltonsche System (M, ω, H) bestimmte kanonische Gleichung ist. Dazu benützen wir, dass $t \mapsto \gamma(t) = e^{-tY} \sigma e^{tY}$ für $Y \in T_\sigma M$ eine Kurve in M durch $\gamma(0) = \sigma$ mit Tangentialvektor $\dot{\gamma}(0) = [\sigma, Y] \equiv X$ ist. Es folgt

$$(dH)_\sigma(X) = \left. \frac{d}{dt} H(\gamma(t)) \right|_{t=0} = \mu \left. \frac{d}{dt} \text{Tr}(e^{-tY} \sigma e^{tY} B) \right|_{t=0} = \mu \text{Tr}(XB).$$

Nun gilt $\text{Tr}(XB) = -\text{Tr}(B[\sigma, [\sigma, X]]) = \text{Tr}([\sigma, B][\sigma, X])$ für $X \in T_\sigma M$. Hiermit liefert die Bestimmungsgleichung (9.30) die Beziehung

$$\mu \text{Tr}([\sigma, B][\sigma, X]) = (dH)_\sigma(X) = \omega_\sigma(X, \dot{\sigma}) = \text{Tr}(\sigma[X, \dot{\sigma}]) = \text{Tr}(\dot{\sigma}[\sigma, X]).$$

Da $\text{ad}(\sigma) : T_\sigma M \rightarrow T_\sigma M, X \mapsto [\sigma, X]$ surjektiv ist, folgt durch Koeffizientenvergleich $\dot{\sigma} = \mu[\sigma, B]$, also die Behauptung.

9.4.2 Satz von Darboux

Der klassische Spin ist unser Parade-Beispiel für ein System, das sich **nicht global in q und p zerlegen lässt**. (Anders ausgedrückt: $M = S^2$ ist topologisch verschieden von $M = \mathbb{R}^2$.) In Abwesenheit einer solchen Zerlegung existiert auch keine globale Zerlegung in Ortskoordinate q und Geschwindigkeit \dot{q} . Es gibt daher keine Lagrange-Funktion für den klassischen Spin, jedenfalls nicht im Sinne von Kapitel 8. Die oben angegebene Verallgemeinerung der Definition Hamiltonscher Systeme ist also nicht nur eine schöne Verzierung der theoretischen Physik, sondern in diesem Fall wirklich notwendig. Andererseits ist die **lokale Existenz** einer Zerlegung in q und p durch den folgenden Satz gesichert. (Den Beweis findet man im Buch von Arnold.)

Satz (Darboux). Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit der Dimension $2f$. Dann existieren zu jedem Punkt $x \in M$ eine offene Umgebung $N_x \subset M$ und Funktionen $q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f : N_x \rightarrow \mathbb{R}$, so dass die symplektische Struktur ω auf N_x die **kanonische Form** $\omega = \sum_{k=1}^f dp_k \wedge dq_k$ annimmt.

Beispiel: Betrachte die zweidimensionale Sphäre $M = S^2$ mit der negativen Raumwinkelform $\omega = -\sin\theta d\theta \wedge d\phi$ als symplektische Struktur. Auf der am Südpol P ($\theta = \pi$) **gelochten Sphäre** $S^2 \setminus \{P\}$ können wir kanonische Koordinaten q, p einführen, z.B. durch die Koordinatentransformation

$$\tan\phi = \frac{p}{q}, \quad \cos\theta = 1 - \frac{1}{2}(q^2 + p^2), \quad (9.41)$$

oder umgekehrt

$$q = 2 \sin(\theta/2) \cos\phi, \quad p = 2 \sin(\theta/2) \sin\phi. \quad (9.42)$$

Wie man leicht nachrechnet, nimmt $\omega = -\sin\theta d\theta \wedge d\phi$ unter diesem Koordinatenwechsel die kanonische Form $\omega = dp \wedge dq$ an. Jedoch sind die lokalen Koordinatenfunktionen q, p auf S^2 nicht global definiert, denn sie bilden den Rand von $S^2 \setminus \{P\}$ auf die Kreislinie $q^2 + p^2 = 4$ (anstelle eines einzigen Punkts) ab.

Aufgabe. Die Raumwinkelform $\omega = -\sin\theta d\theta \wedge d\phi$ lässt sich mit der symplektischen Struktur des klassischen Spins (Abschnitt 9.4.1) identifizieren.

9.5 Kanonische Transformationen

In der Einleitung zu diesem Kapitel wurde schon vorweggenommen, dass der Übergang zur Hamiltonschen Mechanik u.a. den wichtigen Vorteil hat, eine große Freiheit in der Wahl von Koordinatensystemen zu lassen, in denen die Bewegungsgleichungen kanonische Gestalt haben. Die Untersuchung dieser Freiheit führt auf den Begriff der kanonischen Transformation.

Normalform. Wie man aus einer Rechnung vom Beginn des Abschnitts 9.4 erkennt, nehmen die Bewegungsgleichungen eines Hamiltonschen Systems genau dann die Form der kanonischen Gleichungen an, wenn die Phasenraum-Koordinaten $(q_1, \dots, q_f; p_1, \dots, p_f)$ so gewählt sind, dass die symplektische Struktur ω **Normalgestalt** hat:

$$\omega = \sum_{k=1}^f dp_k \wedge dq_k. \quad (9.43)$$

Dann ist nämlich $\omega(\cdot, X_H) = \sum_{k=1}^f (X_{H,q_k} dp_k - X_{H,p_k} dq_k)$, und durch Gleichsetzen mit dH folgt: $X_{H,q_k} = \partial H / \partial p_k$, $X_{H,p_k} = -\partial H / \partial q_k$.

Koordinatenwechsel. Ist nun ein Diffeomorphismus $\psi : M \rightarrow M$ gegeben, so können wir durch die **Verkettung** mit ψ neue Koordinatenfunktionen $Q_1, \dots, Q_f; P_1, \dots, P_f$ bilden:

$$Q_k = q_k \circ \psi, \quad P_k = p_k \circ \psi \quad (k = 1, \dots, f). \quad (9.44)$$

Wir fragen dann, unter welchen Bedingungen die Bewegungsgleichungen des Hamiltonschen Systems in den neuen Koordinatenfunktionen immer noch die kanonische Form

$$\dot{Q}_k = \frac{\partial H}{\partial P_k}, \quad \dot{P}_k = -\frac{\partial H}{\partial Q_k} \quad (k = 1, \dots, f) \quad (9.45)$$

haben. Nach dem eben Gesagten lautet die Antwort, dass dies genau dann der Fall sein wird, wenn die symplektische Struktur unter der Koordinatentransformation ihre Normalgestalt behält, d.h. wenn gilt $\omega = \sum_{k=1}^f dP_k \wedge dQ_k$. Hieraus resultiert folgende Bedingung an die Abbildung ψ :

$$\omega = \sum_{k=1}^f dP_k \wedge dQ_k = \sum_{k=1}^f d(p_k \circ \psi) \wedge d(q_k \circ \psi) = \psi^* \left(\sum_{k=1}^f dp_k \wedge dq_k \right) = \psi^* \omega, \quad (9.46)$$

also $\omega = \psi^* \omega$, wobei $\psi^* \omega$ die mit der Abbildung ψ zurückgeholte Differentialform bezeichnet.

Definition. Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit. Eine differenzierbare Abbildung $\psi : M \rightarrow M$ heißt eine **kanonische Transformation**, wenn sie ω invariant lässt: $\psi^* \omega = \omega$.

Bemerkungen. (i) Das Fazit der obigen Diskussion lautet hiermit: die kanonischen Gleichungen sind forminvariant unter kanonischen Transformationen. (ii) Die kanonischen Transformationen bilden eine Gruppe. (iii) Punkttransformationen, d.h. Abbildungen des Ortsraums auf sich, sind kanonisch (genauer: lassen sich zu kanonischen Transformationen erweitern).

