

Vorlesung: Mathematische Methoden für Physiker

M. Zirnbauer
Institut für Theoretische Physik
Universität zu Köln

WS 2014/15

Contents

1	Vektorräume	4
1.1	Gruppen (Definition)	4
1.2	Reelle Vektorräume (Definition)	4
1.3	Basis und Dimension	5
1.4	Dualer Vektorraum	6
1.5	Dualbasis	7
1.6	Basiswechsel	9
1.7	Lineare Abbildungen	11
1.8	Transponierte einer linearen Abbildung	12
1.9	Alternierende 2-lineare Formen	14
1.10	Äußeres Produkt	15
1.11	Normierter Vektorraum	16
1.12	Euklidischer Vektorraum	16
1.13	Euklidischer Isomorphismus: Vektoren \rightarrow Linearformen	18
1.14	Vektorprodukt im \mathbb{R}^3	19
1.15	Alternierende 3-lineare Formen und Spatprodukt	20
1.16	Axiale Vektoren	21
1.17	Beziehung zwischen Vektorprodukt und äußerem Produkt	22
1.18	Affiner Raum	23
1.19	Euklidischer Raum	25
2	Vektoranalysis	26
2.1	Differenzial einer Abbildung	26
2.2	Kettenregel	27
2.3	Vektorfelder und 1-Formen	29
2.4	Gradient	32
2.4.1	Euklidischer Isomorphismus: Vektorfelder \rightarrow 1-Formen	32

2.4.2	Differenzial und Gradient	32
2.4.3	Partielle Ableitung	33
2.5	Wegintegrale	37
2.5.1	Wegintegral in kartesischen Koordinaten	38
2.5.2	Wegintegral einer exakten 1-Form	39
2.5.3	Anschauliche Deutung des Hauptsatzes	40
2.5.4	Wegintegral eines Vektorfeldes	40
2.6	Flächenintegrale	43
2.6.1	2-Formen	43
2.6.2	Integral einer 2-Form	44
2.6.3	Flächenintegral eines Vektorfeldes	46
2.7	Rotation	46
2.7.1	Äußere Ableitung einer 1-Form	47
2.7.2	Rotation eines Vektorfeldes	48
2.7.3	Satz von Stokes	50
2.7.4	Beweis des Satzes von Stokes	52
2.8	Divergenz	53
2.8.1	Volumenintegral einer 3-Form	54
2.8.2	Äußere Ableitung einer 2-Form	55
2.8.3	Divergenz eines Vektorfeldes	56
2.8.4	Satz von Gauss	57
2.9	Visualisierung	59
2.9.1	1 Raumdimension	59
2.9.2	3 Raumdimensionen	64
2.10	Formen vom ungeraden Typ	67
2.10.1	Innere und äußere Orientierung	67
2.10.2	Differenzialformen vom ungeraden Typ	69
2.10.3	Integration ungerader Formen	69
2.10.4	Beispiele aus der Theorie des Elektromagnetismus	70
2.10.5	Zusammenfassende Bemerkungen	72
3	Einfaches zu Differenzialgleichungen	74
3.1	Lineare Differenzialgleichungen	74
3.1.1	Struktur des Lösungsraums	74
3.1.2	Homogene lineare DGL 1. Ordnung	74
3.1.3	Variation der Konstanten	75
3.1.4	Homogene lineare DGL 2. Ordnung: Wronski-Determinante	76
3.1.5	Greenfunktion der linearen DGL 2. Ordnung	77
3.2	Differenzialgleichung mit getrennten Variablen	79

3.2.1	Zurückziehen von Formen	81
3.2.2	Begründung der Eselsbrücke von Abschnitt 3.2	82
4.	Thermodynamik mit Formen (1 Sondervorlesung)	≥ 83 (5 Seiten)
	Anhang: Tensorprodukt	

1 Vektorräume

1.1 Gruppen (Definition)

Eine **Gruppe** (G, \circ) ist eine Menge G , auf der eine Verknüpfung (kurz: Produkt)

$$\circ : G \times G \rightarrow G, \quad (g, h) \mapsto g \circ h,$$

erklärt ist mit den folgenden Eigenschaften:

(i) **Assoziativität:**

$$\forall g, h, k \in G : \quad (g \circ h) \circ k = g \circ (h \circ k).$$

(ii) Existenz eines **neutralen** Elements e :

$$\forall g \in G : \quad g \circ e = g = e \circ g.$$

(iii) Existenz eines **Inversen:**

$$\forall g \in G : \quad \exists h \in G : \quad g \circ h = e = h \circ g.$$

Eine Gruppe heißt **kommutativ**, falls gilt: $g \circ h = h \circ g$ (für alle $g, h \in G$).

Bemerkung. Aus den Axiomen folgt, dass das neutrale Element und das Inverse eindeutig sind. Das zu g inverse Element wird in der Regel mit g^{-1} bezeichnet.

Beispiel 1. Die positiven reellen Zahlen \mathbb{R}_+ mit der gewöhnlichen Multiplikation $x \circ y \equiv x \cdot y$ als Verknüpfung bilden eine kommutative Gruppe (\mathbb{R}_+, \cdot) mit neutralem Element $e = 1$ und Inversen $x^{-1} = 1/x$.

Beispiel 2. Die reellen Zahlen \mathbb{R} mit der gewöhnlichen Addition $\circ \equiv +$ als Verknüpfung bilden eine kommutative Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ mit neutralem Element $e = 0$. Das zu $x \in \mathbb{R}$ inverse Element ist $-x$.

1.2 Reelle Vektorräume (Definition)

Ein (reeller) **Vektorraum** $(V, +; \mathbb{R}, \cdot)$ ist eine kommutative Gruppe $(V, +)$ mit der zusätzlichen Struktur einer **Skalarmultiplikation**

$$\mathbb{R} \times V \rightarrow V, \quad (a, v) \mapsto a \cdot v,$$

die den folgenden Verträglichkeitsbedingungen genügt:

$$a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v, \tag{1.1}$$

$$(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v, \tag{1.2}$$

$$(ab) \cdot v = a \cdot (b \cdot v), \tag{1.3}$$

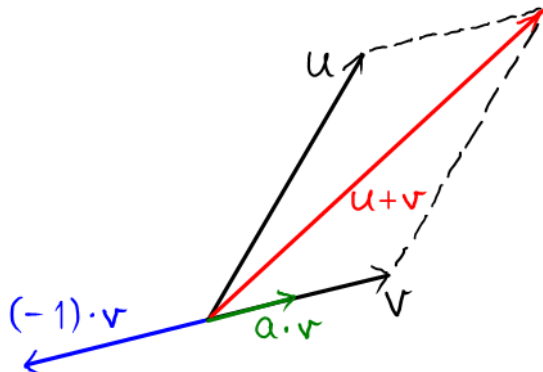
$$1 \cdot v = v, \tag{1.4}$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $u, v \in V$. Die Elemente von V heißen **Vektoren**. Gängige Schreibweisen sind:

$$u - v := u + (-v), \quad v/a := (1/a) \cdot v \quad (a \neq 0).$$

Beispiel 1. $(\mathbb{R}, +; \mathbb{R}, \cdot)$, also $V = \mathbb{R}$.

Beispiel 2. Die Menge aller Translationen (oder Verschiebungsvektoren) im Raum bildet einen Vektorraum.



Beispiel 3. Sei M eine Menge und V ein Vektorraum. Dann ist auch die Menge aller Abbildungen

$$f : M \rightarrow V, \quad x \mapsto f(x),$$

mit der Addition $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ ein Vektorraum.

1.3 Basis und Dimension

Eine Menge $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ von Vektoren eines Vektorraums V heißt **linear unabhängig**, falls für alle $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = \mathbf{0} \implies a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0. \tag{1.5}$$

Andernfalls heißt die Menge **linear abhängig**. (Das Symbol \cdot für die Skalarmultiplikation wird ab hier der Einfachheit halber meist unterdrückt.) Enthalten alle linear unabhängigen Mengen eines Vektorraums V nur endlich viele Vektoren, so heißt V **endlich-dimensional**. (In diesem Abschnitt werden wir nur endlich-dimensionale Vektorräume betrachten).

Ist eine Menge von Vektoren $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ von V linear unabhängig, wird aber durch Hinzunahme eines jeden weiteren Vektors linear abhängig, so heißt diese Menge eine **Basis** von V . Jede Basis von V enthält die gleiche Zahl von Vektoren (ohne Beweis). Diese wohlbestimmte Zahl heißt die **Dimension** von V und wird mit $\dim V$ bezeichnet.

Sei nun $u \in V$ ein beliebiger Vektor und $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ eine Basis von V . Dann existieren Zahlen a_1, a_2, \dots, a_n, b (nicht alle Null), so dass gilt:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n + b u = \mathbf{0}.$$

Ohne Verlust dürfen annehmen, dass u nicht der Nullvektor ist. Dann muss $b \neq 0$ gelten, denn andernfalls wäre B linear abhängig und somit keine Basis. Folglich können wir durch b dividieren und erhalten

$$u = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n \quad (c_i = -a_i/b). \tag{1.6}$$

Jeder Vektor lässt sich also als sog. **Linearkombination** der Vektoren v_1, \dots, v_n der Basis schreiben. Die Zahlen c_1, c_2, \dots, c_n heißen die **Komponenten** von u bzgl. der Basis B . Sie sind eindeutig bestimmt, denn ist c'_1, \dots, c'_n ein zweiter Satz von Komponenten für u , dann ergibt die Subtraktion der zwei Linearkombinationen $u = \sum c_i v_i$ und $u = \sum c'_i v_i$ die Beziehung

$$\mathbf{0} = (c_1 - c'_1)v_1 + \dots + (c_n - c'_n)v_n,$$

und aus der linearen Unabhängigkeit der Basisvektoren v_1, \dots, v_n folgt $c_i - c'_i = 0$ ($i = 1, \dots, n$).

Als Kurzschreibweise vereinbaren wir

$$u = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}_B, \quad B = \{v_1, \dots, v_n\}. \quad (1.7)$$

Der Index B wird fortgelassen, wenn es keine Missverständnisse geben kann, welche Basis B gemeint ist.

1.4 Dualer Vektorraum

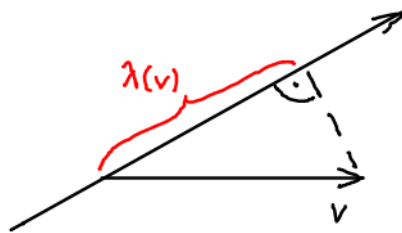
Sei V ein Vektorraum. Unter einer **Linearform** $\lambda : V \rightarrow \mathbb{R}$ versteht man eine Funktion $v \mapsto \lambda(v)$ mit den Eigenschaften

$$\lambda(u + v) = \lambda(u) + \lambda(v), \quad (1.8)$$

$$\lambda(a \cdot v) = a \lambda(v), \quad (1.9)$$

für alle $u, v \in V$ and $a \in \mathbb{R}$.

Beispiel. Die Operation der Orthogonalprojektion auf eine Raumachse ist eine Linearform. \square



Die Menge alle Linearformen $\lambda : V \rightarrow \mathbb{R}$ bildet einen Vektorraum bezüglich der Addition

$$(\lambda + \mu)(v) := \lambda(v) + \mu(v) \quad (1.10)$$

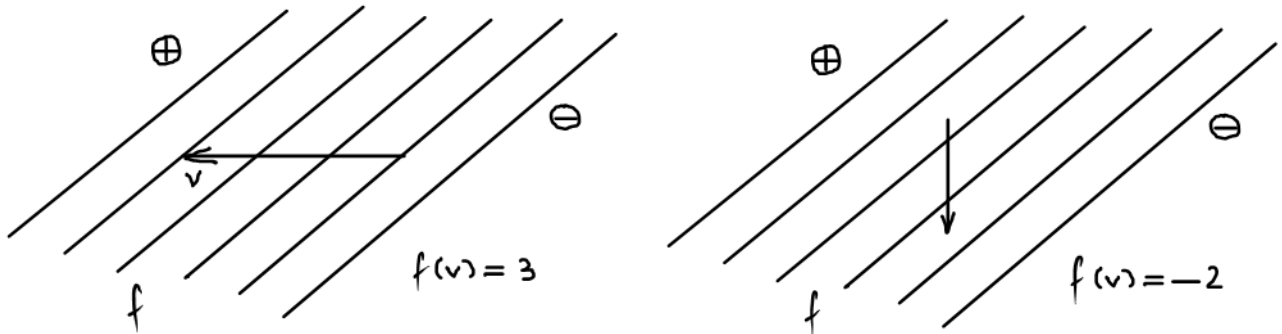
und der Skalarmultiplikation

$$(a \cdot \lambda)(v) := \lambda(a \cdot v). \quad (1.11)$$

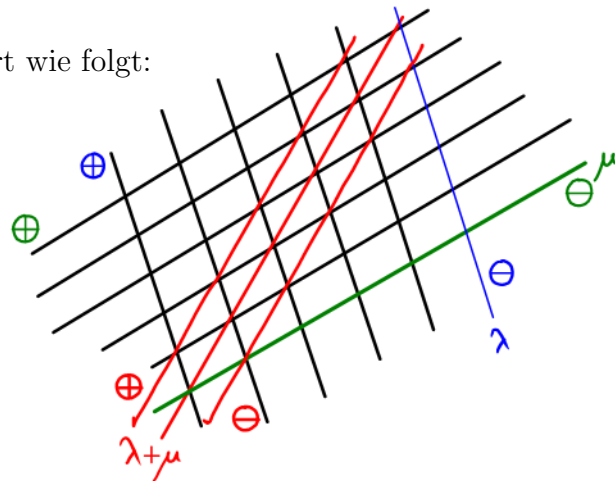
Dieser Vektorraum wird der zu V **duale Vektorraum** genannt und mit V^* bezeichnet.

Beispiel. Sei V der Vektorraum der Translationen im Raum. (Wie üblich visualisieren wir solche Translationen als Verschiebungsvektoren.) Den Dualraum V^* können wir dann als den Raum aller homogenen (also räumlich konstanten) Kraftfelder interpretieren. Diese Interpretation funktioniert, weil in einem homogenen Kraftfeld f der Verschiebung eines Testkörpers um den

Vektor v eine Energieänderung zugeordnet ist, die wir mit dem Wert $f(v)$ identifizieren können. (Genau gesagt meinen wir mit $f(v)$ die Zunahme der kinetischen Energie oder, was bei erhaltener Gesamtenergie dasselbe ist, die Abnahme der potenziellen Energie.) Die Visualisierung des Kraftfeldes f erfolgt über seine **Äquipotenzialflächen**. Für ein homogenes Kraftfeld bilden diese eine (homogene und polarisierte) Schar von parallelen Ebenen. Die Energieänderung $f(v)$ ermittelt man als die (vorzeichenbehaftete) Zahl der von v gekreuzten Äquipotenzialflächen.