Beispiel. Betrachte nochmals den klassischen Spin: $M = S^2$ (Einheitssphäre im \mathbb{R}^3), $-\omega =$ Raumwinkelform auf S^2 . Die Drehgruppe $SO(3)$ operiert auf dem Euklidischen Vektorraum \mathbb{R}^3 , und da S^2 ein invarianter Unterraum jeder Drehung ist, operiert $SO(3)$ natürlich auch auf S^2 . Es ist anschaulich klar und lässt sich rechnerisch problemlos nachweisen, dass ω unter Drehungen invariant ist. Folglich ist für dieses Beispiel jedes Gruppenelement $R : S^2 \rightarrow S^2$, $R \in SO(3)$, eine kanonische Transformation.

Kriterium für $M = \mathbb{R}^{2f}$. Wir spezialisieren jetzt zu $M = \mathbb{R}^{2f}$ in der einfachen Situation, dass ω global in der Form $\omega = \sum_{k=1}^f dp_k \wedge dq_k$ dargestellt werden kann. In diesem Fall ist eine differenzierbare Abbildung $\psi : \mathbb{R}^{2f} \rightarrow \mathbb{R}^{2f}$ genau dann eine kanonische Transformation, wenn $D_x \psi : \mathbb{R}^{2f} \rightarrow \mathbb{R}^{2f}$ für alle $x \in \mathbb{R}^{2f}$ symplektisch ist.

Beweis. Wir holen ω vorschriftsmäßig mit ψ^* zurück:

$$(\psi^* \omega)_x(u, v) = \omega_{\psi(x)}(D_x \psi(u), D_x \psi(v)). \quad (9.47)$$

Unter der angegebenen Voraussetzung an (M, ω) können die Tangentialräume $T_x M$ in allen Punkten $x \in M$ mit $M = \mathbb{R}^{2f}$ identifiziert werden, und es gilt

$$\omega_{\psi(x)} = \omega_x = \sum_{k=1}^f dp_k \wedge dq_k =: \omega_0, \quad (9.48)$$

unabhängig von x und ψ . Daher ist die Bedingung $\psi^* \omega = \omega$ äquivalent zu

$$\omega_0(u, v) = \omega_0(D_x \psi(u), D_x \psi(v)) \quad (9.49)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^{2f}$. Die Bedingung (9.49) ist aber mit Gleichung (9.24) identisch und somit gleichbedeutend mit der Bedingung $D_x \psi \in \text{Sp}(2f)$ für alle $x \in \mathbb{R}^{2f}$.

Bemerkung. Die vorstehende Aussage Satz macht klar, warum die symplektische Gruppe $\text{Sp}(2f)$ für die Hamiltonsche Mechanik so wichtig ist und in einem gesonderten Abschnitt 9.3 vorab eingeführt wurde.

Beispiele. Betrachte $(M, \omega) = (\mathbb{R}^2, dp \wedge dq)$ und hier den Spezialfall einer **linearen** Transformation $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $D_x S = S$. Wir wissen aus Abschnitt 9.3, dass $\text{Sp}(2)$ aus den linearen Abbildungen $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\text{Det} S = 1$ besteht. Die nachstehenden linearen Transformationen haben Determinante Eins und sind folglich kanonisch:

- (a) $q \circ S = q \cos \alpha + p \sin \alpha$ und $p \circ S = -q \sin \alpha + p \cos \alpha$
 (“elliptische Rotation” in der qp -Ebene).
- (b) $q \circ S = q \cosh \beta + p \sinh \beta$ und $p \circ S = q \sinh \beta + p \cosh \beta$
 (“hyperbolische Rotation”).
- (c) $q \circ S = q e^\gamma$ und $p \circ S = p e^{-\gamma}$
 (dieses letzte Beispiel ist eine erweiterte Punkttransformation).

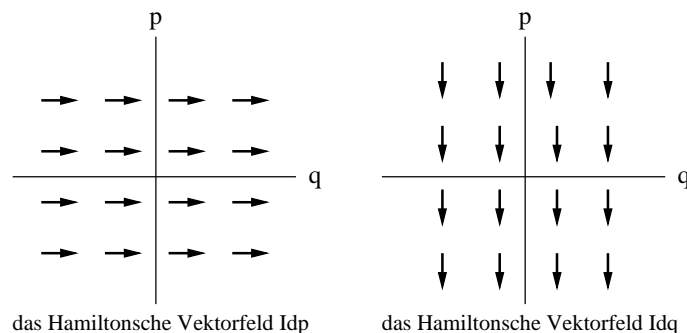
9.6 Hamiltonsche Flüsse

Die aus Abschnitt 1.7 bekannten Begriffe von Hamiltonischem Vektorfeld und Fluss werden jetzt wie folgt präzisiert. Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit und X ein differenzierbares Vektorfeld, dessen Fluss auf ganz $M \times \mathbb{R}$ definiert ist. Dann heißt X **lokal Hamiltonsch (global Hamiltonsch)**, falls die 1-Form $\omega(\cdot, X)$ geschlossen (bzw. exakt) ist. Entsprechend heißt der Fluss eines lokal (global) Hamiltonschen Vektorfeldes lokal (bzw. global) Hamiltonsch. Nach einem Standardresultat (**Poincaré-Lemma**) existiert zu einem lokal Hamiltonschen Vektorfeld X lokal eine Funktion H , so dass gilt: $\omega(\cdot, X) = dH$.

Symplektischer Gradient. Nach der soeben gegebenen Definition bestimmt die symplektische Struktur ω einen Isomorphismus zwischen lokal Hamiltonschen Vektorfeldern und geschlossenen 1-Formen. Da dieser Isomorphismus im Folgenden häufig benutzt wird, ist es zweckmäßig, hierfür ein eigenes Symbol einzuführen. Wir schreiben

$$\boxed{X = I\alpha}, \quad \text{falls } \omega(\cdot, X) = \alpha. \quad (9.50)$$

Ein analoger Isomorphismus, \mathcal{I} , existiert in Euklidischen Vektorräumen: $\mathcal{X} = \mathcal{I}\alpha \Leftrightarrow \langle \cdot, \mathcal{X} \rangle = \alpha$, womit man den Gradienten einer Funktion f durch $\text{grad} f := \mathcal{I}(df)$ erklärt. In Anlehnung an diese Nomenklatur nennen wir $X = I(df)$ manchmal den *symplektischen Gradienten* von f .



Beispiel. Wir berechnen für $(M, \omega) = (\mathbb{R}^2, dp \wedge dq)$ den symplektischen Gradienten der Koordinatenfunktion des Impulses, $f = p$. Dazu setzen wir den Ansatz $I(dp) =: X_q \partial_q + X_p \partial_p$ in ω ein

und erhalten $dp = \omega(\cdot, I(dp)) = X_q dp - X_p dq$, woraus folgt, dass $I(dp)$ die Komponenten $X_q = 1$ und $X_p = 0$ hat, also $I(dp) = \partial_q$. Eine analoge Rechnung liefert $I(dq) = -\partial_p$.

Definition. Sei $(g^s)_{s \in \mathbb{R}}$ eine Schar von Diffeomorphismen: $M \rightarrow M$. Wir nennen diese Schar eine **Einparametergruppe von kanonischen Transformationen** von (M, ω) , wenn gilt:

- (i) $g^0 = \text{Id}$;
- (ii) $g^{s+t} = g^s \circ g^t = g^t \circ g^s \quad (s, t \in \mathbb{R})$;
- (iii) g^s ist kanonisch für alle $s \in \mathbb{R}$.

Wir stellen nun die besondere Rolle Hamiltonscher Flüsse in der kanonischen Mechanik heraus: sie lassen die symplektische Struktur des Phasenraums invariant.

Satz. Es besteht eine **1:1-Zuordnung** zwischen den lokal Hamiltonschen Flüssen und den Einparametergruppen von kanonischen Transformationen einer symplektischen Mannigfaltigkeit (M, ω) .