Die Addition funktioniert wie folgt:



[Ausblick Wellenphysik: Wellen “vektor” als Linearform.]

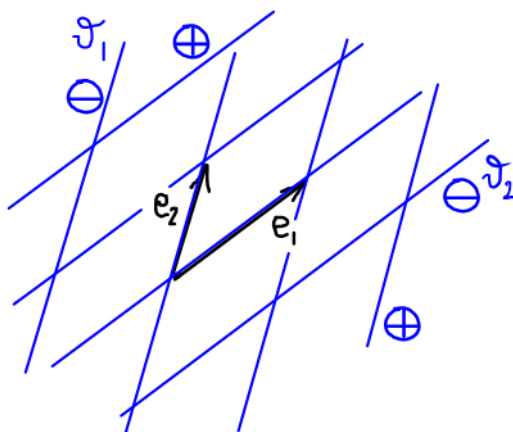
1.5 Dualbasis

Sei $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ eine Basis des reellen Vektorraums V mit der Dimension n . Unter der zugehörigen **Dualbasis** des dualen Vektorraums V^* versteht man die Menge der Linearformen $B^* = \{\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n\}$ mit der Eigenschaft

$$\vartheta_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (i, j = 1, \dots, n). \quad (1.12)$$

(Die Dualbasis B^* wird durch diese Gleichungen eindeutig bestimmt.)

Beispiel.



Beim Rechnen mit Linearformen in V^* zusammen mit Vektoren in V ist es von Vorteil, mit der Dualbasis B^* zu einer gewählten Basis B von V zu arbeiten. Hierzu einige **Erläuterungen**.

Wie jede Basis von V^* kann die Dualbasis $B^* = \{\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n\}$ benutzt werden, um eine beliebige Linearform λ als Linearkombination zu schreiben:

$$\lambda = \lambda_1 \vartheta_1 + \lambda_2 \vartheta_2 + \dots + \lambda_n \vartheta_n. \quad (1.13)$$

Die Komponenten λ_i von λ werden in Kurzschreibweise auch als **Zeilenvektor** zusammengefasst:

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)_{B^*}. \quad (1.14)$$

In dieser Schreibweise gilt insbesondere

$$\vartheta_1 = (1, 0, \dots, 0)_{B^*}, \quad \vartheta_2 = (0, 1, \dots, 0)_{B^*}, \quad \dots, \quad \vartheta_n = (0, 0, \dots, 1)_{B^*}. \quad (1.15)$$

Nun erinnern wir an die Konvention, dass die Komponenten von $v \in V$ (bzgl. B) einen Spaltenvektor bilden:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}_B.$$

Bei Spezialisierung auf die Basisvektoren nimmt diese Darstellung als Spaltenvektor eine besonders einfache Form an:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_B, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_B, \quad \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_B. \quad (1.16)$$

Aus der definierenden Eigenschaft $\vartheta_i(e_j) = \delta_{ij}$ der Dualbasis B^* folgt, dass die Anwendung von ϑ_i auf einen Vektor $v \in V$ die entsprechende Komponente von v (bzgl. B) ergibt:

$$v_i = \vartheta_i(v) \quad (i = 1, \dots, n). \quad (1.17)$$

Umgekehrt erhält man die i -te Komponente λ_i der Linearform λ durch Einsetzen des i -ten Basisvektors:

$$\lambda_i = \lambda(e_i) \quad (i = 1, \dots, n). \quad (1.18)$$

Für eine beliebige Linearform λ und einen beliebigen Vektor v hat man dann

$$\lambda(v) = \sum_i \lambda_i \vartheta_i \left(\sum_j v_j e_j \right) = \sum_{i,j} \lambda_i v_j \vartheta_i(e_j) = \sum_i \lambda_i v_i. \quad (1.19)$$

Dieser Ausdruck lässt sich prägnant mit der Regel **“Zeile mal Spalte”** umschreiben:

$$\lambda(v) = \sum_i \lambda_i v_i = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)_{B^*} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}_B. \quad (1.20)$$

1.6 Basiswechsel

Was passiert nun, wenn wir die Basis $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ wechseln, also durch eine andere Basis $\tilde{B} = \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$ ersetzen? Es gibt mehrere Möglichkeiten des Vorgehens (die am Ende auf das Gleiche hinauslaufen). Hier gehen wir so vor, dass wir die alte Basis durch die neue ausdrücken:

$$e_j = \sum_i \tilde{e}_i T_{ij}. \quad (1.21)$$

Da es sich bei der neuen Basis \tilde{B} wieder um eine Basis handelt, sind die Koeffizienten $T_{ij} \in \mathbb{R}$ eindeutig bestimmt. Sie lassen sich in Form einer quadratischen **Matrix** anordnen:

$$(T_{ij}) = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1n} \\ T_{21} & T_{22} & \dots & T_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n1} & T_{n2} & \dots & T_{nn} \end{pmatrix}. \quad (1.22)$$

Nun ist jeder Vektor unabhängig von der Wahl der Basis. Es gilt also

$$v = \sum_j v_j e_j = \sum_i \tilde{v}_i \tilde{e}_i, \quad (1.23)$$

wobei mit \tilde{v}_i die Komponenten von v bezüglich der neuen Basis $\tilde{B} = \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$ gemeint sind. Durch Einsetzen der Beziehung (1.21) entsteht

$$v = \sum_{j,i} v_j \tilde{e}_i T_{ij}.$$

Da die Komponenten \tilde{v}_i eindeutig bestimmt sind, liefert der **Koeffizientenvergleich** mit (1.23) das Ergebnis

$$\tilde{v}_i = \sum_j T_{ij} v_j. \quad (1.24)$$

In der alternativen Schreibweise mit Matrizen und Spaltenvektoren sieht das wie folgt aus:

$$\begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \vdots \\ \tilde{v}_n \end{pmatrix}_{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} T_{11} & \dots & T_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n1} & \dots & T_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}_B. \quad (1.25)$$

(Hier wird die **Multiplikationsregel** für Matrizen und Spaltenvektoren als bekannt vorausgesetzt.)

Wir wenden uns jetzt den **Linearformen** zu. Für die Dualbasis $\tilde{B} = \{\tilde{\vartheta}_1, \dots, \tilde{\vartheta}_n\}$ gilt wieder $\tilde{\vartheta}_i(\tilde{e}_j) = \delta_{ij}$. Aus Gleichung (1.21) und dem Ansatz $\vartheta_i = \sum_l S_{il} \tilde{\vartheta}_l$ folgt hiermit

$$\delta_{ij} = \vartheta_i(e_j) = \sum_k \vartheta_i(\tilde{e}_k) T_{kj} = \sum_{k,l} S_{il} \tilde{\vartheta}_l(\tilde{e}_k) T_{kj} = \sum_k S_{ik} T_{kj}. \quad (1.26)$$

Die Matrix der Koeffizienten S_{ik} ist also **invers** zur Matrix der Koeffizienten T_{kj} :

$$\begin{pmatrix} S_{11} & \dots & S_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n1} & \dots & S_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} & \dots & T_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n1} & \dots & T_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.27)$$

(Hier wird die Multiplikationsregel für Matrizen als bekannt vorausgesetzt.) Wir schreiben für diesen Zusammenhang auch $S_{ij} = (T^{-1})_{ij}$ oder $S = T^{-1}$.

Um die Komponenten einer Linearform λ in die neue Basis umzurechnen, benützen wir die Gleichung (1.24) in Kombination mit der Tatsache, dass $\lambda(v)$ basisunabhängig erklärt ist:

$$\lambda(v) = \sum_j \lambda_j v_j = \sum_i \tilde{\lambda}_i \tilde{v}_i = \sum_{i,j} \tilde{\lambda}_i T_{ij} v_j. \quad (1.28)$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt $\lambda_j = \sum_i \tilde{\lambda}_i T_{ij}$. Um nach $\tilde{\lambda}_i$ aufzulösen, multiplizieren wir mit S_{jk} , summieren über j und verwenden die Variante $\sum_j T_{ij} S_{jk} = \delta_{ik}$ von Gleichung (1.26). So entsteht

$$\tilde{\lambda}_i = \sum_j \lambda_j S_{ji}. \quad (1.29)$$

Resumée. Unter einem **Basiswechsel** $e_j = \sum_i \tilde{e}_i T_{ij}$ ändern sich die Komponenten eines Vektors v bzw. einer Linearform λ wie folgt:

$$\tilde{v}_i = \sum_j T_{ij} v_j, \quad \tilde{\lambda}_i = \sum_j \lambda_j (T^{-1})_{ji}. \quad (1.30)$$

In Worten: die als Spaltenvektor arrangierten Komponenten von v werden durch (Links-)Multiplikation mit der Matrix T transformiert. Hingegen werden die als Zeilenvektor arrangierten Komponenten von λ durch Rechtsmultiplikation mit der inversen Matrix T^{-1} transformiert:

$$(\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_n) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \begin{pmatrix} (T^{-1})_{11} & \dots & (T^{-1})_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (T^{-1})_{n1} & \dots & (T^{-1})_{nn} \end{pmatrix}. \quad (1.31)$$

Bemerkung. Die invariante (d.h. basisunabhängige) **Paarung**

$$V^* \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\lambda, v) \mapsto \lambda(v)$$

zwischen Linearformen und Vektoren ist fundamental für sehr viele Beziehungen in der Physik. Im Beispiel von Abschnitt 1.4 haben wir bereits die Paarung

$$\text{Kraft} \times \text{Verschiebung} \rightarrow \text{Energie(änderung)}$$

kennengelernt. Weitere Beispiele von diesem Typ sind

$$\begin{aligned} &\text{Kraft} \times \text{Geschwindigkeit} \rightarrow \text{Leistung}, \\ &\text{Impuls} \times \text{Geschwindigkeit} \rightarrow \text{kinetische Energie } (\times 2), \\ &\text{Drehimpuls} \times \text{Winkelgeschwindigkeit} \rightarrow \text{Rotationsenergie } (\times 2), \\ &\text{elektrische Feldstärke} \times \text{Verschiebung} \rightarrow \text{elektrische Spannung}, \\ &\text{elektrische Feldstärke} \times \text{Stromdichte} \rightarrow \text{Leistungsdichte}. \end{aligned}$$

Für diese Paarungen spielt die **Geometrie** des Raumes keine Rolle.

1.7 Lineare Abbildungen

Definition. Sei $A : U \rightarrow V$ eine Abbildung zwischen zwei Vektorräumen U, V . Die Abbildung A heißt linear, falls für alle $u, u' \in U$ und $b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$A(u + u') = A(u) + A(u'), \quad A(b \cdot u) = b \cdot A(u). \quad (1.32)$$

Für eine lineare Abbildung L verwenden wir die vereinfachte Notation $L(u) \equiv Lu$.

Beispiel. Wählen wir in der obigen Definition $V = \mathbb{R}$, betrachten wir also lineare Abbildungen $L : U \rightarrow \mathbb{R}$, dann handelt es sich um die in Abschnitt 1.4 eingeführten Linearformen. \square

Die linearen Abbildungen $L : U \rightarrow V$ bilden selbst wieder einen Vektorraum mit der durch $(A+B)(u) = A(u) + B(u)$ erklärten Addition. Dieser Vektorraum wird mit $\text{Hom}(U, V)$ bezeichnet. Für $U = V$ schreibt man $\text{Hom}(V, V) = \text{End}(V)$. Für $V = \mathbb{R}$ haben wir $\text{Hom}(U, \mathbb{R}) = U^*$.

Matrixdarstellung einer linearen Abbildung.

Sei $L : U \rightarrow V$ eine lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen U und V , also $L \in \text{Hom}(U, V)$. Durch die Wahl von Basen $B = \{e_1, \dots, e_m\}$ für U und $C = \{f_1, \dots, f_n\}$ für V wird L eine Matrix (L_{ij}) zugeordnet. Dies geschieht durch

$$Le_j = \sum_i f_i L_{ij}, \quad (1.33)$$

oder mit Hilfe der Dualbasis $C^* = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ durch

$$L_{ij} = \varphi_i(Le_j). \quad (1.34)$$

Nun möchten wir wissen, was unter der linearen Transformation $u \mapsto Lu$ mit den Komponenten (bzgl. B bzw. C) des Vektors u passiert. Dazu schreiben wir u als Linearkombination $u = \sum_j u_j e_j$ and verwenden die Linearität der Abbildung:

$$Lu = L\left(\sum_j u_j e_j\right) = \sum_j u_j Le_j = \sum_{i,j} u_j f_i L_{ij}.$$

Folglich gilt

$$(Lu)_i = \varphi_i(Lu) = \sum_j L_{ij} u_j. \quad (1.35)$$

In der Schreibweise als Spaltenvektor haben wir

$$\begin{pmatrix} (Lu)_1 \\ \vdots \\ (Lu)_n \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} L_{11} & \dots & L_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n1} & \dots & L_{nm} \end{pmatrix}_{C,B} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}_B. \quad (1.36)$$

Verkettung. Werden zwei lineare Abbildungen $L : U \rightarrow V$ und $K : V \rightarrow W$ hintereinander ausgeführt,

$$KL : U \xrightarrow{L} V \xrightarrow{K} W, \quad (1.37)$$

so erhält man wieder eine lineare Abbildung $KL : U \rightarrow W$. (Bezüglich dieser Produktoperation bilden die invertierbaren linearen Abbildungen $g \in \text{End}(V)$ eine Gruppe namens $\text{GL}(V)$ mit der

identischen Abbildung $v \mapsto v$ als neutralem Element.) Wichtig ist nun, dass die Zuordnung von linearen Abbildungen zu Matrizen die Gruppenstruktur erhält. In anderen Worten: sind B, C bzw. D Basen für U, V bzw. W , und sind $(K_{dc}), (L_{cb})$ und $((KL)_{db})$ die entsprechenden Matrizen, dann gilt

$$(KL)_{db} = \sum_c K_{dc} L_{cb}. \quad (1.38)$$

Man kann also die Matrix der Hintereinanderausführung KL direkt bilden, oder die Matrizen von K und L individuell bilden und sie dann als Matrizen multiplizieren (wobei die Reihenfolge der Multiplikation gleich bleibt) – das Ergebnis ist dasselbe (Beweis als Übungsaufgabe).

Merkregel. Die Matrix einer linearen Abbildung $L : U \rightarrow V$ bzgl. der Basen $B = \{e_1, \dots, e_m\}$ von U und $C = \{f_1, \dots, f_n\}$ von V erhält man, indem man die Spalten der Matrix mit den Spaltenvektoren der Bilder der Basisvektoren befüllt. Genau gesagt kommt in die j -te Spalte der Spaltenvektor mit (vertikal angeordneten) Komponenten $(Le_j)_1, \dots, (Le_j)_n$.