Bemerkung. "Lokal" ist hier wesentlich, wie ein elementares Beispiel unten zeigen wird.

Beweis. Wir erinnern an die Definition der Lie-Ableitung (siehe Abschnitt 7.3): ist $\phi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$, $(x, s) \mapsto \phi_s(x)$, der durch ein Vektorfeld X auf M bestimmte Fluss, so haben wir

$$\left. \frac{d}{ds} \phi_s^* \omega \right|_{s=0} = \mathcal{L}_X \omega. \quad (9.51)$$

Außerdem gilt die **Cartan-Formel** $\mathcal{L}_X = \iota(X) \circ d + d \circ \iota(X)$.

1. (\Rightarrow) Sei also ϕ der Fluss eines lokal Hamiltonschen Vektorfelds X . Per Definition ist dann $\omega(\cdot, X)$ geschlossen, also

$$d(\omega(X, \cdot)) = -d(\omega(\cdot, X)) = 0.$$

Da ω geschlossen ist ($d\omega = 0$) folgt $\mathcal{L}_X \omega = 0$ als Konsequenz der Cartan-Formel für \mathcal{L}_X . Die Abbildungen $(\phi_s)_{s \in \mathbb{R}}$ sind global definiert und bilden daher eine Einparametergruppe: $\phi_0 = \text{Id}$, $\phi_{s+t} = \phi_s \circ \phi_t = \phi_t \circ \phi_s$. Mit Gleichung (9.51) folgt deshalb

$$\frac{d}{dt} \phi_t^* \omega = \frac{d}{ds} \phi_{s+t}^* \omega \Big|_{s=0} = \phi_t^* \left(\frac{d}{ds} \phi_s^* \omega \Big|_{s=0} \right) = \phi_t^* \mathcal{L}_X \omega = 0$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Folglich ist $\phi_t = g^t$ eine kanonische Transformation:

$$\phi_t^* \omega = \phi_0^* \omega = \text{Id}^* \omega = \omega.$$

2. (\Leftarrow) Ausgehend von einer Einparametergruppe kanonischer Transformationen g^s bilden wir das Vektorfeld $X := \left. \frac{d}{ds} g^s \right|_{s=0}$. Durch Umkehren der obigen Schlussweise zeigen wir, dass das so definierte X lokal Hamiltonsch ist.

Beispiel 1. Betrachte für $(M, \omega) = (\mathbb{R}^2, dp \wedge dq)$ die Einparametergruppe von kanonischen Transformationen

$$q \circ g^s = q e^s \quad \text{und} \quad p \circ g^s = p e^{-s}. \quad (9.52)$$

$(g^s)_{s \in \mathbb{R}}$ wird erzeugt durch das Vektorfeld

$$X = \left. \frac{d}{ds} g^s \right|_{s=0} = q \partial_q - p \partial_p. \quad (9.53)$$

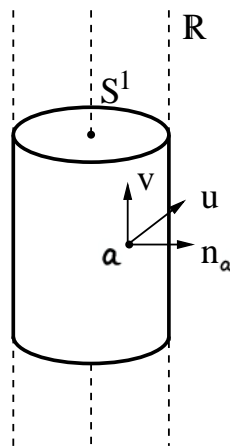
Mit $\omega(\cdot, X) = q dp + p dq$ finden wir, im Einklang mit dem obigen Satz,

$$d(\omega(\cdot, X)) = d(q dp + p dq) = dq \wedge dp + dp \wedge dq = 0. \quad (9.54)$$

Die Hamilton-Funktion ist hier $H = pq$, denn $\omega(\cdot, X) = q dp + p dq = d(pq)$.

Bemerkung. Das Vektorfeld X von Beispiel 1 ist global hamiltonsch, d.h. die Hamilton-Funktion $H = pq$ ist auf der ganzen Phasenebene \mathbb{R}^2 definiert. (Dies muss in einfach zusammenhängenden Phasenräumen wie dem \mathbb{R}^2 immer so sein, weil in diesem Fall jede geschlossene 1-Form nach dem Poincaré-Lemma exakt ist, d.h. ein global definiertes Potential besitzt. Die Unterscheidung zwischen "lokal" und "global" hamiltonsch ist nur für Systeme mit nicht einfach zusammenhängendem Phasenraum notwendig; siehe das nächste Beispiel).

Beispiel 2. Wir betrachten den Phasenraum des ebenen mathematischen **Pendels**, nämlich den **Zylinder** $M = S^1 \times \mathbb{R}$. Zur Konstruktion einer geeigneten symplektischen Struktur ω betten wir M auf die natürliche Weise in den Euklidischen \mathbb{R}^3 ein (siehe Figur).



Sind u und v zwei zu M tangentielle Vektoren im Punkt $a \in M$, und ist n_a der nach außen gerichtete Normalenvektor ($|n_a| = 1$), so definieren wir:

$$\omega_a(v, u) := \langle n_a, u \times v \rangle \quad (\text{Spatprodukt}). \quad (9.55)$$

Diese symplektische Struktur bleibt offensichtlich ungeändert, wenn wir den Zylinder längs seiner Symmetrieachse verschieben oder um seine Symmetrieachse drehen.

Wir koordinatisieren M durch einen Winkel q ($0 < q < 2\pi$), nämlich der Auslenkung des Pendels relativ zu einer festen Achse, und durch den kanonischen Impuls des Pendels: $p = \partial L / \partial \dot{q}$ für $L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{q}^2 - U(q)$. In solchen lokalen Koordinaten gilt:

$$\omega = dp \wedge dq.$$

Mit diesen Vorbereitungen sei nun $g^s : M \rightarrow M$ eine **Translation** des Zylinders um die Strecke s längs seiner Symmetrieachse. In Formeln: $q \circ g^s = q$ und $p \circ g^s = p + s$. Da eine solche Translation

ω invariant lässt, ist $(g^s)_{s \in \mathbb{R}}$ eine Einparametergruppe von kanonischen Transformationen. Die Einparametergruppe $(g^s)_{s \in \mathbb{R}}$ wird durch das Vektorfeld X ,

$$X = \left. \frac{d}{ds} g^s \right|_{s=0} = \partial_p, \quad (9.56)$$

erzeugt. Dieses Vektorfeld ist zwar lokal Hamiltonsch:

$$\omega(\cdot, \partial_p) = -dq \quad \text{ist geschlossen,} \quad (9.57)$$

nicht aber global Hamiltonsch, denn die Koordinatenfunktion $q : M \rightarrow [0, 2\pi)$ ist als stetige Funktion nicht global auf M definiert, sondern hat eine **Unstetigkeit** in $q^{-1}(0)$.

9.7 Symmetrien und Erhaltungssätze

Die Nützlichkeit von Erhaltungssätzen bei der Lösung mechanischer Probleme ist in den Kapiteln über Newtonsche Mechanik und starre Körper hinreichend deutlich geworden: die Lösung der Bewegungsgleichungen für autonome Hamiltonsche Systeme mit einem Freiheitsgrad wird durch den Energiesatz auf eine **Quadratur** zurückgeführt. Es lässt sich zeigen, dass dies ein allgemeiner Sachverhalt ist: Hamiltonsche Systeme mit f Freiheitsgraden sind durch Quadratur lösbar, wenn f (unabhängige) Erhaltungssätze existieren. Das Aufspüren von Erhaltungssätzen ist daher ein vorrangiges Ziel des Mechanikers. Hierbei hilft uns das Noether-Theorem, das wir nun in der Hamiltonsche Mechanik **autonomer** Systeme formulieren.

Erste Integrale. Gegeben sei das Hamiltonsche System (M, ω, H) . Der Phasenfluss sei hier mit $\phi^H : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$, $(x, t) \mapsto \phi_t^H(x)$ bezeichnet, und wir wollen (der Bequemlichkeit halber) annehmen, dass er auf dem ganzen erweiterten Phasenraum erklärt sei. Wir nennen eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ein **erstes Integral** des Hamiltonschen Systems, wenn für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt: $f \circ \phi_t^H = f$. Da es sich bei $(\phi_t^H)_{t \in \mathbb{R}}$ um eine Einparametergruppe von Diffeomorphismen handelt, ist diese Bedingung äquivalent zu

$$\left. \frac{d}{dt} f \circ \phi_t^H \right|_{t=0} = 0. \quad (9.58)$$

Sind $X_H := I(dH)$ und $X_f := I(df)$ die symplektischen Gradienten von H bzw. f , so gilt:

$$\left. \frac{d}{dt} f \circ \phi_t^H \right|_{t=0} = \mathcal{L}_{X_H} f = (df)(X_H) = \omega(X_H, X_f). \quad (9.59)$$

Insbesondere folgt sofort, dass die **Energie** eines autonomen Hamiltonschen Systems erhalten ist:

$$\left. \frac{d}{dt} H \circ \phi_t^H \right|_{t=0} = \omega(X_H, X_H) = 0. \quad (9.60)$$

Bemerkung: Dies ist die koordinatenfreie Verallgemeinerung eines Arguments von Abschn. 1.6.3.

Zweimal Hamiltonsch. Es sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit. Darauf seien zwei Funktionen $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben — wir haben jetzt also zwei “Hamiltonsche” Systeme (M, ω, f)

und (M, ω, g) und zwei global Hamiltonsche Flüsse ϕ^f, ϕ^g zu den global Hamiltonschen Vektorfeldern $X_f := I(df)$ und $X_g := I(dg)$. Dann gilt die Gleichheit

$$\left. \frac{d}{ds} g \circ \phi_s^f \right|_{s=0} = - \left. \frac{d}{dt} f \circ \phi_t^g \right|_{t=0}, \quad (9.61)$$

denn nach Gleichung (9.59) ist $\left. \frac{d}{dt} f \circ \phi_t^g \right|_{t=0} = \omega(X_g, X_f)$ und $\left. \frac{d}{ds} g \circ \phi_s^f \right|_{s=0} = \omega(X_f, X_g)$, und mit $\omega(X, Y) = -\omega(Y, X)$ folgt die Aussage.

Definition. Sei $\phi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M, (x, s) \mapsto \phi_s(x)$, der Fluss eines global Hamiltonschen Vektorfeldes auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit (M, ω) . Dann heißt $(\phi_s)_{s \in \mathbb{R}}$ eine Einparametergruppe von **Symmetrie-Transformationen** des Hamiltonschen Systems mit Hamilton-Funktion $H : M \rightarrow \mathbb{R}$, wenn H unter $(\phi_s)_{s \in \mathbb{R}}$ invariant ist, d.h.

$$H \circ \phi_s = H \quad \text{für alle } s \in \mathbb{R}. \quad (9.62)$$

Noether-Theorem:

Zu jeder Einparametergruppe von Symmetrie-Transformationen eines autonomen Hamiltonschen Systems gehört ein Erhaltungssatz, und umgekehrt.

Bemerkung. Diese Formulierung des Noether-Theorems ist insofern speziell, als wir uns auf den autonomen Fall beschränken. Andererseits ist sie allgemeiner als die entsprechende Aussage in der Lagrange-Mechanik, wo nur eine der beiden Schlüsse gezogen werden kann, nämlich dass jede Einparametergruppe von Symmetrie-Transformationen einen Erhaltungssatz impliziert. Die Umkehrung (also: zu jedem Erhaltungssatz existiert eine Einparametergruppe von Symmetrie-Transformationen) lässt sich in der Lagrange-Mechanik nicht zeigen, was daran liegt, dass die Gruppe der Punkttransformationen zu “klein” ist.

Beweis. Sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und ϕ^f der Fluss von $X_f = I(df)$. Ist $(\phi_s^f)_{s \in \mathbb{R}}$ eine Einparametergruppe von Symmetrie-Transformationen, so gilt: $\left. \frac{d}{ds} H \circ \phi_s^f \right|_{s=0} = 0$. Nach Gleichung (9.61) folgt dann: $\left. \frac{d}{dt} f \circ \phi_t^H \right|_{t=0} = 0$, d.h. f ist ein erstes Integral und es gilt der Erhaltungssatz $f = \text{const}$. Die Umkehrung folgt analog durch Vertauschen der Rollen von H und f .

Beispiel 1. Auf der symplektischen Mannigfaltigkeit $(M, \omega) = (\mathbb{R}^2, dp \wedge dq)$ hat das Hamiltonsche Vektorfeld $I(dp) = \partial_q$ den durch $(q, p) \circ g^s = (q+s, p)$ bestimmten Fluss g^s . Die von $I(dp)$ erzeugten kanonischen Transformationen bilden also die Gruppe der Translationen in q . Daher bedeutet die Aussage des Noether-Theorems hier Folgendes: sind die **Raumtranslationen** $q \mapsto q + s$ eine Einparametergruppe von Symmetrie-Transformationen des Hamiltonschen Systems mit Hamilton-Funktion H , d.h. gilt:

$$\left. \frac{d}{ds} H \circ g^s \right|_{s=0} = \frac{\partial H}{\partial q} = 0, \quad (9.63)$$

so ist der Impuls erhalten: $p = \text{const}$. Umgekehrt bedingt **Impulserhaltung** die Translationsinvarianz der Hamilton-Funktion.

Sprechweise: Ist $\phi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M, (x, s) \mapsto \phi_s(x)$ der Fluss eines Vektorfeldes X , so sagen wir auch, dass X die Einparametergruppe $(\phi_s)_{s \in \mathbb{R}}$ **erzeugt**.

Beispiel 2. Für ein Teilchen im Euklidischen Raum $(E_3, V \simeq \mathbb{R}^3, +)$ haben wir den Phasenraum $(M, \omega) = (E_3 \times V^*, \sum_{k=1}^3 dp_k \wedge dq_k)$. Wir betrachten die 3-Komponente (eigentlich die 21-Komponente) des Drehimpulses,

$$L_3 = L_{21} = p_2 q_1 - q_2 p_1, \quad (9.64)$$

und bestimmen wieder das zugehörige Hamiltonsche Vektorfeld. Sei dazu $I(dL_3) =: \sum_k (X_{q_k} \partial_{q_k} + X_{p_k} \partial_{p_k})$. Dann ergeben sich aus

$$\begin{aligned} dL_3 &= d(p_2 q_1 - q_2 p_1) = p_2 dq_1 + q_1 dp_2 - q_2 dp_1 - p_1 dq_2 \\ &= \omega(\cdot, IdL_3) = \sum_k (X_{q_k} dp_k - X_{p_k} dq_k) \end{aligned}$$

die Komponenten $X_{q_1} = -q_2$, $X_{q_2} = q_1$, $X_{q_3} = 0$, $X_{p_1} = -p_2$, $X_{p_2} = p_1$, $X_{p_3} = 0$, also

$$I(dL_3) = q_1 \partial_{q_2} - q_2 \partial_{q_1} + p_1 \partial_{p_2} - p_2 \partial_{p_1}. \quad (9.65)$$

Offensichtlich erzeugt $I(dL_3)$ die durch

$$\begin{aligned} (q_1, q_2, q_3; p_1, p_2, p_3) \circ g^\phi &= (q_1 \cos \phi - q_2 \sin \phi, q_1 \sin \phi + q_2 \cos \phi, q_3; \\ & p_1 \cos \phi - p_2 \sin \phi, p_1 \sin \phi + p_2 \cos \phi, p_3) \end{aligned}$$

definierte Einparametergruppe von Drehungen um die 3-Achse. Deshalb lautet das Noether-Theorem in diesem Fall folgendermaßen: sind die Drehungen um die 3-Achse eine Einparametergruppe von Symmetrie-Transformationen, so ist die 3-Komponente des Drehimpulses erhalten: $L_3 = \text{const}$, und umgekehrt.