Definition. Eine lineare Abbildung $L : U \rightarrow V$ heißt **injektiv**, wenn das Bild $Lu \in V$ eines jeden von Null verschiedenen Vektors $u \in U$ wieder von Null verschieden ist; oder anders ausgedrückt, wenn gilt: $Lu = \mathbf{0}_V \Rightarrow u = \mathbf{0}_U$. Eine lineare Abbildung $L : U \rightarrow V$ heißt **surjektiv**, wenn jeder Vektor in V das Bild (unter L) eines Vektors U ist; in Formeln: $v \in V \Rightarrow \exists u \in U : Lu = v$. Eine lineare Abbildung, die sowohl injektiv als auch surjektiv ist, heißt ein **Isomorphismus**. (Im allgemeinen Fall von Abbildungen zwischen beliebigen Mengen spricht man von bijektiv.)

Mitteilung. Ein Isomorphismus $L : U \rightarrow V$ zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen kann nur dann existieren, wenn U und V die gleiche Dimension haben. Ein Isomorphismus $L : U \rightarrow V$ besitzt ein eindeutiges Inverses $L^{-1} : V \rightarrow U$.

1.8 Transponierte einer linearen Abbildung

Zu jeder linearen Abbildung $L : U \rightarrow V$ existiert die **transponierte** (oder kanonisch adjungierte) Abbildung, L^T . Sie vermittelt zwischen den dualen Vektorräumen (also U^* und V^*) und ist erklärt durch

$$L^T : V^* \rightarrow U^*, \quad (L^T \lambda)(u) = \lambda(Lu). \quad (1.39)$$

Die Situation wird durch das folgende **Diagramm** einprägsam ausgedrückt:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{L} & V, \\ U^* & \xleftarrow{L^T} & V^*. \end{array} \quad (1.40)$$

Die Matrizen von L und L^T (bzgl. passender Basen) hängen in einfacher Weise miteinander zusammen. Wie zuvor arbeiten wir mit Basen $B = \{e_1, \dots, e_m\}$ für U und $C = \{f_1, \dots, f_n\}$ für V . Die entsprechenden Dualbasen seien $B^* = \{\vartheta_1, \dots, \vartheta_m\}$ und $C^* = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$. Die Matrix von L ist bekanntlich (L_{ij}) mit $L_{ij} = \varphi_i(Le_j)$. Nach dem gleichen Prinzip (nämlich: L^T auf die Basislinearformen in C^* anwenden und die Bildformen durch die Basis B^* ausdrücken) ergibt sich die

Matrix von L^T zu $((L^T)_{ji})$ mit

$$(L^T)_{ji} = (L^T \varphi_i)(e_j) = \varphi_i(Le_j).$$

Es gilt also

$$(L^T)_{ji} = L_{ij}, \quad (1.41)$$

oder in Matrixschreibweise (z.B. für $m < n$)

$$((L^T)_{ji})_{B^*, C^*} = \begin{pmatrix} L_{11} & \dots & L_{m1} & \dots & L_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ L_{1m} & \dots & L_{mm} & \dots & L_{nm} \end{pmatrix}, \quad (L_{ij})_{C, B} = \begin{pmatrix} L_{11} & \dots & L_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{m1} & \dots & L_{mm} \\ \vdots & & \vdots \\ L_{n1} & \dots & L_{nm} \end{pmatrix}. \quad (1.42)$$

Ein wichtiger Spezialfall sind Abbildungen $L : V \rightarrow V^*$ zwischen einem Vektorraum und seinem eigenen Dualraum. Wegen $(V^*)^* = V$ (für $\dim V < \infty$) ist die Transponierte von L dann wieder eine lineare Abbildung $L^T : V \rightarrow V^*$.

Definition. Eine lineare Abbildung $L : V \rightarrow V^*$ heißt **symmetrisch** (bzw. schief-symmetrisch), falls gilt $L = L^T$ (bzw. $L = -L^T$).

Bemerkung. Für eine symmetrische lineare Abbildung $L : V \rightarrow V^*$ hat man

$$(Lv)(v') = (Lv')(v) \quad (\text{für alle } v, v' \in V), \quad (1.43)$$

für eine schief-symmetrische Abbildung gilt Entsprechendes mit geändertem Vorzeichen. Die einer symmetrischen Abbildung (durch Wahl einer Basis $B = \{e_1, \dots, e_n\}$) zugeordnete Matrix (L_{ij}) hat die Eigenschaft

$$L_{ij} = (Le_i)(e_j) = (Le_j)(e_i) = L_{ji}. \quad (1.44)$$

Für eine schief-symmetrische Abbildung $L = -L^T$ hat man $L_{ij} = -L_{ji}$.

Beispiel 1. Der **Massentensor** eines Teilchens im anisotropen Medium ist eine symmetrische lineare Abbildung M , die der Geschwindigkeit v den entsprechenden Impuls p zuordnet:

$$M : v \mapsto p = Mv, \quad M = M^T. \quad (1.45)$$

Beispiel 2. Der **Trägheitstensor** (z.B. eines starren Körpers) ist eine symmetrische lineare Abbildung I , die die Winkelgeschwindigkeit ω in den entsprechenden Drehimpuls L transformiert:

$$I : \omega \mapsto L = I\omega, \quad I = I^T. \quad (1.46)$$

Beispiel 3. Der **Leitfähigkeitstensor** σ eines elektrisch leitenden Materials ist (in linearer Näherung) eine lineare Abbildung, die elektrische Feldstärken E in elektrische Stromdichten j transformiert:

$$\sigma : E \mapsto j = \sigma E. \quad (1.47)$$

Es gilt die sog. Onsager-Relation $\sigma(B)^T = \sigma(-B)$ (mit B der magnetischen Feldstärke).

1.9 Alternierende 2-lineare Formen

Definition. Sei V ein Vektorraum. Eine **alternierende 2-lineare Form** ω auf V ist eine Abbildung

$$\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

mit den Eigenschaften

(i) **Schiefsymmetrie:**

$$\omega(u, v) = -\omega(v, u) \quad (u, v \in V).$$

(ii) **(Bi-)Linearität:**

$$\omega(u + v, w) = \omega(u, w) + \omega(v, w) \quad (u, v, w \in V),$$

$$\omega(a \cdot u, v) = a \omega(u, v) \quad (a \in \mathbb{R}).$$

Der Vektorraum der alternierenden 2-linearen Formen auf V heißt **$\text{Alt}^2(V)$** .

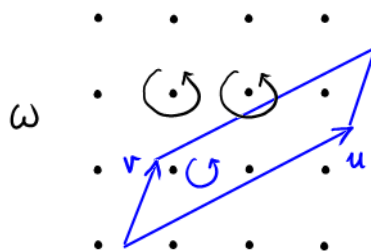
Bemerkung. Eine alternierende 2-lineare Form $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ist im Grunde dasselbe wie eine schiefssymmetrische lineare Abbildung $S : V \rightarrow V^*$. Der Übergang von der einen zur anderen wird durch die folgende Formel geliefert:

$$Sv = \omega(v, \cdot). \quad (1.48)$$

Ausgehend von der alternierenden 2-linearen Form ω erhält man also $Sv \in V^*$ durch Einsetzen von $v \in V$ in das linke Argument von ω . Umgekehrt definiert eine schiefssymmetrische lineare Abbildung $S : V \rightarrow V^*$ eine alternierende 2-lineare Form $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ durch $\omega(u, v) = (Su)(v) = -(Sv)(u) = -\omega(v, u)$. \square

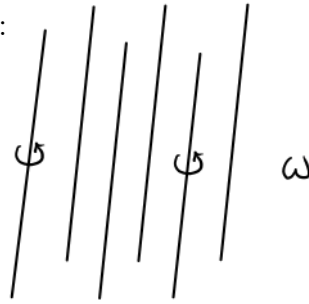
Ähnlich wie für Linearformen lässt sich auch für alternierende 2-lineare Formen ein anschauliches Modell angeben. Die Details des Modells hängen von der Raumdimension ab. (In d Dimensionen verwendet man eine Schar von Hyperebenen der Dimension $d - 2$.)

Modell $d = 2$. Ein Element $\omega \in \text{Alt}^2(\mathbb{R}^2)$ lässt sich als homogene Schar von Punkten mit **Umlaufsinn** visualisieren:



Der Zahlenwert $\omega(u, v)$ wird ermittelt, indem man die vorzeichenbehaftete Zahl der Punkte von ω im Parallelogramm mit den Kanten u und v abzählt (inklusive Dezimalteil, durch Mitteln über alle translatierten Parallelogramme). Das Vorzeichen ist plus oder minus je nachdem, ob der Zirkulationssinn des Parallelogramms ("zuerst u , dann v ") mit dem Umlaufsinn der Punkte von ω übereinstimmt bzw. nicht übereinstimmt.

Modell $d = 3$. Ein Element $\omega \in \text{Alt}^2(\mathbb{R}^3)$ lässt sich als homogene Schar von Geraden mit Zirkulationssinn visualisieren:



Der Zahlenwert $\omega(u, v)$ wird ermittelt, indem man die vorzeichenbehaftete Zahl der Kreuzungspunkte der Geradenschar von ω mit dem von u und v aufgespannten Parallelogramm bestimmt. Das Vorzeichen ist wieder plus/minus je nachdem, ob der Zirkulationssinn übereinstimmt oder nicht.

Beispiel. Die Feldstärke B eines homogenen Magnetfelds im dreidimensionalen Raum ist eine alternierende 2-lineare Form $B \in \text{Alt}^2(\mathbb{R}^3)$. Bewegt man ein stromtragendes Kabel mit (konstant gehaltenem) elektrischen Teststrom I über das von u und v aufgespannte Parallelogramm hinweg (Anfangskonfiguration: “zuerst u , dann v ”; Endkonfiguration: “zuerst v , dann u ”), dann ist die Arbeit $W = IB(u, v)$ aufzubringen.

1.10 Äußeres Produkt

Definition. Sei V ein Vektorraum mit Dualraum V^* . Für zwei Linearformen $\lambda, \mu \in V^*$ erklärt man das äußere Produkt $\lambda \wedge \mu \in \text{Alt}^2(V)$ durch

$$(\lambda \wedge \mu)(v, w) = \lambda(v)\mu(w) - \lambda(w)\mu(v).$$

Visualisierung. Für den Fall $V = \mathbb{R}^3$ behaupten wir, dass sich das äußere Produkt wie folgt anschaulich verstehen lässt. (i) Die Geradenschar von $\lambda \wedge \mu$ entsteht durch Bilden des Durchschnitts der Ebenenscharen von λ und μ . (ii) Den Zirkulationssinn von $\lambda \wedge \mu$ bekommt man mit der Regel “gehe zuerst in Richtung des Pluspols von λ , biege dann in Richtung des Pluspols von μ ab”.

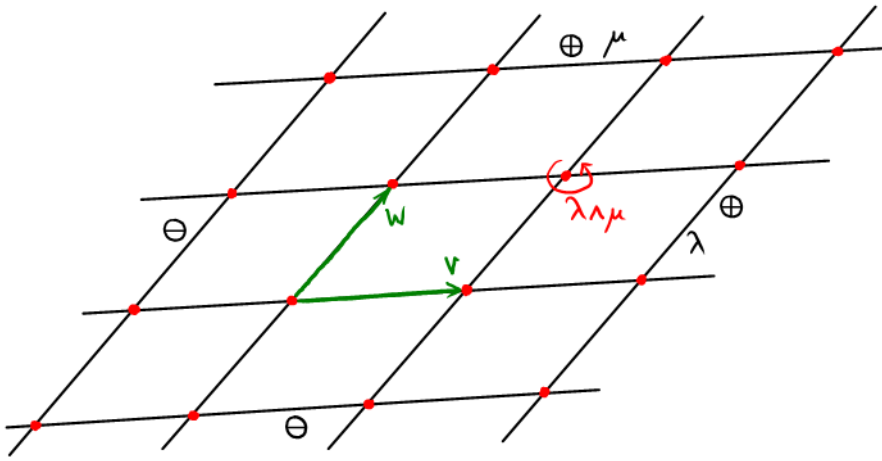
Beweis. Die Linearformen λ und μ seien linear unabhängig. (Andernfalls gilt $\lambda \wedge \mu = 0$.) Dann existiert ein linear unabhängiges Tripel von Vektoren u, v, w mit den Eigenschaften

$$\lambda(v) = \mu(w) = 1, \quad \lambda(w) = \mu(v) = \lambda(u) = \mu(u) = 0.$$

Durch einfache Rechnung erhält man

$$(\lambda \wedge \mu)(v, w) = 1, \quad (\lambda \wedge \mu)(w, u) = 0, \quad (\lambda \wedge \mu)(u, v) = 0.$$

Diese drei Gleichungen legen $\lambda \wedge \mu$ eindeutig fest. Die letzten zwei besagen, dass die Geradenschar von $\lambda \wedge \mu$ parallel zum Vektor u liegen muss. Da dieser Vektor seinerseits wegen $\lambda(u) = \mu(u) = 0$ parallel zu den Ebenenscharen von λ und μ liegt, ist die Geradenschar von $\lambda \wedge \mu$ parallel zu den Schnittgeraden der Ebenenscharen von λ und μ . Aus $(\lambda \wedge \mu)(v, w) = 1$ folgt schließlich, dass die Geradenschar von $\lambda \wedge \mu$ nicht nur parallel zur Schnittgeradenschar der Linearformen λ, μ liegt, sondern sogar mit ihr identisch ist.



1.11 Normierter Vektorraum

Definition. Sei V ein Vektorraum. Eine **Norm**

$$\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto \|v\|,$$

ist eine Funktion mit den Eigenschaften

- (i) $\|v\| > 0$ für $v \neq 0$.
- (ii) $\|a \cdot v\| = |a| \|v\|$ für alle $a \in \mathbb{R}$, $v \in V$.
- (iii) Es gilt die **Dreiecksungleichung**:

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad (u, v \in V).$$

Ein Vektorraum $(V, \| \cdot \|)$ mit Norm heißt **normiert**.

Beispiel 1. Für $V = \mathbb{R}$ ist die Betragsfunktion $a \mapsto |a|$ eine Norm.

Beispiel 2. Für einen Vektorraum V sei der Dualraum V^* mit einer Basis $B^* = \{\vartheta_1, \dots, \vartheta_n\}$ ausgestattet. Dann hat man für jede reelle Zahl $p \geq 1$ eine Norm durch

$$\|v\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |\vartheta_i(v)|^p \right)^{1/p}. \quad (1.49)$$

Sie heißt **p -Norm**. Für $p = 1$ entsteht die sog. Summennorm, für $p \rightarrow \infty$ die Maximumsnorm.