9.8 Die Poisson-Klammer

Definition. Die Poisson-Klammer $\{f, g\}$ zweier differenzierbarer Funktionen f und g auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit (M, ω) ist die Ableitung von f in Richtung des Flusses ϕ^g des Hamiltonschen Vektorfeldes $I(dg)$:

$$\{f, g\} := \left. \frac{d}{dt} f \circ \phi_t^g \right|_{t=0}. \quad (9.66)$$

Durch Bilden der Poisson-Klammer zweier differenzierbarer Funktionen auf M erhält man also wieder eine Funktion auf M .

Eigenschaften (der Poisson-Klammer):

1. Nach Gleichung (9.58) ist eine differenzierbare Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann ein **erstes Integral** des Hamiltonschen Systems (M, ω, H) , wenn ihre Poisson-Klammer mit H verschwindet:

$$\{f, H\} = 0. \quad (9.67)$$

2. Nach Gleichung (9.61) ist die Poisson-Klammer **schiefsymmetrisch**:

$$\{f, g\} = -\{g, f\}. \quad (9.68)$$

3. Nach Gleichung (9.59) können wir schreiben:

$$\{f, g\} = \omega(I(dg), I(df)). \quad (9.69)$$

9.8.1 Koordinatendarstellung der Poisson-Klammer

Sei ω in lokalen Koordinaten x_1, \dots, x_{2f} dargestellt durch $\omega = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \omega_{ij} dx_i \wedge dx_j$, und sei $X^g = I(dg) = \sum_{j=1}^{2f} X_j^g \partial_j$. Dann folgt aus $\omega(\cdot, X^g) = dg = \sum_i (\partial g / \partial x_i) dx_i$ die Beziehung $\sum_{i,j} dx_i \omega_{ij} X_j^g = \sum_i dx_i \partial g / \partial x_i$, also $\sum_j \omega_{ij} X_j^g = \partial g / \partial x_i$. Inversion dieser linearen Gleichung liefert $X_j^g = \sum_i (\omega^{-1})_{ji} \partial g / \partial x_i$, wobei die Koeffizienten $(\omega^{-1})_{ji}$ durch die Gleichung

$$\sum_i (\omega^{-1})_{ji} \omega_{ik} = \delta_{jk} \quad (9.70)$$

bestimmt werden oder, anders ausgedrückt, $((\omega^{-1})_{ji})$ ist die zu (ω_{ij}) **inverse Matrix**. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \{g, h\} &= \omega(Idh, Idg) \\ &= \sum_{i,j} \omega_{ij} \left(\sum_k (\omega^{-1})_{ik} \frac{\partial h}{\partial x_k} \right) \left(\sum_l (\omega^{-1})_{jl} \frac{\partial g}{\partial x_l} \right) = \sum_{i,j} \frac{\partial g}{\partial x_i} (\omega^{-1})_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (9.71)$$

Poisson-Klammer kanonisch. Ist die symplektische Struktur ω bezüglich eines Satzes von Koordinatenfunktionen $q_1, \dots, q_f; p_1, \dots, p_f$ in **Normalform**, $\omega = \sum_k dp_k \wedge dq_k$, so gilt:

$$\boxed{\{g, h\} = \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial g}{\partial q_k} \frac{\partial h}{\partial p_k} - \frac{\partial g}{\partial p_k} \frac{\partial h}{\partial q_k} \right)}. \quad (9.72)$$

Zum Beweis dieser Formel benützt man Gleichung (9.71) und die Matrizen

$$(\omega_{ij}) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{1}_f \\ \mathbf{1}_f & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad ((\omega^{-1})_{ij}) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1}_f \\ -\mathbf{1}_f & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (9.73)$$

Für den **Spezialfall** $f = q_k$ und $g = p_l$ ergibt sich

$$\{q_k, p_l\} = \delta_{kl}, \quad \{q_k, q_l\} = 0 = \{p_k, p_l\} \quad (k, l = 1, \dots, f). \quad (9.74)$$

Insbesondere folgt mit

$$\dot{F} = \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) = \sum_{k=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right), \quad (9.75)$$

dass die kanonischen Bewegungsgleichungen (für $F = q_k$ oder $F = p_k$ oder irgendeine Funktion $F : M \rightarrow \mathbb{R}$) mit Hilfe der Poisson-Klammer folgendermaßen geschrieben werden können:

$$\boxed{\dot{F} = \{F, H\}}. \quad (9.76)$$

Bemerkung. Diese Formulierung kann als Ausgangspunkt für die **Quantenmechanik** dienen.

Beispiel. Für ein System mit zwei Freiheitsgraden, $M = \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}^2)^*$, $\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2$, sei $\ell = p_2 q_1 - q_2 p_1$ der Drehimpuls bzgl. des Ursprungs und $\phi := \arctan(q_1/q_2)$ ein (lokal definierter) Winkel in der Ortsebene. Dann liefert eine leichte Rechnung:

$$\{\phi, \ell\} = \sum_{k=1}^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial q_k} \frac{\partial \ell}{\partial p_k} - \frac{\partial \phi}{\partial p_k} \frac{\partial \ell}{\partial q_k} \right) = 1. \quad (9.77)$$

Das ist das erwartete Ergebnis, denn der symplektische Gradient $I(d\ell)$ einer Komponente ℓ des Drehimpulses erzeugt bekanntlich Drehungen um die entsprechende Achse.

9.8.2 Woher kommt die symplektische Struktur?

In der in Abschnitt 9.4 gegebenen allgemeinen Definition Hamiltonscher Systeme ist die symplektische Struktur ω Teil der **Axiomatik**. Dieser Umstand provoziert die Frage, ob sich ω aus irgendeinem konstruktiven Prinzip ergibt oder schlechterdings “vom Himmel” fällt. Für Lagrange-Systeme ist die Antwort klar. In diesem Fall haben wir einen Ortsraum mit Koordinatenfunktionen q_1, \dots, q_f , eine Lagrange-Funktion $L(q, \dot{q})$ und kanonische Impulse $p_k = \partial L / \partial \dot{q}_k$. Die symplektische Struktur ist hier immer $\omega = \sum_{k=1}^f dp_k \wedge dq_k$, und man zeigt leicht, dass sie nicht von der Koordinatenwahl abhängt.

Anders verhält es sich für Hamiltonsche Systeme wie den klassischen Spin, die keine Lagrange-Funktion besitzen. In diesem Fall ist dem Dozenten **keine gute Antwort** auf die Frage nach der Herkunft der symplektischen Struktur im Rahmen der klassischen Mechanik bekannt. Ähnlich wie beim Hamiltonschen Prinzip der kleinsten Wirkung erschließen sich Ursprung und tiefere Bedeutung der symplektischen Struktur erst im Rahmen der Quantenmechanik, wie folgt.

Grundlegend für die Hamiltonsche Mechanik ist der Phasenraum M . Physikalische Observable wie Ort, Impuls, Drehimpuls, Energie usw. sind Funktionen auf dem Phasenraum, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Solche Funktionen bilden eine Algebra, d.h. sie können linear kombiniert und multipliziert werden, $(\alpha f + \beta g)(x) := \alpha f(x) + \beta g(x)$ und $(f \cdot g)(x) := f(x)g(x)$. Das Produkt ist kommutativ, $f \cdot g = g \cdot f$. Die Observablen der klassischen Mechanik bilden also eine **kommutative** Algebra.

In diesem algebraischen Zugang gelangt man (Dirac folgend) zur Quantenmechanik, indem man die Algebra der Observablen **nichtkommutativ** macht: das kommutative Produkt $f \cdot g = g \cdot f$ wird durch ein nichtkommutatives Produkt $f * g \neq g * f$ ersetzt. Das Korrespondenzprinzip verlangt, dass die Quantenmechanik für $\hbar \rightarrow 0$ (Plancksche Konstante gegen Null) in die klassische Mechanik übergeht. Dementsprechend besitzt das quantenmechanische $*$ -Produkt eine Entwicklung nach Potenzen von \hbar , deren nullter Term das kommutative Produkt ist: $f * g = f \cdot g + \mathcal{O}(\hbar)$. Die führende nichtkommutative Korrektur wird durch die Poisson-Klammer bestimmt:

$$f * g = f \cdot g + \frac{i\hbar}{2} \{f, g\} + \mathcal{O}(\hbar^2), \quad (9.78)$$

wobei $i = \sqrt{-1}$ die imaginäre Einheit ist. Hiermit lässt sich die Poisson-Klammer durch einen Grenzübergang formal isolieren:

$$\{f, g\} = \lim_{\hbar \rightarrow 0} (i\hbar)^{-1} (f * g - g * f). \quad (9.79)$$

Wie wir wissen, hängt die Poisson-Klammer mit der symplektischen Struktur durch $\omega(Inf, Idg) = \{g, f\}$ zusammen. Wird die **klassische Mechanik** also als **Grenzfall der Quantenmechanik** gesehen, dann fällt die symplektische Struktur eines Hamiltonschen Systems nicht vom Himmel, sondern ist in der nichtkommutativen Algebra der quantenmechanischen Observablen kodiert. Für den Fall des klassischen Spins folgt die symplektische Struktur letztlich aus der Quanten-Algebra des Spins.

9.9 Liouvillescher Satz

Wir betrachten eine symplektische Mannigfaltigkeit (M, ω) der Dimension $2f$ und definieren eine Volumenform Ω durch

$$\Omega := \frac{1}{f!} \omega^{\wedge f} = \frac{1}{f!} \omega \wedge \omega \wedge \dots \wedge \omega. \quad (9.80)$$

Ist ω in lokalen Koordinaten durch $\omega = \sum_{k=1}^f dp_k \wedge dq_k$ gegeben, so zeigt man leicht, dass gilt:

$$\Omega = dp_1 \wedge dq_1 \wedge dp_2 \wedge dq_2 \wedge \dots \wedge dp_f \wedge dq_f. \quad (9.81)$$

Eine direkte Konsequenz der Definition kanonischer Transformationen und des Satzes von Abschnitt 9.6 (Hamiltonsche Flüsse) ist

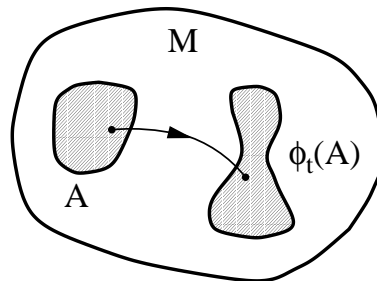
Satz (Liouville). Jeder Hamiltonsche Fluss ϕ ist **volumenerhaltend**, d.h. mit $\text{vol}(\phi_t(U)) := \int_{\phi_t(U)} \Omega$ gilt $\text{vol}(\phi_t(U)) = \text{vol}(U) = \text{const}$ für jedes Gebiet $U \subset M$.

Beweis. Wir benützen den Transformationssatz $\int_{\phi_t(U)} \Omega = \int_U \phi_t^* \Omega$. Da das Zurückziehen von Formen mit dem äußeren Produkt vertauscht, überträgt sich die Invarianz von $\omega = \phi_t^* \omega$ auf Ω :

$$\phi_t^* \Omega = \frac{1}{f!} (\phi_t^* \omega) \wedge \dots \wedge (\phi_t^* \omega) = \frac{1}{f!} \omega \wedge \dots \wedge \omega = \Omega, \quad (9.82)$$

woraus folgt:

$$\text{vol}(\phi_t(U)) = \int_U \phi_t^* \Omega = \int_U \Omega = \text{vol}(U) = \text{const}. \quad (9.83)$$



Bemerkungen:

- (i) Der Liouvillesche Satz gilt auch für **nichtautonome** Hamiltonsche Systeme.
- (ii) Man nennt Ω eine **Integralinvariante** (nach Poincaré). Neben Ω existiert eine ganze Serie weiterer Integralinvarianten, nämlich: $\omega, \omega \wedge \omega, \dots, \omega^{\wedge k} = \omega \wedge \omega \wedge \dots \wedge \omega$ (k Faktoren), $\dots, \Omega = \omega^{\wedge f}$. Die allgemeine Aussage lautet: Ist A ein $2k$ -dimensionales Flächenstück auf M und $\phi_t(A)$ sein Bild unter ϕ_t , so gilt $\int_{\phi_t(A)} \omega^{\wedge k} = \text{const}$.
- (iii) Der Liouvillesche Satz hat viele Anwendungen (siehe z.B. Abschnitt 8.6); u.a. spielt er eine bedeutende Rolle in der Begründung der **Thermodynamik** aus der statistischen Mechanik.

9.10 Erzeugende Funktionen

Wir kehren zum elementaren Fall $f = 1$, $M = \mathbb{R}^2$, $\omega = dp \wedge dq$ zurück. Für eine kanonische Transformation $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ setzen wir $Q = q \circ \psi$ und $P = p \circ \psi$. Dann gilt

$$d(p dq - P dQ) = dp \wedge dq - dP \wedge dQ = \omega - \omega = 0. \quad (9.84)$$

Die Differenz von 1-Formen $p dq - P dQ$ ist also geschlossen und nach dem Poincaré-Lemma für $M = \mathbb{R}^2$ auch exakt. Es existiert somit eine Funktion $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$dS = p dq - P dQ. \quad (9.85)$$

Definition. Wir nennen eine kanonische Transformation $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vom Typ 1 (bzw. Typ 2), wenn q und $q \circ \psi$ (bzw. $p \circ \psi$) einen Satz unabhängiger Koordinaten bilden.

Typ 1. Sei nun ψ vom Typ 1. Dann lässt sich eine Funktion $S_1(q, Q) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ finden, so dass $S = S_1(q, Q)$. Aus der linearen Unabhängigkeit von dq und dQ folgt nach Einsetzen von $dS = \frac{\partial S_1}{\partial q}(q, Q) dq + \frac{\partial S_1}{\partial Q}(q, Q) dQ$ in (9.85), dass $S_1(q, Q)$ den folgenden Gleichungen genügt:

$$p = \frac{\partial S_1}{\partial q}(q, Q), \quad P = -\frac{\partial S_1}{\partial Q}(q, Q). \quad (9.86)$$

Diese Schritte lassen sich umkehren und zur Konstruktion von kanonischen Transformationen benutzen. Dazu geben wir uns eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $S_1(q, Q)$ vor. Unter der Voraussetzung $\partial^2 S_1 / \partial q \partial Q \neq 0$ können wir dann die erste Gleichung in (9.86) lokal nach Q auflösen und erhalten $Q = \tilde{Q}(q, p)$. Diese Beziehung setzen wir in die zweite Gleichung von (9.86) ein und erhalten $P = \tilde{P}(q, p)$. Per Konstruktion gilt dann $dp \wedge dq = dP \wedge dQ$. Die Funktion $S_1(q, Q)$ heißt eine erzeugende Funktion vom Typ 1.

Beispiel. Die Wahl $S_1(q, Q)$ ergibt $p = Q$ und $q = -P$.

Typ 2. Nicht alle kanonischen Transformationen sind vom Typ 1. Zum Beispiel fallen für die identische Transformation die Funktionen q und Q zusammen und sind nicht unabhängig. Es ist also nicht möglich, die identische Transformation aus einer erzeugenden Funktion $S_1(q, Q)$ zu gewinnen. Dies lässt sich jedoch mit Typ 2 bewerkstelligen. Sei jetzt ψ vom Typ 2. Dann setzen wir

$$S =: S_2(q, P), \quad (9.87)$$

wobei jetzt $dS = p dq + Q dP$ gelten soll. Wir bilden das Differential,

$$p dq + Q dP = dS = \frac{\partial S_2}{\partial q}(q, P) dq + \frac{\partial S_2}{\partial P}(q, P) dP, \quad (9.88)$$

und folgern aus der linearen Unabhängigkeit von dq und dP die Relationen

$$p = \frac{\partial S_2}{\partial q}(q, P), \quad Q = \frac{\partial S_2}{\partial P}(q, P). \quad (9.89)$$

Offensichtlich hat die identische Transformation $Q = q$, $P = p$ die erzeugende Funktion $S_2(q, P) = qP$. Auch hier kann man wieder umgekehrt vorgehen. Für eine vorgegebene erzeugende Funktion

$S_2(q, P)$ löst man die erste Gleichung in (9.89) nach P auf und setzt das Resultat in die zweite Gleichung von (9.89) ein.