1.12 Euklidischer Vektorraum

In den bis Abschnitt 1.10 betrachteten Vektorräumen und ihren Dualräumen, insbesondere bei der Paarung zwischen Vektoren und Linearformen, traten metrische Beziehungen nicht auf. Diese Vektorräume waren sozusagen “unstrukturiert”, was die Geometrie angeht. Im Gegensatz hierzu existiert in sog. Euklidischen Vektorräumen die Struktur eines Euklidischen Skalarprodukts. Dieses eröffnet die Möglichkeit der Längen- und Winkelmessung für Vektoren und Linearformen.

Definition. Sei V ein reeller Vektorraum. Unter einem **Euklidischen Skalarprodukt** auf V versteht man eine Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

mit den folgenden Eigenschaften.

(i) **Linearität:**

$$\langle u, a \cdot v + b \cdot w \rangle = a \langle u, v \rangle + b \langle u, w \rangle \quad (a, b \in \mathbb{R}; u, v, w \in V).$$

(ii) **Symmetrie:**

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle \quad (u, v \in V).$$

(iii) **Positivität:**

$$\langle v, v \rangle > 0 \quad \text{für alle } v \in V, v \neq \mathbf{0}.$$

Ein Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ mit Euklidischem Skalarprodukt heißt **Euklidisch**. In einem Euklidischen Vektorraum existiert eine kanonische Norm, die Euklidische Norm. Sie ist definiert als die positive Wurzel des Euklidischen Skalarprodukts eines Vektors mit sich selbst:

$$\|v\| := +\sqrt{\langle v, v \rangle}. \quad (1.50)$$

Die Euklidische Norm $\|v\|$ eines Vektors v wird auch als seine **Länge** bezeichnet. Die Euklidische Norm spielt also die Rolle eines Längenmaßstabs.

Der **Winkel** $\angle(u, v)$ zwischen zwei Vektoren u, v ist erklärt durch

$$\cos \angle(u, v) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}. \quad (1.51)$$

Zwei Vektoren u, v mit der Eigenschaft $\langle u, v \rangle = 0$ heißen zueinander senkrecht oder **orthogonal**.

Definition. Unter einer **Orthonormalbasis** des Euklidischen Vektorraums V versteht man eine Basis $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ von V mit der Eigenschaft

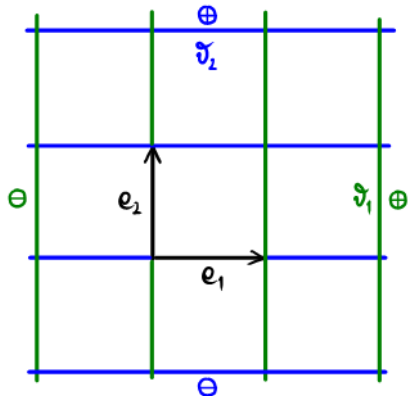
$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, n). \quad \square$$

Bemerkung. Bezüglich einer Orthonormalbasis $\{e_1, \dots, e_n\}$ wird das Euklidische Skalarprodukt zweier Vektoren $u = \sum u_i e_i$ und $v = \sum v_i e_i$ wie folgt ausgedrückt:

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i. \quad (1.52)$$

Die Dualbasis zu einer Orthonormalbasis $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ ist

$$B^* = \{\vartheta_1, \dots, \vartheta_n\}, \quad \vartheta_i = \langle e_i, \cdot \rangle. \quad (1.53)$$



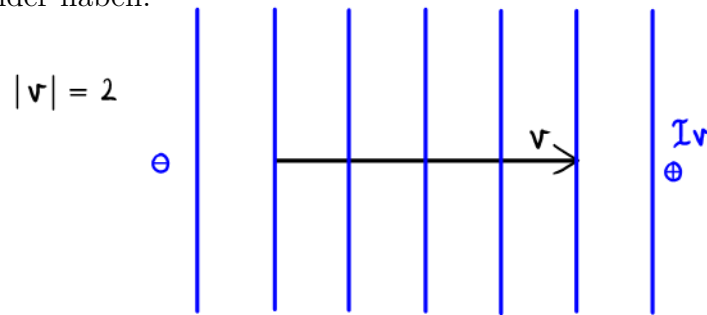
1.13 Euklidischer Isomorphismus: Vektoren \rightarrow Linearformen

Sei V ein Euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Jedem Vektor in V ist dann in kanonischer Weise eine Linearform in V^* zugeordnet. Diese Zuordnung erfolgt durch

$$\mathcal{I} : V \rightarrow V^*, \quad v \mapsto \langle v, \cdot \rangle. \quad (1.54)$$

Vulgär gesprochen macht sie aus dem Vektor v das ‘‘hungrige Skalarprodukt’’ $\lambda = \langle v, \cdot \rangle$. Letzteres ist eine Linearform $\lambda : V \rightarrow \mathbb{R}$ mit Wert $\lambda(v') = \langle v, v' \rangle$.

Visualisierung. Wir verwenden das in Abschnitt 1.4 vorgestellte Modell von Linearformen auf V als Scharen von äquidistanten parallelen Ebenen der Dimension $\dim V - 1$ (oder Kodimension Eins). Für $\dim V = 2$ haben wir es mit Geraden zu tun, für $\dim V = 3$ mit gewöhnlichen (also zwei-dimensionalen) Ebenen, für $\dim V = d$ mit $(d - 1)$ -dimensionalen ‘‘Hyperebenen’’. Die Schar der Linearform $\mathcal{I}v = \langle v, \cdot \rangle$ zum Vektor v besteht aus den Ebenen, die auf v senkrecht stehen und den Abstand $1/|v|$ voneinander haben.



Infolge der Eigenschaften des Euklidischen Skalarprodukts ist die Abbildung $\mathcal{I} : V \rightarrow V^*$ **symmetrisch** ($\mathcal{I}^T = \mathcal{I}$), und sie ist ein **Isomorphismus**, also linear und bijektiv. Insbesondere existiert die inverse Abbildung

$$\mathcal{I}^{-1} : V^* \rightarrow V \quad (1.55)$$

von Linearformen auf Vektoren. Mit Hilfe des inversen Isomorphismus \mathcal{I}^{-1} lässt sich das Euklidische Skalarprodukt von V nach V^* übertragen:

$$\langle \lambda, \mu \rangle_{V^*} = \langle \mathcal{I}^{-1}\lambda, \mathcal{I}^{-1}\mu \rangle_V. \quad (1.56)$$

Gemäß dieser Definition ist die Dualbasis $\{\vartheta_1, \dots, \vartheta_n\}$ einer Orthonormalbasis $\{e_1, \dots, e_n\}$ wieder eine Orthonormalbasis:

$$\langle \vartheta_i, \vartheta_j \rangle_{V^*} = \langle \mathcal{I}^{-1}\vartheta_i, \mathcal{I}^{-1}\vartheta_j \rangle_V = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}. \quad (1.57)$$

Hierbei wurde die Relation $\vartheta_i = \mathcal{I}e_i$ benutzt.

Bemerkung. Mit dem inversen Isomorphismus \mathcal{I}^{-1} lassen sich physikalische Größen, die archetypisch Linearformen sind, in Vektoren konvertieren. Insbesondere wird im Euklidischen Vektorraum $V \simeq \mathbb{R}^3$ jeder Kraftform $F \in V^*$ ein entsprechender Kraftvektor $\mathcal{I}^{-1}F \in V$ zugeordnet.

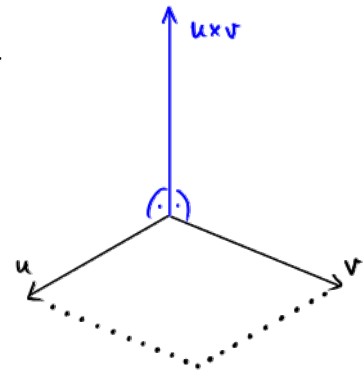
1.14 Vektorprodukt im \mathbb{R}^3

Wir kommen jetzt zu einer besonderen Operation, die nur im dreidimensionalen Euklidischen Vektorraum definiert werden kann.

Definition. Sei V der dreidimensionale Euklidische Vektorraum ($V \simeq \mathbb{R}^3$), und sei $u, v \in V$ ein Paar von Vektoren. Unter dem **Vektorprodukt** von u mit v versteht man den Vektor $u \times v \in V$ mit den folgenden Eigenschaften. Sind u und v linear abhängig, dann ist $u \times v = 0$. Sind u und v linear unabhängig, dann gilt:

- (i) $\langle u, u \times v \rangle = 0 = \langle u \times v, v \rangle$, d.h. $u \times v$ steht senkrecht auf beiden Faktoren u und v .
- (ii) $u, v, u \times v$ (in dieser Reihenfolge) genügen der **Rechte-Hand-Regel** ("zuerst in Richtung des Daumens, dann des Zeigefingers, dann des Mittelfingers").
- (iii) Die Länge von $u \times v$ ist $\|u \times v\| = \|u\| \|v\| |\sin \angle(u, v)|$.

Das Vektorprodukt $u \times v$ steht senkrecht auf der von u und v aufgespannten Ebene. Seine Länge ist gleich der Fläche des Parallelogramms mit den Kantenvektoren u und v .



Aus dieser Definition folgt (ohne dass wir hier einen Beweis geben), dass das Vektorprodukt $V \times V \rightarrow V$ schiefsymmetrisch und bilinear ist, also

$$u \times v = -v \times u, \quad u \times (av + bw) = au \times v + bu \times w. \quad (1.58)$$

Für jede rechtshändige Orthonormalbasis e_x, e_y, e_z verifiziert man sofort

$$e_x \times e_y = e_z, \quad e_y \times e_z = e_x, \quad e_z \times e_x = e_y. \quad (1.59)$$

Für zwei beliebige Vektoren $u = u_x e_x + u_y e_y + u_z e_z$ und $v = v_x e_x + v_y e_y + v_z e_z$ hat man dann

$$u \times v = (u_x v_y - v_x u_y) e_z + (u_y v_z - v_y u_z) e_x + (u_z v_x - v_z u_x) e_y. \quad (1.60)$$

In der Darstellung als Spaltenvektor gilt

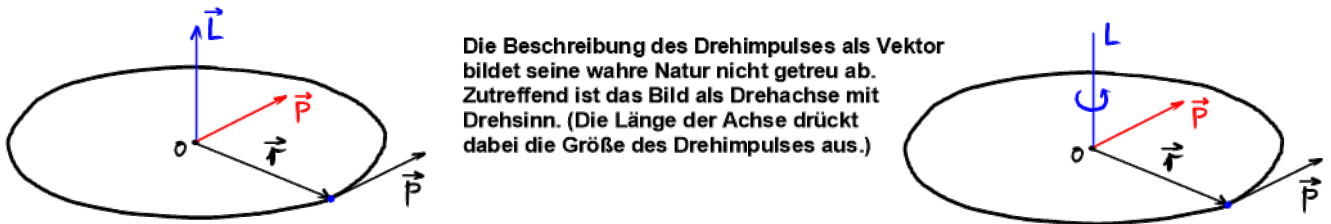
$$\begin{pmatrix} (u \times v)_x \\ (u \times v)_y \\ (u \times v)_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_y v_z - v_y u_z \\ u_z v_x - v_z u_x \\ u_x v_y - v_x u_y \end{pmatrix}. \quad (1.61)$$

Kritik. Die Operation des Vektorprodukts ist von einem fundamentalen Standpunkt aus gesehen eigentlich überflüssig und unpassend. Es "passt nicht", weil es unnötigerweise eine willkürlich gewählte Konvention, nämlich die Rechte-Hand-Regel, ins Spiel bringt, die den Naturgesetzen an sich fremd ist (Ausnahme: schwache Wechselwirkung). Trotzdem wird in physikalischen Lehrbüchern und Texten vom Vektorprodukt ausgiebig Gebrauch gemacht.

Beispiel. Einem Körper mit Impulsvektor \vec{p} und Ortsvektor \vec{r} (bzgl. eines ausgezeichneten Punktes, des “Koordinatenursprungs”; siehe Abschnitt 1.18) ordnet man in der traditionellen Physik-Didaktik seinen Drehimpulsvektor \vec{L} zu durch

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}. \quad (1.62)$$

Hierbei ist anzumerken, dass der Drehimpulsvektor kein Vektor im eigentlichen Sinn ist, denn sein Transformationsverhalten ist von dem eines Vektors verschieden: unter einer Raumspiegelung am Koordinatenursprung gehen Vektoren wie \vec{r} und \vec{p} in ihr Negatives über, während der Drehimpuls ungeändert bleibt. (Man nennt den Drehimpuls daher auch einen “axialen” Vektor.)



1.15 Alternierende 3-lineare Formen und Spatprodukt

Sei V wieder ein Vektorraum. Eine alternierende 3-lineare Form $\rho \in \text{Alt}^3(V)$ ist eine Abbildung

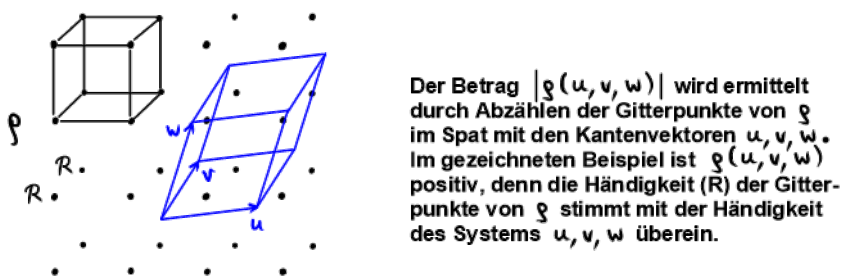
$$\rho : V \times V \times V \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.63)$$

mit den Eigenschaften der totalen Schiefsymmetrie,

$$\rho(u, v, w) = -\rho(v, u, w) = +\rho(v, w, u) = -\rho(w, v, u) = +\rho(w, u, v) = -\rho(u, w, v), \quad (1.64)$$

und Linearität in allen drei Argumenten.

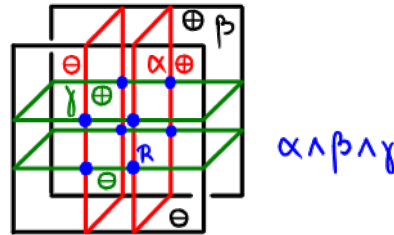
Visualisierung. Ein Element $\rho \in \text{Alt}^3(V)$ für $V \simeq \mathbb{R}^3$ lässt sich als homogene Schar (oder Gitter) von Punkten mit Händigkeit visualisieren. Der Wert $\rho(u, v, w)$ wird bestimmt, indem man die (über Translationen gemittelte) Zahl von Punkten im Spat mit den Kantenvektoren u, v, w abzählt. Dabei kommt die Händigkeit der Punkte zum Tragen: stimmt diese mit der Händigkeit des geordneten Systems u, v, w überein, so wird positiv gezählt, andernfalls negativ.