Mitteilung. Im Formalismus der *kanonischen Störungsrechnung* benützt man als Ausgangspunkt eine erzeugende Funktion vom Typ 2: $S_2(q, P) = qP + \epsilon f(q, P)$ mit kleinem Parameter ϵ . Ein monumentales Resultat dieses Formalismus (genauer: von trickreichen Verbesserungen desselben) ist das Theorem von Kolmogorov-Arnold-Moser (**KAM-Theorem**).

9.11 Elektrodynamik als Lagrange-System

Als kurzen Nachtrag zum Lagrange-Formalismus kehren wir zur Elektrodynamik zurück und betrachten das Wirkungsfunktional

$$S = \int L dt, \quad L = \int_{E_3} \left(\frac{1}{2} E \wedge D - \frac{1}{2} B \wedge H - \phi \rho + A \wedge j \right). \quad (9.90)$$

Hierbei sind die Funktion ϕ (elektrisches Skalarpotential) und die 1-Form A (magnetisches Vektorpotential) ein Satz von **Potentialen** für die zeitabhängigen Feldstärken, d.h.

$$B = dA, \quad E = -d\phi - \dot{A}. \quad (9.91)$$

Man prüft schnell nach, dass mit diesem Ansatz die homogenen Maxwell-Gleichungen ($dB = 0$ und $\dot{B} = -dE$) identisch erfüllt sind. Die Ladungsdichte ρ und Stromdichte j sind hier als vorgegeben zu betrachten. Den nichtmateriellen Teil des Wirkungsfunktionals S kennen wir schon aus Abschnitt 7.6 (Spule in Bewegung: Relativitätsprinzip).

Raum-Zeit-Formulierung. Es soll nun gezeigt werden, dass die Euler-Lagrange-Gleichungen zum obigen Wirkungsfunktional (mit den Potentialen ϕ, A als verallgemeinerten ‘‘Ortsfreiheitsgraden’’ q) mit den inhomogenen Maxwell-Gleichungen übereinstimmen. Zu diesem Zweck ist es bequem (obschon nicht nötig), zu Raum-Zeit-Größen überzugehen:

$$F = B + E \wedge dt, \quad G = D - H \wedge dt, \quad \mathcal{A} = -\phi dt + A, \quad J = \rho - j \wedge dt. \quad (9.92)$$

Wir haben dann $F = d\mathcal{A}$ (und somit automatisch die **homogenen** Maxwell-Gleichungen $dF = 0$), und das Wirkungsfunktional verkürzt sich zu

$$S[\mathcal{A}] = \int_{M_4} \left(\frac{1}{2} F \wedge G - \mathcal{A} \wedge J \right). \quad (9.93)$$

Aufgabe. Das Wirkungsfunktional (9.93) hat die Funktional-Ableitung

$$\left. \frac{d}{ds} S[\mathcal{A} + s\alpha] \right|_{s=0} = \int_{M_4} (d\alpha \wedge G - \alpha \wedge J), \quad (9.94)$$

und nach dem Hamiltonschen Prinzip der kleinsten Wirkung folgen die **inhomogenen** Maxwell-Gleichungen

$$dG = J. \quad (9.95)$$

9.12 Elektrodynamik als Hamiltonsches System

Der Übergang zur Hamiltonschen Formulierung der Elektrodynamik wird dadurch erschwert, dass die verallgemeinerten Ortsfreiheitsgrade $\mathcal{A} = -\phi dt + A$ **nicht eichinvariant**, also nicht voll physikalisch sind. Wir umgehen diese Komplikation, indem wir direkt mit den Feldstärken E und B arbeiten. (Warnung: Die Ausführungen werden stark komprimiert sein. Für mehr Details verweise ich auf mein Skript zur Vorlesung Quantenfeldtheorie I.)

Lagrange-Funktion. Um in der Lagrange-Funktion (9.90) der Elektrodynamik die physikalisch unbestimmten Eichpotentiale ϕ und A durch die physikalisch bestimmten Feldstärken E und B zu ersetzen, drücken wir die Ladungsdichte ρ und die Stromdichte j durch eine **Polarisierung** $P \in \tilde{\Omega}^2(E_3)$ sowie eine **Magnetisierung** $M \in \tilde{\Omega}^1(E_3)$ aus:

$$\rho = -dP, \quad j = \dot{P} + dM. \quad (9.96)$$

Ein solches Vorgehen kennen wir schon aus dem Abschnitt 7.11 über Elektrodynamik in Materie. Der Unterschied zu vorher ist, dass wir jetzt ρ und j **als Ganzes** (also nicht nur den unkontrollierbaren Materieanteil) auf diese Weise ausdrücken. Durch Einsetzen in (9.90) und partielles Integrieren entsteht ein potentialfreier Ausdruck für die Lagrange-Funktion:

$$L - \frac{d}{dt} \int_{E_3} A \wedge P = \int_{E_3} (E \wedge (\frac{1}{2}D + P) - B \wedge (\frac{1}{2}H - M)). \quad (9.97)$$

Der zweite Summand auf der linken Seite hat als totale Zeitableitung bekanntlich keine Auswirkung auf die Euler-Lagrange-Gleichungen und wird daher im Folgenden weggelassen.

Kanonischer Impuls. Für den Übergang zur Hamilton-Formulierung wählt man die sogenannte **temporale** Eichung $\phi \equiv 0$, also $E = -\dot{A}$ und $B = dA$. Mit dieser Wahl ist die elektrische Feldstärke E (oder ihr Negatives) als verallgemeinerte ‘‘Geschwindigkeit’’ im Sinne der Lagrange-Mechanik zu betrachten. Den kanonischen Impuls erhalten wir dann wie immer durch Bilden der (Funktional-)Ableitung der Lagrange-Funktion nach der Geschwindigkeit (schematische Formel):

$$\frac{\delta L}{\delta E} = D + P \equiv \mathcal{D}. \quad (9.98)$$

Als wichtige Eigenschaft des kanonischen Impulses ist hier zu vermerken, dass die 2-Form \mathcal{D} **geschlossen** ist: $d\mathcal{D} = dD + dP = \rho - \rho = 0$.

Die Hamilton-Funktion als Legendre-Transformierte der Lagrange-Funktion ergibt sich zu

$$\mathcal{H} = \int_{E_3} E \wedge \mathcal{D} - L = \int_{E_3} (\frac{1}{2}E \wedge D + \frac{1}{2}B \wedge H - B \wedge M). \quad (9.99)$$

Poisson-Klammer. Um die kanonischen Gleichungen aufstellen zu können, benötigen wir neben der Hamilton-Funktion eigentlich eine **symplektische Struktur**. Stattdessen geben wir die äquivalente Poisson-Klammer an. Dazu schreiben wir die magnetische Feldstärke B (als Ableitung $B = dA$ der verallgemeinerten Ortsfreiheitsgrade A) und den kanonischen Impuls $\mathcal{D} = D + P$ in der Form (für beliebige Koordinaten x^i)

$$B = \sum_{i < j} B_{ij} dx^i \wedge dx^j, \quad \mathcal{D} = \sum_{i=1}^3 \mathcal{D}_i \star dx^i. \quad (9.100)$$

Wir konstatieren dann den folgenden Ausdruck für die **Poisson-Klammer**:

$$\{\mathcal{D}_i(\bullet), B_{jk}(\bullet')\} = \left(\langle \partial_i, \partial_j \rangle \frac{\partial}{\partial x^k} - \langle \partial_i, \partial_k \rangle \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \delta(\bullet - \bullet'). \quad (9.101)$$

In kartesischen Koordinaten x^i hat man die Vereinfachung $\langle \partial_i, \partial_j \rangle = \delta_{ij}$ und $\langle \partial_i, \partial_k \rangle = \delta_{ik}$. Die Poisson-Klammern von \mathcal{D} mit sich und B mit sich verschwinden. Die Materie-Größen P und M spielen die Rolle von externen Parametern.

Kanonische Gleichungen. Die Richtigkeit der behaupteten Poisson-Klammer wird durch Aufstellen der kanonischen Gleichungen *a posteriori* nachgewiesen. Zu diesem Zweck müssen wir die Hamilton-Funktion durch den kanonischen Impuls (anstelle der verallgemeinerten Geschwindigkeit E) ausdrücken:

$$\mathcal{H} = \int_{E_3} \left(\frac{1}{2\varepsilon_0} (\mathcal{D} - P) \wedge \star (\mathcal{D} - P) + \frac{1}{2} B \wedge H - B \wedge M \right). \quad (9.102)$$

Eine kurze Rechnung (die allerdings ein gewisses Verständnis der **Dirac-Distribution** $\delta(\bullet - \bullet')$ und der **Ko-Ableitung** $\delta = -\star d\star$ auf 2-Formen erfordert), führt in kartesischen Koordinaten zu

$$\dot{\mathcal{D}}_i(\bullet) = \{\mathcal{D}_i(\bullet), \mathcal{H}\} = \sum_{j < k} \int_{E_3} \{\mathcal{D}_i(\bullet), B_{jk}(\bullet')\} (B/\mu_0 - \star M)_{jk}(\bullet') \, \text{dvol}_{\bullet'} = (-\delta B/\mu_0 + \delta \star M)_i(\bullet).$$

Koordinatenfrei geschrieben lautet dieses Ergebnis

$$\dot{\mathcal{D}} = -\star \delta B/\mu_0 + \star \delta \star M = d(H - M). \quad (9.103)$$

Mit $\dot{\mathcal{D}} = \dot{D} + \dot{P}$ und $\dot{P} + dM = j$ folgt das **Ampere-Maxwell-Gesetz**:

$$\dot{D} = dH - dM - \dot{P} = dH - j. \quad (9.104)$$

Durch ähnliche Rechnung findet man

$$\dot{B}_{ij}(\bullet) = \{B_{ij}(\bullet), \mathcal{H}\} = \sum_k \int_{E_3} \{B_{ij}(\bullet), \mathcal{D}_k(\bullet')\} (\star (\mathcal{D} - P)/\varepsilon_0)_k(\bullet') \, \text{dvol}_{\bullet'} = (-dE)_{ij}(\bullet).$$

Ohne Mühe erkennen wir hier das **Induktionsgesetz** $\dot{B} = -dE$ wieder.

Resümée. In der Hamiltonschen Formulierung der klassischen Dynamik des elektromagnetischen Feldes mittels der Hamilton-Funktion (9.99) und der Poisson-Klammer (9.101) erhält man als kanonische Gleichung für \dot{D} das Ampere-Maxwell-Gesetz und für \dot{B} das Induktionsgesetz von Faraday. (Die ohne Zeitableitung formulierten Gesetze $d\mathcal{D} = 0$ und $dB = 0$ sind **Anfangsbedingungen**, die unter der so definierten Dynamik invariant bleiben. Zusätzlich postuliert man die Gesetze $D = \varepsilon_0 \star E$ und $B = \mu_0 \star H$, wodurch die Minkowski-metrische Struktur der Raum-Zeit ausgedrückt wird.)

Entwarnung. Das Material der Abschnitte 9.11 und 9.12 gehört nicht zum Klausur-Stoff!

9.13 Nachtrag zur Magnetostatik: Biot-Savart-Gesetz

In Antwort auf eine Hörerfrage tragen wir die folgende Ergänzung zur Magnetostatik nach.

Biot-Savart-Gesetz. Darunter verstehen wir die Lösung des Ampere-Gesetzes $dH = j$ für die magnetische Erregung H unter der Bedingung $\delta H = 0$ ($\Leftrightarrow dB = 0$). Im Formenkalkül hat man (für einen Punkt $p \in E_3$)

$$H_p = \int_{E_3} \frac{\iota(p - \bullet)j}{4\pi|p - \bullet|^3} \text{dvol}_\bullet \quad (\text{Biot-Savart}), \quad (9.105)$$

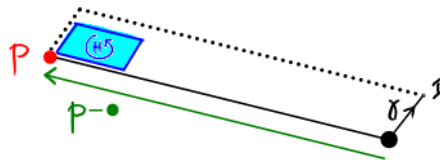
oder, genauer, nach Kontraktion mit einem (axialen) Vektor $v \in V \simeq \mathbb{R}^3$:


$$H_p(v) = \int_{E_3} \frac{j_\bullet(p - \bullet, v)}{4\pi|p - \bullet|^3} \text{dvol}_\bullet, \quad (9.106)$$

oder in kartesischen Komponenten ($k, l = 1, 2, 3$):

$$H_k(\mathbf{r}) = \int_{E_3} \frac{\sum_l (\mathbf{r} - \mathbf{r}')^l j_{lk}(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3r'. \quad (9.107)$$

Visualisierung.



Das Stromlinienstück $j = I\gamma$ trägt zur 2-Kette der magnetischen Erregung H im Punkt p das von γ und $p - \bullet$ aufgespannte Parallelogramm  mit **Gewichtsfaktor** $I/(4\pi|p - \bullet|^2)$ bei.

Mantra. Das Vektorprodukt (und mit ihm die Rechte-Hand-Regel) sind auch hier fehl am Platz und kommen in der obigen Formel stimmigerweise nicht vor :-).

Herleitung (des Biot-Savart-Gesetzes). Wir lösen die Bedingung $dB = 0 = \delta H$ durch den Ansatz

$$H = -\delta C, \quad C \in \tilde{\Omega}^2(E_3). \quad (9.108)$$

Als Motivation kann die **Identifikation** $C \equiv \star A/\mu_0$ dienen (Vektorpotential A), denn

$$-\delta C = \star d \star C = \star dA/\mu_0 = \star B/\mu = H, \quad (9.109)$$

und es gilt $\delta H = -\delta^2 C = 0$ wegen $\delta^2 = 0$. Das Ampere-Gesetz $dH = j$ lautet nun $-d\delta C = j$. Für den nächsten Schritt stellen wir die Bedingung $dC = 0$ (was der Coulomb-Eichung $d \star A = 0$ entspricht) und subtrahieren $\delta dC = 0$ auf der linken Seite. Es folgt die **Poisson-Gleichung**

$$-\Delta C = j. \quad (9.110)$$

(Nebenbei bemerkt ist $dC = 0$ wegen $d\Delta = \Delta d$ konsistent mit der magnetostatischen Bedingung $dj = 0$.) Die Lösung $C = (-\Delta)^{-1}j$ der Poisson-Gleichung ist

$$C_p = \int_{E_3} \frac{j_\bullet}{4\pi|p - \bullet|} \text{dvol}_\bullet \quad \text{also} \quad C_p(u, v) = \int_{E_3} \frac{j_\bullet(u, v)}{4\pi|p - \bullet|} \text{dvol}_\bullet. \quad (9.111)$$

Die Behauptung (Biot-Savart) folgt durch Differenzieren ($-\delta C = H$) mit

Aufgabe. In kartesischen Koordinaten x_i hat $C = \sum_{i < j} C_{ij} [dx_i \wedge dx_j; \text{Or}]$ die Ko-Ableitung

$$\delta C = \sum_j \left(\sum_i \partial_i C_{ij} \right) [dx_j; \text{Or}]. \quad (9.112)$$