Beispiel. Aus drei Linearformen α, β, γ auf V konstruiert man eine alternierende 3-lineare Form $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \in \text{Alt}^3(V)$ durch Bildung des doppelten äußeren Produkts:

$$\begin{aligned} (\alpha \wedge \beta \wedge \gamma)(v_1, v_2, v_3) &:= \alpha(v_1)\beta(v_2)\gamma(v_3) - \alpha(v_2)\beta(v_1)\gamma(v_3) \\ &\quad + \alpha(v_2)\beta(v_3)\gamma(v_1) - \alpha(v_3)\beta(v_2)\gamma(v_1) \\ &\quad + \alpha(v_3)\beta(v_1)\gamma(v_2) - \alpha(v_1)\beta(v_3)\gamma(v_2). \end{aligned}$$

Im Fall von $V \simeq \mathbb{R}^3$ sind die Gitterpunkte von $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$ anschaulich gesprochen die Schnittpunkte der Ebenenscharen von α, β, γ . Bilden α, β, γ ein Orthonormalsystem, so kann man sich $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$ als das kubische Einheitsgitter vorstellen. Die Händigkeit des Systems α, β, γ bestimmt die Händigkeit der Punkte von $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$.



Beispiel. Im Euklidischen Vektorraum $V \simeq \mathbb{R}^3$ entsteht durch Kombinieren des Vektorprodukts mit dem Euklidischen Skalarprodukt das **Spatprodukt**:

$$\Omega : V \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad (u, v, w) \mapsto \langle u \times v, w \rangle \equiv \Omega(u, v, w). \quad (1.65)$$

Aus den Eigenschaften des Vektorprodukts und des Skalarprodukts folgt, dass das Spatprodukt eine alternierende 3-lineare Form ist. Insbesondere hat das Spatprodukt die Eigenschaft der totalen Schiefsymmetrie: $\Omega(v, u, w) = -\Omega(u, v, w) = \Omega(u, w, v)$ usw. Bezüglich jeder rechtshändigen Orthonormalbasis e_x, e_y, e_z gilt

$$\Omega(u, v, w) = (u_x v_y - v_x u_y) w_z + (u_y v_z - v_y u_z) w_x + (u_z v_x - v_z u_x) w_y. \quad (1.66)$$

Interpretation. $|\Omega(u, v, w)|$ ist das Volumen des von u, v, w aufgespannten **Spats** (= Parallelepipeds). Das Spatprodukt $\Omega(u, v, w)$ ist positiv oder negativ, je nachdem ob u, v, w ein rechtshändiges bzw. linkshändiges System bilden.

1.16 Axiale Vektoren

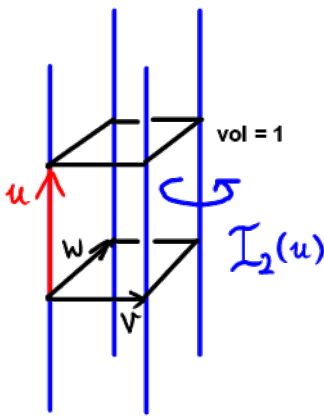
Das Spatprodukt Ω im Euklidischen Vektorraum $V \simeq \mathbb{R}^3$ eröffnet die Möglichkeit, Vektoren (genauer gesagt: "axiale" Vektoren) in alternierende 2-lineare Formen umzuwandeln und umgekehrt. Dies geschieht durch den **Isomorphismus**

$$\mathcal{I}_2 : V \rightarrow \text{Alt}^2(V), \quad u \mapsto \Omega(u, \cdot, \cdot). \quad (1.67)$$

Tatsächlich besitzt $\omega = \mathcal{I}_2(u) = \Omega(u, \cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ die Eigenschaften der Schiefsymmetrie und Bilinearität, ist also ein Element von $\text{Alt}^2(V)$. Dieser Definition entnimmt man die folgende

Charakterisierung von $\mathcal{I}_2(u)$:

1. Die Geradenschar der alternierenden 2-linearen Form $\mathcal{I}_2(u)$ liegt parallel zum Vektor u .
2. Die Richtung von u genügt zusammen mit dem Zirkulationssinn von $\mathcal{I}_2(u)$ der Rechte-Hand-Regel.
3. Die Geraden der Schar von $\mathcal{I}_2(u)$ sind so angeordnet, dass zwei verbindende Vektoren v, w (siehe Graphik) zusammen mit u das Spatvolumen $\Omega(u, v, w) = 1$ ergeben.



Bezüglich einer rechtshändigen Orthonormalbasis e_x, e_y, e_z mit Dualbasis $\vartheta_x, \vartheta_y, \vartheta_z$ gelten die Relationen

$$\mathcal{I}_2(e_z) = \vartheta_x \wedge \vartheta_y, \quad \mathcal{I}_2(e_x) = \vartheta_y \wedge \vartheta_z, \quad \mathcal{I}_2(e_y) = \vartheta_z \wedge \vartheta_x. \quad (1.68)$$

Diese Behauptung verifiziert man wie folgt:

$$(\mathcal{I}_2(e_z))(v, w) = \Omega(e_z, v, w) = v_x w_y - w_x v_y = (\vartheta_x \wedge \vartheta_y)(v, w), \quad \text{usw.}$$

Wir sprechen jetzt noch einen konzeptionell wichtigen Punkt an.

Definition. Ein axialer Vektor, ℓ , im \mathbb{R}^3 (oder allgemeiner in $V \simeq \mathbb{R}^3$) ist eine aus einem Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ und einer Händigkeit $\text{Or} \in \{R, L\}$ gebildete Äquivalenzklasse $\ell = [v; \text{Or}] \equiv [-v; -\text{Or}]$.

Bemerkung. Ein axialer Vektor besteht also aus zwei Dingen: einem Vektor, sagen wir v , und einer Händigkeit, zum Beispiel R (rechte Hand). Dabei betrachten wir das Paar v, R als äquivalent zum Paar $-v, L$, wir fassen diese zwei Paare also in eine Äquivalenzklasse $[v; R] = [-v; L] = \ell$ zusammen. Der Sinn der Bildung von Äquivalenzklassen wird in der folgenden Graphik deutlich.

$$\left[\uparrow ; R \right] = \psi = \left[\downarrow ; L \right]$$

Beispiel. Wir greifen das obige Beispiel wieder auf und können jetzt die Natur des Drehimpulses als axialer Vektor genauer beschreiben:

$$\ell = [\vec{r} \times \vec{p}; R] = [-\vec{r} \times \vec{p}; L]. \quad (1.69)$$

1.17 Beziehung zwischen Vektorprodukt und äußerem Produkt

Sei nun $\mathcal{I}_1 \equiv \mathcal{I} : V \rightarrow V^* \equiv \text{Alt}^1(V)$ der aus Abschnitt 1.13 bekannte Isomorphismus zwischen Vektoren und Linearformen. Wir behaupten, dass die zwei Isomorphismen \mathcal{I}_1 und \mathcal{I}_2 für $V \simeq \mathbb{R}^3$ auf die folgende Weise miteinander zusammenhängen:

$$\mathcal{I}_2(u \times v) = \mathcal{I}_1(u) \wedge \mathcal{I}_1(v) \quad (u, v \in V), \quad (1.70)$$

d.h. das Vektorprodukt $V \times V \rightarrow V$ entspricht dem äußeren Produkt $\wedge : V^* \times V^* \rightarrow \text{Alt}^2(V)$.

Beweis (mittels rechtshändiger Orthonormalbasis):

$$\mathcal{I}_2(e_x \times e_y) = \mathcal{I}_2(e_z) = \vartheta_x \wedge \vartheta_y = \mathcal{I}_1(e_x) \wedge \mathcal{I}_1(e_y), \quad \text{usw.}$$

Bemerkung. Das äußere Produkt ist eine natürliche Operation, die für strukturlose Vektorräume jeder Dimension existiert. Das Vektorprodukt hingegen, das sei hier nochmals betont, ist un-natürlich in dem Sinn, dass es nur für $V \simeq \mathbb{R}^3$ existiert (und auch der Zusatzstruktur des Euklidischen Skalarprodukts in Kombination mit der Rechte-Hand-Regel bedarf). Die obige Beziehung (1.70) erklärt zudem, warum wir in Abschnitt 1.14 (**Kritik**) behaupteten, dass das Vektorprodukt überflüssig sei (es wird nämlich durch das äußere Produkt bestens ersetzt).

Anwendung. Für zwei Vektoren $u, v \in V \simeq \mathbb{R}^3$ lässt sich das Vektorprodukt $u \times v$ mit der Formel (1.70) anschaulich ermitteln, indem man die Ebenenschar der Linearform $\mathcal{I}_1(u) \in V^*$ mit der Ebenenschar von $\mathcal{I}_1(v) \in V^*$ schneidet (und dann \mathcal{I}_2^{-1} anwendet). Diese Beschreibung illustriert die kuriose Eigenschaft des Vektorprodukts, dass seine Länge eigentlich eine Fläche ist.

1.18 Affiner Raum

Der Begriff des Vektorraums an sich ergibt noch kein befriedigendes Modell für den (physikalischen) Raum. Deshalb nehmen wir folgende Erweiterung vor.

Definition. Unter einem **affinen Raum** $(M, V, +)$ versteht man eine Menge M von Punkten zusammen mit einem Vektorraum V und einer Addition

$$M \times V \rightarrow M, \quad (p, v) \mapsto p + v,$$

mit den Eigenschaften:

- (i) Es gilt eine Variante des Assoziativgesetzes:

$$p + (u + v) = (p + u) + v$$

für alle $p \in M$ und $u, v \in V$.

- (ii) Zu jedem Paar $(p, q) \in M \times M$ existiert genau ein Vektor $v \in V$ mit $p = q + v$.

Wir schreiben $p - q := v$ und nennen $p - q$ den **Differenzvektor** zu (p, q) . Für einen affinen Raum M mit normiertem Differenzvektorraum $(V, \| \cdot \|)$ nennt man

$$d(p, q) := \|p - q\| \tag{1.71}$$

den **Abstand** zwischen den Punkten $p, q \in M$.

Bemerkung. Im Fall von $p = q$ ist $p - q$ immer der Nullvektor, denn $p = p + v$ zieht $p = p + v = (p + v) + v \stackrel{(i)}{=} p + 2v$ nach sich und wegen der Eindeutigkeit von v folgt $2v = v = \mathbf{0}$.

Beispiel. Die Menge aller Punkte auf einer Geraden zusammen mit dem Vektorraum aller Translationen längs der Geraden bildet eine 1-dimensionalen affinen Raum.

Definition. Ein **affines Koordinatensystem** $\{p_0; e_1, \dots, e_n\}$ besteht aus einem ausgezeichneten Punkt p_0 (dem ‘‘Koordinatenursprung’’) zusammen mit einer Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ von V . Die affinen Koordinaten $x_i : M \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, n$) definiert man durch

$$x_i(p) = \vartheta_i(p - p_0), \tag{1.72}$$

wobei $\{\vartheta_1, \dots, \vartheta_n\}$ die Dualbasis zu $\{e_1, \dots, e_n\}$ ist. Den Ausdruck

$$p = p_0 + x_1(p)e_1 + \dots + x_n(p)e_n \quad (1.73)$$

nennen wir die **Koordinatendarstellung** des Punktes p . Man beachte, dass gilt

$$x_i(p + av) = x_i(p) + a\vartheta_i(v) \quad (p \in M, a \in \mathbb{R}, v \in V). \quad (1.74)$$

Definition. Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ zwischen affinen Räumen heißt **affin**, wenn sie affine Unterräume auf affine Unterräume abbildet (also Punkte auf Punkte, Geraden auf Geraden, Ebenen auf Ebenen, usw., wobei Entartung zugelassen ist).

Mitteilung. Jede affine Abbildung $f : M \rightarrow N$ hat die Form

$$f(p) = f(o) + L(p - o). \quad (1.75)$$

Hierbei ist o irgendein ausgewählter Punkt (z.B. der Koordinatenursprung) und L eine lineare Abbildung zwischen den Differenzvektorräumen zu M und N . Diese Abbildung L hängt von der Wahl des Bezugspunkts o nicht ab und wird der **lineare Teil** von f genannt. Insbesondere hat die Gerade $q + tv$ ($t \in \mathbb{R}$) in M mit Aufpunkt q und Differenzvektorraum $\mathbb{R} \cdot v$ das Bild

$$f(q + tv) = f(o) + L(q + tv - o) = f(o) + L(q - o) + tLv,$$

was eine Gerade in N ist, mit Aufpunkt $f(o) + L(q - o) = f(q)$ und Differenzvektorraum $\mathbb{R} \cdot Lv$.

Schwerpunkt. In einem affinen Raum M versteht man unter dem **(Massen-)Schwerpunkt** eines Systems von Punkten p_1, \dots, p_n mit Massen m_1, \dots, m_n die Lösung $S \in M$ des Gleichungssystems

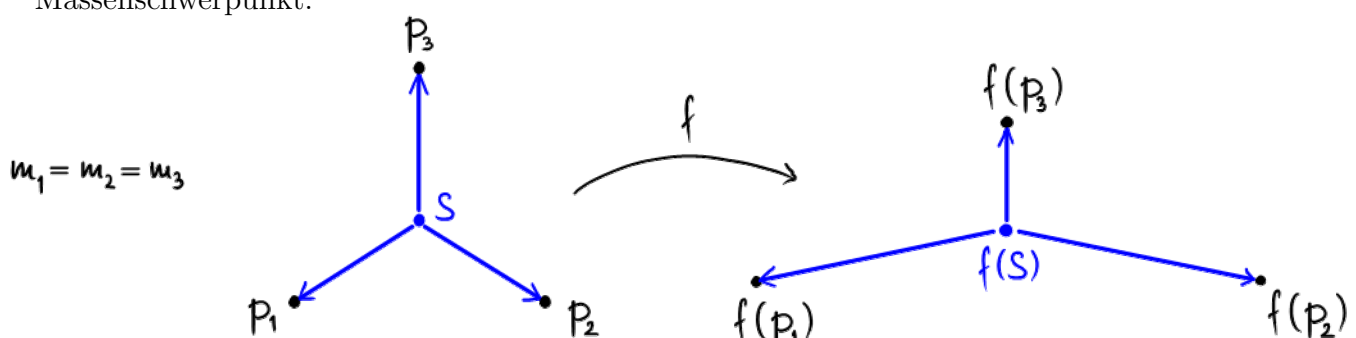
$$\sum_{i=1}^n m_i(p_i - S) = \mathbf{0}. \quad (1.76)$$

Nach Wahl eines Koordinatenursprungs o lässt sich diese Gleichung nach S auflösen:

$$S = o + \mathcal{M}^{-1} \sum_{i=1}^n m_i(p_i - o), \quad \mathcal{M} = \sum_{i=1}^n m_i, \quad (1.77)$$

d.h. der Ortsvektor $S - o$ des Massenschwerpunkts ist das mit den Massenanteilen m_i/\mathcal{M} gewichtete arithmetische Mittel der Ortsvektoren $p_i - o$.

Aufgabe. Das Bild des Massenschwerpunkts unter einer affinen Abbildung f ist wieder der Massenschwerpunkt.



1.19 Euklidischer Raum

In Abschnitt 1.18 wurde der Begriff des affinen Raums eingeführt. Kennzeichnend für affine Räume ist die Existenz von Geraden, Ebenen, usw., sowie der Begriff von Parallelität und Paralleltranslation. Ein affiner Raum, dessen Differenzvektorraum die zusätzliche Struktur eines Euklidischen Skalarprodukts trägt (also ein Euklidischer Vektorraum ist), heißt Euklidisch. Der dreidimensionale Euklidische Raum taugt unter Vernachlässigung relativistischer und gravitativer Effekte als Modell für den realen physikalischen Raum.

Definition. Unter einem n -dimensionalen **Euklidischen Raum** E_n versteht man einen affinen Raum $(X, V, +)$ mit Differenzvektorraum $V \simeq \mathbb{R}^n$, auf dem ein Euklidisches Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ erklärt ist. Ein **kartesisches** Koordinatensystem für $(X, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist ein affines Koordinatensystem $\{o; e_1, \dots, e_n\}$, dessen Basisvektoren ein Orthonormalsystem bilden:

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

Definition. Sei M ein Euklidischer Raum. Eine **Euklidische Transformation** (oder Euklidische Bewegung) von M ist eine affine Abbildung $f: M \rightarrow M$ mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass das Euklidische Skalarprodukt ungeändert bleibt; d.h. es gilt

$$\langle f(p) - f(q), f(p') - f(q') \rangle = \langle p - q, p' - q' \rangle \quad (1.78)$$

für alle $p, q, p', q' \in M$.

Euklidische Gruppe. Jede Euklidische Bewegung lässt sich umkehren. Die Euklidischen Bewegungen von M bilden somit eine Gruppe, nämlich die Euklidische Gruppe von M .

Als affine Abbildung ist jede Euklidische Bewegung f von der Form (1.75), also $f(p) - f(o) = R(p - o)$ mit einer linearen Abbildung R , die wegen (1.78) das Skalarprodukt erhält:

$$\langle Ru, Ru' \rangle = \langle u, u' \rangle. \quad (1.79)$$

Lineare Abbildungen R mit dieser Eigenschaft heißen **Drehungen**.

Die Euklidische Gruppe wird durch Drehungen und Translationen erzeugt. Bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems $\{o; e_1, \dots, e_n\}$ hat jede Euklidische Bewegung f den Ausdruck

$$x_i(f(p)) = \sum_{j=1}^n R_{ij} x_j(p) + v_i \quad (i = 1, \dots, n). \quad (1.80)$$

Hierbei sind v_i die Komponenten des Translationsvektors $v = f(o) - o$ der Euklidischen Bewegung f , und (R_{ij}) ist die Matrix ihrer Drehung R ; die Matrixelemente genügen den Relationen

$$\sum_{i=1}^n R_{ij} R_{ik} = \delta_{jk}. \quad (1.81)$$

Mitteilung. Später wird noch vom Unterschied zwischen eigentlichen und uneigentlichen Drehungen (oder Spiegelungen) zu reden sein.

2 Vektoranalysis

2.1 Differenzial einer Abbildung

Der Begriff der Stetigkeit und Differenzierbarkeit einer Funktion $f : X \rightarrow Y$ im eindimensionalen Fall $X, Y \subset \mathbb{R}$ wird als bekannt vorausgesetzt. Insbesondere kennen wir schon die Ableitung (für differenzierbares f):

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}.$$

Wir führen jetzt die höherdimensionale Verallgemeinerung des Begriffs von Ableitung ein.

Sei dazu X, Y ein Paar affiner Räume mit normierten Differenzvektorräumen $(V, \|\cdot\|_V)$ bzw. $(W, \|\cdot\|_W)$, und sei eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ gegeben. Wir fixieren einen Punkt $p \in X$.

Definition. Die Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt in $p \in X$ **stetig**, wenn zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ existiert, so dass für alle Vektoren $v \in V$ mit Norm $\|v\|_V < \delta$ gilt:

$$\|f(p+v) - f(p)\|_W < \varepsilon. \quad (2.1)$$

Weiter heißt die Abbildung f in p **differenzierbar**, wenn eine lineare Abbildung $L : V \rightarrow W$ mit der folgenden (Approximations-)Eigenschaft existiert: zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$\|f(p+v) - f(p) - Lv\|_W < \varepsilon \|v\|_V \quad (2.2)$$

für alle $v \in V$ mit $\|v\|_V < \delta$ gilt. Diese lineare Abbildung L (so sie existiert) heißt das **Differenzial** der Abbildung f im Punkt p . Sie wird mit $L \equiv D_p f$ bezeichnet.

Bemerkung. Eine verkürzte Formulierung der Bedingungen ist:

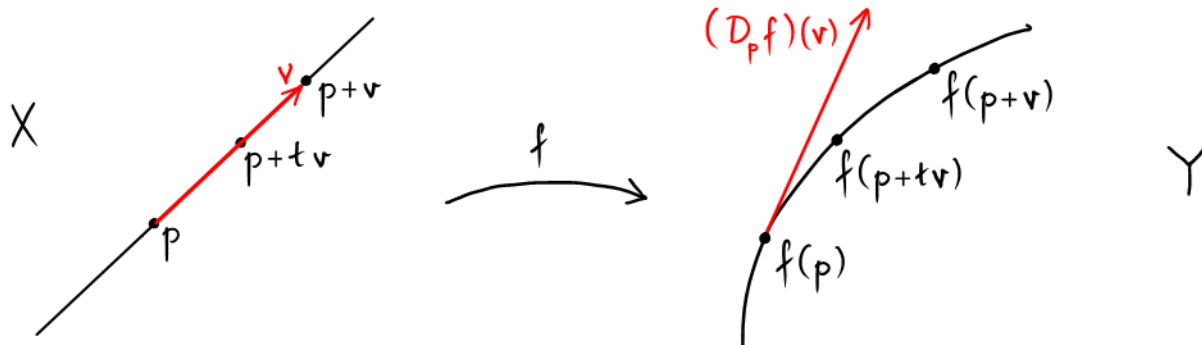
$$\text{Stetigkeit : } \lim_{\|v\|_V \rightarrow 0} \|f(p+v) - f(p)\|_W = 0.$$

$$\text{Differenzierbarkeit : } \lim_{\|v\|_V \rightarrow 0} \frac{\|f(p+v) - f(p) - (D_p f)(v)\|_W}{\|v\|_V} = 0.$$

Hierbei ist aber nicht selbstverständlich, was mit den beiden Limites gemeint sein soll; ihr genauer Sinn wird durch die obige Formulierung mit ε und δ erläutert.

Aufgabe. Differenzierbarkeit in p impliziert Stetigkeit in p .

Berechnung (des Differenzials). Ist die Differenzierbarkeit in p erst einmal gesichert, können wir das Differenzial $D_p f$ folgendermaßen ermitteln. Wir betrachten das Geradenstück $[-\delta, \delta] \ni t \mapsto p + tv$ in X und sein Bild unter f , also die Kurve $t \mapsto f(p + tv)$, in Y .



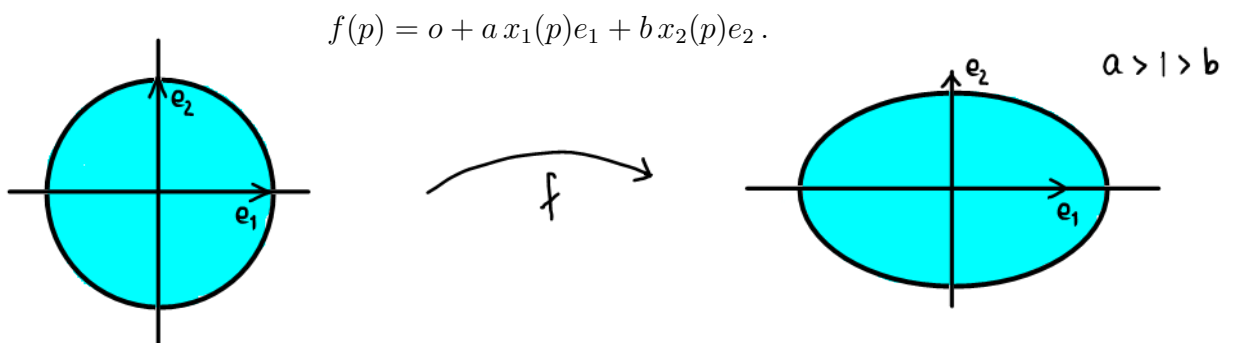
Fassen wir v als die Geschwindigkeit der Bewegung $t \mapsto p + tv$ (mit der Zeitvariablen t auf), so ist $(D_p f)(v)$ die (momentane) Geschwindigkeit der Bildbewegung $t \mapsto f(p + tv)$ zur Zeit $t = 0$,

also im Punkt $f(p) \in Y$. In Formeln:

$$Lv = (D_p f)(v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t} \equiv \left. \frac{d}{dt} f(p + tv) \right|_{t=0}. \quad (2.3)$$

Richtungsableitung. Beim Bilden des Differenzials an sich lässt man offen, “in welcher Richtung differenziert wird”; man betrachtet sozusagen alle möglichen Richtungen gleichzeitig. Bei Anwendung des Differenzials $L = D_p f$ auf einen konkreten Vektor $v \in V$ entsteht die Richtungsableitung Lv (von f im Punkt p) in Richtung von v .

Beispiel. Sei $X = Y$ eine Ebene mit affinem Koordinatensystem $\{o; e_1, e_2\}$ und affinen Koordinaten x_1, x_2 . Wir betrachten die Abbildung



In diesem Beispiel gilt $(D_p f)(e_1) = a e_1$ und $(D_p f)(e_2) = b e_2$.

2.2 Kettenregel

Für ein Tripel von affinen Räumen X, Y, Z mit normierten Differenzvektorräumen U, V bzw. W betrachten wir die Verkettung $\psi \circ \phi$ zweier Abbildungen:

$$X \xrightarrow{\phi} Y \xrightarrow{\psi} Z. \quad (2.4)$$

Wir machen die folgenden Annahmen:

1. ϕ sei differenzierbar im Punkt $p \in X$ mit Differenzial $D_p \phi = L$.
2. ψ sei differenzierbar in $\phi(p) \in Y$ mit Differenzial $D_{\phi(p)} \psi = K$.

Unter diesen Voraussetzungen gilt die folgende Aussage.

Kettenregel. Die Verkettung $\psi \circ \phi : X \rightarrow Z$ ist differenzierbar im Punkt $p \in X$ mit Differenzial

$$D_p(\psi \circ \phi) = (D_{\phi(p)} \psi)(D_p \phi) = KL. \quad (2.5)$$

Bemerkung. Vereinfacht ausgedrückt besagt die Kettenregel, dass das Differenzial der Verkettung gleich der Verkettung der Differenziale ist. (Im letzteren Fall bedeutet “Verkettung” ganz einfach die Hintereinanderausführung KL der linearen Abbildungen $L = D_p \phi : U \rightarrow V$ und $K = D_{\phi(p)} \psi : V \rightarrow W$.)

Beweis (der Kettenregel). Nach Voraussetzung existiert

1. für jedes $\varepsilon_1 > 0$ ein $\delta_1 > 0$, so dass

$$\| \phi(p+u) - \phi(p) - Lu \| < \varepsilon_1 \|u\|$$

für alle $u \in U$ mit $\|u\| < \delta_1$,

2. und für jedes $\varepsilon_2 > 0$ ein $\delta_2 > 0$, so dass

$$\| \psi(\phi(p)+v) - \psi(\phi(p)) - Kv \| < \varepsilon_2 \|v\|$$

für alle $v \in V$ mit $\|v\| < \delta_2$.

Durch geeignetes Addieren und Subtrahieren,

$$\begin{aligned} & \| \psi(\phi(p+u)) - \psi(\phi(p)) - KLu \| = \\ & \| \psi(\phi(p) + \phi(p+u) - \phi(p)) - \psi(\phi(p)) - K(\phi(p+u) - \phi(p)) + K(\phi(p+u) - \phi(p) - Lu) \| , \end{aligned}$$

folgt mittels Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} & \| \psi(\phi(p+u)) - \psi(\phi(p)) - KLu \| \leq \\ & \| \psi(\phi(p) + \phi(p+u) - \phi(p)) - \psi(\phi(p)) - K(\phi(p+u) - \phi(p)) \| + \| K(\phi(p+u) - \phi(p) - Lu) \| . \end{aligned}$$

Der nächste Schritt erfordert einen Begriff, der hier noch neu ist. Für eine lineare Abbildung $L : U \rightarrow V$ zwischen normierten Vektorräumen definiert man die **Operatornorm** $\|L\|_{\text{op}}$ durch

$$\|L\|_{\text{op}} = \sup_{u \in U \setminus \{0\}} \frac{\|Lu\|}{\|u\|}. \quad (2.6)$$

Mit dieser Definition hat man $\|Lu\| \leq \|L\|_{\text{op}} \|u\|$ für alle $u \in U$.

Für beliebiges $\varepsilon > 0$ wähle jetzt

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2 \|K\|_{\text{op}}}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2(\varepsilon_1 + \|L\|_{\text{op}})}.$$

Dann folgt für alle u mit $\|u\| < \min(\delta_1, (\varepsilon_1 + \|L\|_{\text{op}})^{-1} \delta_2)$

$$\begin{aligned} \| \phi(p+u) - \phi(p) \| & \leq \| \phi(p+u) - \phi(p) - Lu \| + \| Lu \| \\ & < \varepsilon_1 \|u\| + \|L\|_{\text{op}} \|u\| = (\varepsilon_1 + \|L\|_{\text{op}}) \|u\| < \delta_2, \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} & \| \psi(\phi(p+u)) - \psi(\phi(p)) - KLu \| \\ & < \varepsilon_2 \| \phi(p+u) - \phi(p) \| + \|K\|_{\text{op}} \| \phi(p+u) - \phi(p) - Lu \| \\ & < \varepsilon_2 (\varepsilon_1 + \|L\|_{\text{op}}) \|u\| + \|K\|_{\text{op}} \varepsilon_1 \|u\| = \frac{\varepsilon}{2} \|u\| + \frac{\varepsilon}{2} \|u\| = \varepsilon \|u\|. \end{aligned}$$

Damit ist die Verkettung $\psi \circ \phi$ differenzierbar im Punkt p , und das Differenzial ist die Verkettung $D_p(\psi \circ \phi) = D_{\phi(p)} \psi \circ D_p \phi$ der Differenziale. \square

Spezialfall 1: Sei $X = Z$ und $\psi = \phi^{-1}$ (inverse Abbildung), also

$$X \xrightarrow{\phi} Y \xrightarrow{\phi^{-1}} X. \quad (2.7)$$

Wegen $D_p(\phi^{-1} \circ \phi) = \text{Id}$ (identische Abbildung) folgt dann aus der Kettenregel die Formel

$$u = D_p(\phi^{-1} \circ \phi)(u) = (D_{\phi(p)} \phi^{-1})(D_p \phi)(u), \quad (2.8)$$

oder kurz:

$$D_{\phi(p)} \phi^{-1} = (D_p \phi)^{-1}, \quad (2.9)$$

d.h. das Differenzial der inversen Abbildung ist gleich dem Inversen des Differenzials.

Spezialfall 2: Für $X = Y = Z = \mathbb{R}$ sei g die Umkehrfunktion zu f , also $g(f(x)) = x$. Dann besagt die Kettenregel, dass gilt:

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}. \quad (2.10)$$

Zum Beispiel folgt für die Ableitung der Logarithmusfunktion aus $\ln(e^x) = x$ die Formel $\ln'(e^x) = 1/e^x$, also $\ln'(y) = 1/y$.

2.3 Vektorfelder und 1-Formen

Motivation. Beim Herumbewegen elektrisch geladener Körper im elektrischen Kraftfeld muss Arbeit geleistet werden, oder es wird Energie frei; Gleiches gilt für Körper mit Masse im Gravitationsfeld, usw. Unser Ziel ist es, die Gesamtarbeit als Wegintegral des Kraftfeldes entlang des zurückgelegten Weges auszudrücken. Zu diesem Zweck treffen wir hier einige Vorbereitungen. \square

Sei $(X, V, +)$ ein affiner Raum. Ein **Vektorfeld** u auf X ist eine Abbildung

$$u : X \rightarrow V, \quad p \mapsto u(p), \quad (2.11)$$

die jedem Punkt $p \in X$ einen Vektor $u(p) \in V$ zuweist. Von den zahlreichen physikalischen Beispielen für Vektorfelder sei hier nur das Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeitsströmung erwähnt; sie weist jedem Ort der Strömung die lokale Strömungsgeschwindigkeit zu.

Warnung. Vektorfelder taugen nicht (jedenfalls nicht ohne Zusatzannahmen über die geometrische Struktur des Raumes) als Integranden für Wegintegrale. Die tauglichen Integranden sind andere.

Definition. Wie zuvor sei $(X, V, +)$ ein affiner Raum. Eine **1-Form** α auf X ist eine räumlich veränderliche Linearform, also eine Abbildung

$$\alpha : X \rightarrow V^*, \quad p \mapsto \alpha_p \quad (2.12)$$

(von der wir je nach Bedarf geeignete Stetigkeits- und Differenzierbarkeitseigenschaften verlangen).

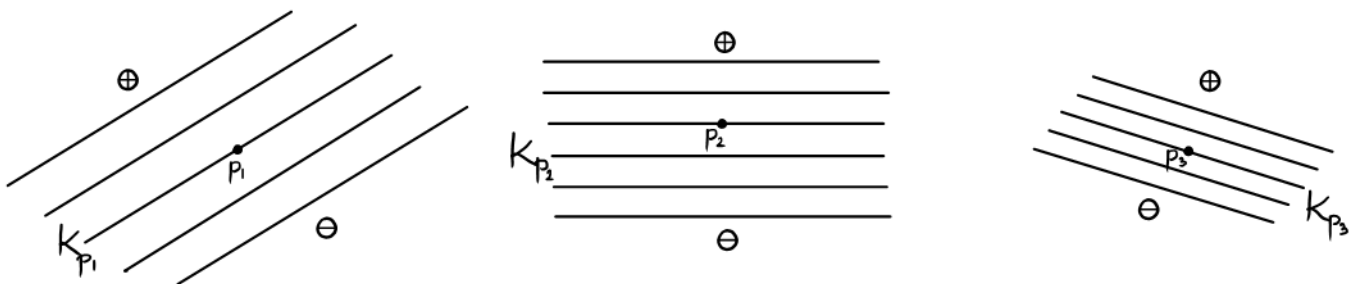
Beispiel 1. Jedes **Kraftfeld** ist (fundamental betrachtet) eine 1-Form. Zwar ist es in der Praxis üblich, Kraftfelder als Vektorfelder aufzufassen, diese Deutung ist aber nur möglich, wenn die Geometrie des Raumes als bekannt vorausgesetzt werden kann. Bei einer primitiven Kraftmessung im

dreidimensionalen Raum $X = E_3$ wird ermittelt, welche differentielle Energieänderung $K_p(v)$ ein Testkörper bei Translation in Richtung von $v \in V \simeq \mathbb{R}^3$ erfährt. Als unmittelbares Resultat der Messung (am Ort p) ergibt sich die Linearform

$$K_p : \text{Translationsvektor } v \mapsto \text{differentielle Energieänderung } K_p(v) .$$

Das Kraftfeld K ist dann insgesamt eine Zuordnung $K : X \rightarrow V^* \simeq (\mathbb{R}^3)^*$, $p \mapsto K_p$, also eine 1-Form. \square

Linearformen im dreidimensionalen Raum werden bekanntlich durch polarisierte homogene Ebenenscharen visualisiert. (Dabei wird, wie in Abschnitt 1.4 erläutert, der Wert $K_p(v)$ durch Abzählen der von v gekreuzten Ebenen ermittelt.) Wir können die Kraftfeld-1-Form also zeichnerisch skizzieren, indem wir für eine Auswahl von Punkten die zugehörige Ebenenschar auftragen:



Die Ebenen haben jeweils die Bedeutung der (lokalen) Nullflächen des Kraftfeldes K .

Beispiel 2. Aus Abschnitt 2.1 kennen wir bereits den Begriff des Differenzials einer Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen zwei affinen Räumen $(X, V, +)$ und $(Y, W, +)$. Im Spezialfall einer differenzierbaren Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ (also für $Y \equiv \mathbb{R}$, $W \equiv \mathbb{R}$) bezeichnen wir das Differenzial mit $D_p f =: (df)_p$. Wir erinnern kurz an die Definition:

$$(df)_p(v) = \left. \frac{d}{dt} f(p + tv) \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t} .$$

Insgesamt weist das Differenzial df jedem Punkt $p \in X$ eine Linearform $(df)_p \in V^*$ zu. Somit ist das Differenzial df einer reellwertigen Funktion f eine 1-Form. \square

Aus einem Vektorfeld $u : X \rightarrow V$ und einer 1-Form $\alpha : X \rightarrow V^*$ lässt sich in invarianter Weise eine Funktion $f \equiv \alpha(u) : X \rightarrow \mathbb{R}$ bilden. Sie ist erklärt durch

$$f(p) := \alpha_p(u(p)) .$$

Um die Funktion $f = \alpha(u)$ im Punkt p zu berechnen, setzt man also den Vektor $u(p)$ in die Linearform α_p ein. Diese Operation der Bildung einer Funktion aus einem Vektorfeld und einer 1-Form heißt Kontraktion oder inneres Produkt.

Koordinatendarstellung. In einem affinen Raum $(X, V, +)$ sei ein affines Koordinatensystem $\{o; e_1, \dots, e_n\}$ fest gewählt. Wir bezeichnen dann mit dem Symbol ∂_i das konstante Vektorfeld

$$\partial_i : X \rightarrow V, \quad p \mapsto e_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.13)$$

zum Basisvektor e_i . Die entsprechende Rolle im Kalkül mit 1-Formen spielen die Differenziale der affinen Koordinaten. Wir erinnern daran, dass durch die Wahl eines affinen Koordinatensystems $\{o; e_1, \dots, e_n\}$ affine Koordinatenfunktionen

$$x_i(p) = \vartheta_i(p - o) \quad (i = 1, \dots, n)$$

festgelegt werden. Ihre **Differenziale dx_i** sind konstant:

$$(dx_i)_p(v) = \left. \frac{d}{dt} \vartheta_i(p + tv - o) \right|_{t=0} = \vartheta_i(v), \quad (2.14)$$

d.h. unabhängig vom Punkt p . Das innere Produkt von dx_i mit ∂_j ist die konstante Funktion

$$dx_i(\partial_j) = \delta_{ij} \quad (2.15)$$

mit Funktionswert $\delta_{ij}(p) = \delta_{ij} = 0$ für $i \neq j$ und $\delta_{ij}(p) = \delta_{ij} = 1$ für $i = j$.

Für die Koordinatendarstellung von Vektorfeldern und 1-Formen benötigt man die Operation der **Multiplikation** mit Funktionen. Hierzu erinnern wir zunächst an die Operation der Skalarmultiplikation für Vektoren und Linearformen:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times V &\rightarrow V, & (a, v) &\mapsto a \cdot v \equiv av, \\ \mathbb{R} \times V^* &\rightarrow V^*, & (a, \lambda) &\mapsto a \cdot \lambda \equiv a\lambda. \end{aligned}$$

Punktweise Übertragung gibt dann eine Multiplikation

$$\begin{aligned} \text{Funktionen} \times \text{Vektorfelder} &\rightarrow \text{Vektorfelder}, & (f, u) &\mapsto fu, \\ \text{Funktionen} \times \text{1-Formen} &\rightarrow \text{1-Formen}, & (f, \alpha) &\mapsto f\alpha, \end{aligned}$$

durch

$$(fu)(p) = f(p)u(p) \quad \text{bzw.} \quad (f\alpha)_p = f(p)\alpha_p. \quad (2.16)$$

Im letzteren Fall lautet die ausführliche Schreibweise

$$(f\alpha)_p(v) = f(p)\alpha_p(v). \quad (2.17)$$

Hiermit haben wir die Möglichkeit, beliebige Vektorfelder und 1-Formen als **Linearkombinationen** der Basisvektorfelder ∂_i bzw. der Koordinatenformen dx_i mit Funktionen als Koeffizienten zu ausdrücken:

$$u = \sum_{i=1}^n u_i \partial_i, \quad \alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx_i. \quad (2.18)$$

Wegen $dx_i(\partial_j) = \delta_{ij}$ gelten die Formeln

$$\alpha(\partial_i) = \alpha_i, \quad dx_i(u) = u_i, \quad \alpha(u) = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i. \quad (2.19)$$

2.4 Gradient

Für eine differenzierbare Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ kennen wir bereits das Differenzial df . Ist der Differenzvektorraum V des affinen Raums X mit der geometrischen Struktur eines Euklidischen Skalarprodukts ausgestattet, so können wir der Funktion f neben der 1-Form df auch noch ein Vektorfeld, das sog. **Gradientenfeld** (kurz: Gradient) $\text{grad} f$, zuordnen. Wir betonen, dass das Differenzial fundamentaler als der Gradient ist: das Differenzial existiert immer, während der Gradient nur definiert werden kann, wenn ein Skalarprodukt vorliegt.

2.4.1 Euklidischer Isomorphismus: Vektorfelder \rightarrow 1-Formen

Sei E_n der n -dimensionale Euklidische Raum mit Differenzvektorraum $V = \mathbb{R}^n$. (Unser besonderes Augenmerk gilt natürlich dem wichtigen Spezialfall $n = 3$, doch die hier zu besprechende Konstruktion ist von der Dimension n unabhängig.) In einer solchen Situation ist jedem Vektorfeld $u : E_n \rightarrow V$ eine 1-Form $\mathcal{I}(u) : E_n \rightarrow V^*$ zugeordnet. Diese **Zuordnung** erfolgt durch punktweise Anwendung des in Abschnitt 1.13 eingeführten Isomorphismus zwischen Vektoren und Linearformen. In Formeln:

$$\mathcal{I}(u)_p = \langle u(p), \cdot \rangle. \quad (2.20)$$

Speziell gelten für jeden Satz von kartesischen Koordinaten x_1, \dots, x_n die Relationen

$$\mathcal{I}(\partial_i) = dx_i, \quad \mathcal{I}^{-1}(dx_i) = \partial_i \quad (i = 1, \dots, n). \quad (2.21)$$

Wie zuvor sind hierbei ∂_i die Vektorfelder zur kartesischen Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$; also $\partial_i(p) = e_i$ ($i = 1, \dots, n$). Für ein allgemeines Vektorfeld u bzw. eine allgemeine 1-Form α gilt natürlich

$$\mathcal{I}(u) = \mathcal{I}\left(\sum u_i \partial_i\right) = \sum u_i dx_i, \quad \mathcal{I}^{-1}(\alpha) = \mathcal{I}^{-1}\left(\sum \alpha_i dx_i\right) = \sum \alpha_i \partial_i. \quad (2.22)$$

Erinnerung. Durch die Einführung eines Euklidischen Skalarprodukts wird über das Längenmaß der Einheitsvektoren e (mit $\langle e, e \rangle = 1$) ein Maßstab ℓ festgelegt. In der bildlichen Darstellung der 1-Form $\mathcal{I}(u)$ durch Ebenenscharen gilt

$$\text{Länge}(u(p)) \times \text{Ebenenabstand}(\mathcal{I}(u)_p) = \ell^2. \quad (2.23)$$

2.4.2 Differenzial und Gradient

Spezialisieren wir den Isomorphismus \mathcal{I} zwischen Vektorfeldern und 1-Formen zum Sonderfall des Differenzials einer Funktion, so erhalten wir:

Definition. Unter dem **Gradienten** einer Funktion $f : E_n \rightarrow \mathbb{R}$ versteht man das Vektorfeld

$$\text{grad } f := \mathcal{I}^{-1}(df). \quad (2.24)$$

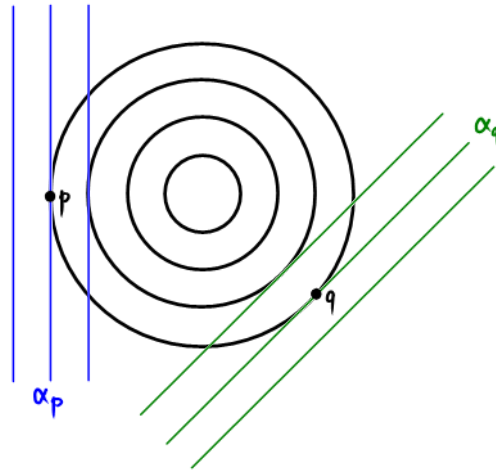
Andere Schreibweisen für den Gradienten sind

$$\text{grad } f \equiv \nabla f \equiv \vec{\nabla} f. \quad (2.25)$$

Visualisierung. Wir wollen den Gradienten nun anschaulich deuten. Als Vorbereitung betrachten wir zuerst das Differenzial. Zwecks besserer Vorstellung spezialisieren wir zum Fall $n = 3$. Eine Funktion $f : E_3 \rightarrow \mathbb{R}$ veranschaulichen wir durch ihre **Niveauflächen**,

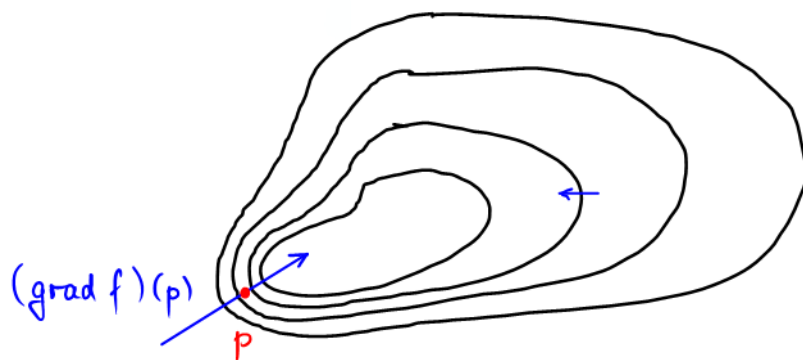
$$S_r := \{p \in E_3 \mid f(p) = r \in \mathbb{R}\}. \quad (2.26)$$

Zum Beispiel sind die Niveauflächen der **Euklidischen Abstandsfunktion** $f = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (in kartesischen Koordinaten $x_1 \equiv x, x_2 \equiv y, x_3 \equiv z$) Kugeloberflächen:



Die Ebenenschar der 1-Form $\alpha = df$ im Punkt p entsteht durch **Linearisierung** der Niveauflächen von f im Punkt p . Dabei ergibt eine dichte/dünne Aufeinanderfolge von Niveauflächen eine dicht/dünn gestaffelte Ebenenschar. Der Gradient einer Funktion f steht überall senkrecht auf den Niveauflächen von f . Dabei verhält sich die Länge des Gradienten reziprok zum Abstand zwischen den Niveauflächen.

Beispiel (in zwei Dimensionen): **Niveaulinien** einer Höhenfunktion. Der Gradient zeigt in Richtung des **steilsten Anstiegs** und ist umso größer, je dichter die Höhenlinien liegen.



2.4.3 Partielle Ableitung

Zum Zweck der Koordinatendarstellung des Differenzials und des Gradienten definieren wir jetzt den Begriff der partiellen Ableitung. Zunächst befassen wir uns nur mit dem Differenzial df . Sei dazu $\{o; e_1, \dots, e_n\}$ ein affines Koordinatensystem des Euklidischen Raums E_n (oder eines anderen affinen Raums). Wie zuvor bezeichnen wir die affinen Koordinatenfunktionen mit $x_i : E_n \rightarrow \mathbb{R}$. Ihre Differenziale sind die Koordinatenformen $dx_i : E_n \rightarrow V^*$.

Definition. Für eine differenzierbare Funktion $f : E_n \rightarrow \mathbb{R}$ definiert man die partielle Ableitung

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : E_n \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.27)$$

als den Wert des Differenzials von f auf dem Basisvektor e_i :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) := (df)_p(e_i) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + te_i) - f(p)}{t}. \quad \square \quad (2.28)$$

Hieraus folgt für das Differenzial die **Koordinatendarstellung**

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i. \quad (2.29)$$

Ergänzung. Der Begriff der partiellen Ableitung ist nicht an affine Koordinaten geknüpft, sondern für ganz allgemeine Koordinatensysteme erklärt. Hierauf wollen wir kurz eingehen.

Unter einem **Koordinatensystem** für E_n (oder irgendeinen n -dimensionalen affinen Raum) versteht man einen Satz von differenzierbaren Funktionen $\xi_i : E_n \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, n$) mit der Eigenschaft, dass die Differenziale $(d\xi_1)_p, \dots, (d\xi_n)_p$ für jeden Punkt $p \in E_n$ eine Basis von V^* bilden. ($V \simeq \mathbb{R}^n$ ist wie immer dem Differenzvektorraum von E_n .) Passend zu diesen Differenzialen bestimmt man (Basis-)Vektorfelder $\partial_{\xi_1}, \dots, \partial_{\xi_n}$ durch Lösen des Gleichungssystems

$$(d\xi_i)_p(\partial_{\xi_j}(p)) = \delta_{ij} \quad (2.30)$$

für alle $p \in E_n$. Die **partielle Ableitung** nach ξ_i ist dann definiert durch

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_i}(p) := (df)_p(\partial_{\xi_i}(p)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + t\partial_{\xi_i}(p)) - f(p)}{t}. \quad (2.31)$$

Das Differenzial hat den universell einfachen Ausdruck

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial \xi_i} d\xi_i. \quad (2.32)$$

Achtung! Zur Bestimmung der partiellen Ableitung nach einer Koordinate ξ_1 reicht es nicht aus, die Koordinatenfunktion ξ_1 allein zu kennen. Für die partielle Ableitung $\partial f / \partial \xi_1$ benötigt man das durch die Gleichungen

$$(d\xi_1)(\partial_{\xi_1}) = 1, \quad (d\xi_2)(\partial_{\xi_1}) = 0, \quad \dots, \quad (d\xi_n)(\partial_{\xi_1}) = 0 \quad (2.33)$$

bestimmte Vektorfeld ∂_{ξ_1} , was wiederum die Kenntnis aller n Koordinaten ξ_1, \dots, ξ_n erfordert.

Gradient in kartesischen Koordinaten. Wir wenden uns jetzt dem Gradienten zu. Um einen möglichst einfachen Ausdruck für ihn zu erhalten, schränken wir die Wahl des Koordinatensystems unter Verwendung der Euklidischen Struktur von E_n ein. Sei also das durch $\{o; e_1, \dots, e_n\}$ bestimmte Koordinatensystem jetzt kartesisch, d.h. die Basisvektoren e_1, \dots, e_n bilden ein Orthonormalsystem, $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. Dann haben wir $\mathcal{I}^{-1}(dx_i) = \partial_i$, und für den Gradienten folgt der simple Ausdruck

$$\text{grad } f = \mathcal{I}^{-1}(df) = \mathcal{I}^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \partial_i. \quad (2.34)$$

Gradient in Zylinderkoordinaten. Ausgehend von kartesischen Koordinaten x_1, x_2, x_3 im E_3 erklärt man Zylinderkoordinaten ρ, φ, z durch

$$x_1 = \rho \cos \varphi, \quad x_2 = \rho \sin \varphi, \quad x_3 = z. \quad (2.35)$$

Das Differenzial hat in **Zylinderkoordinaten** die universell simple Form von (2.29):

$$df = \frac{\partial f}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} dz. \quad (2.36)$$

Einfach gesagt wirken die partiellen Ableitungen $\partial/\partial\rho$, usw., wie man es erwarten würde: drückt man f durch die Koordinaten ρ, φ, z aus, dann ist $\partial f/\partial\rho$ die gewöhnliche Ableitung nach der Variablen ρ (wobei φ und z festgehalten werden).

Ausführlich gesprochen werden Basisvektorfelder $\partial_\rho, \partial_\varphi, \partial_z$ bestimmt durch

$$\begin{aligned} d\rho(\partial_\rho) &= 1, & d\rho(\partial_\varphi) &= 0, & d\rho(\partial_z) &= 0, \\ d\varphi(\partial_\rho) &= 0, & d\varphi(\partial_\varphi) &= 1, & d\varphi(\partial_z) &= 0, \\ dz(\partial_\rho) &= 0, & dz(\partial_\varphi) &= 0, & dz(\partial_z) &= 1. \end{aligned} \quad (2.37)$$

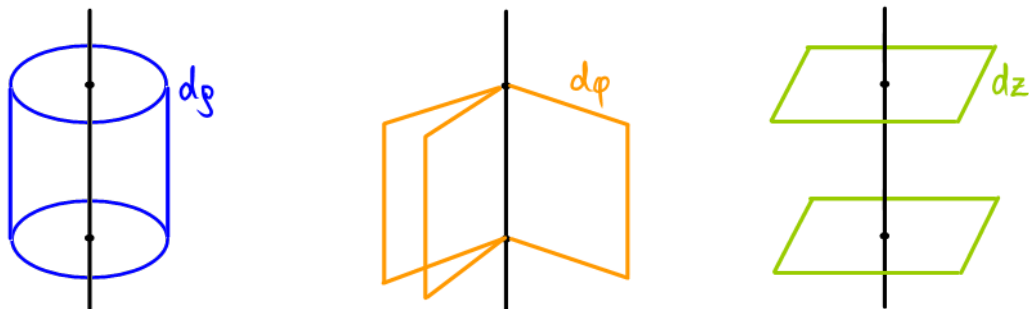
Die partiellen Ableitungen sind dann durch die allgemeine Definition (2.31) gegeben; zum Beispiel

$$\frac{\partial f}{\partial \rho}(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + t\partial_\rho(p)) - f(p)}{t}. \quad (2.38)$$

Zur Aufstellung des Gradienten in Zylinderkoordinaten,

$$\text{grad } f = \mathcal{I}^{-1}(df) = \frac{\partial f}{\partial \rho} \mathcal{I}^{-1}(d\rho) + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathcal{I}^{-1}(d\varphi) + \frac{\partial f}{\partial z} \mathcal{I}^{-1}(dz), \quad (2.39)$$

benötigen wir $\mathcal{I}^{-1}(d\rho)$, $\mathcal{I}^{-1}(d\varphi)$ und $\mathcal{I}^{-1}(dz)$. Dazu erinnern wir daran, dass der Isomorphismus \mathcal{I} Orthonormalsysteme auf Orthonormalsysteme abbildet. Man sieht sofort (am schnellsten per graphischer Skizze), dass die Niveauflächen von ρ, φ, z aufeinander senkrecht stehen.



Es verbleibt also lediglich die Aufgabe, die orthogonalen 1-Formen $d\rho, d\varphi, dz$ auf Eins zu normieren. Im Fall von $d\rho$ erhält man

$$d\rho = d\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \frac{x_1 dx_1 + x_2 dx_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}.$$

Da dx_1 und dx_2 Länge Eins haben, folgt

$$\langle d\rho, d\rho \rangle = \frac{x_1^2 + x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}^2} = 1.$$

Im Fall von $d\varphi$ ergibt sich

$$d\varphi = d \arctan(x_2/x_1) = \frac{x_1 dx_2 - x_2 dx_1}{x_1^2 + x_2^2}$$

und somit

$$\langle d\varphi, d\varphi \rangle = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{1}{\rho^2}.$$

Ausserdem gilt $\langle dz, dz \rangle$. Folglich bilden die 1-Formen $d\rho$, $\rho d\varphi$ und dz ein Orthonormalsystem. Das entsprechende Orthonormalsystem von Vektorfeldern bezeichnen wir mit

$$\hat{e}_\rho := \mathcal{I}^{-1}(d\rho), \quad \hat{e}_\varphi := \mathcal{I}^{-1}(\rho d\varphi), \quad \hat{e}_z := \mathcal{I}^{-1}(dz). \quad (2.40)$$

Man hat

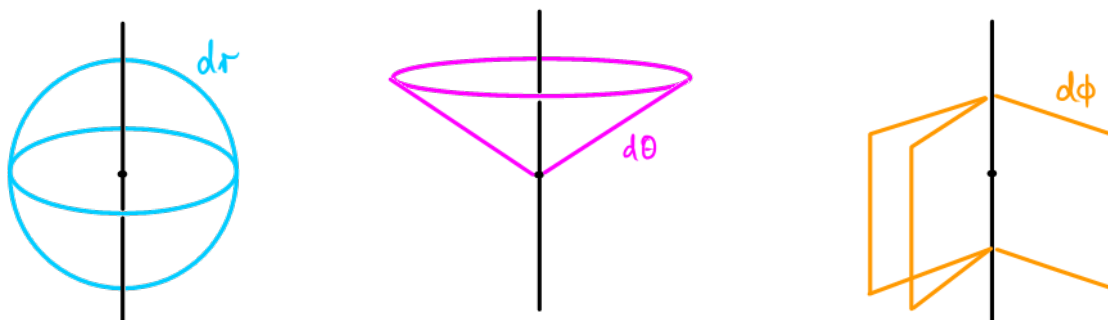
$$\hat{e}_\rho = \partial_\rho, \quad \hat{e}_\varphi = \rho^{-1} \partial_\varphi, \quad \hat{e}_z = \partial_z. \quad (2.41)$$

Der Gradient in Zylinderkoordinaten wird dann ausgedrückt durch

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{e}_z. \quad (2.42)$$

Aufgabe. Sphärische Polarkoordinaten (oder **Kugelkoordinaten**) r, θ, ϕ sind erklärt durch

$$x_1 = r \sin \theta \cos \phi, \quad x_2 = r \sin \theta \sin \phi, \quad x_3 = r \cos \theta. \quad (2.43)$$



Die 1-Formen dr , $r d\theta$ und $r \sin \theta d\phi$ bilden ein Orthonormalsystem, und der Gradient in Kugelkoordinaten ist

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{e}_\phi \quad (2.44)$$

mit

$$\hat{e}_r = \mathcal{I}^{-1}(dr) = \partial_r, \quad \hat{e}_\theta = \mathcal{I}^{-1}(r d\theta) = r^{-1} \partial_\theta, \quad \hat{e}_\phi = \mathcal{I}^{-1}(r \sin \theta d\phi) = (r \sin \theta)^{-1} \partial_\phi. \quad \square$$

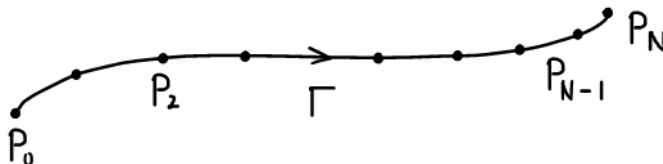
Abschließend soll noch einmal betont werden, dass das Differenzial immer existiert, während zur Bildung des Gradienten die Euklidische Struktur des Raums notwendig ist. Dieser wichtige Unterschied wird spätestens in der Thermodynamik deutlich. Im Zustandsraum der Thermodynamik gibt es keinen natürlichen Begriff von Skalarprodukt, weshalb man dort viele Differenziale aber keine Gradienten zu sehen bekommt.

Merke: Ohne Skalarprodukt kein Gradient!

2.5 Wegintegrale

Eine besonders wichtige Eigenschaft von 1-Formen ist, dass sie sich in kanonischer Weise längs Kurven im Raum integrieren lassen.

Definition (anschaulich). Wir erklären das **Wegintegral** einer 1-Form $\alpha : X \rightarrow V^*$ längs einer Kurve (oder eines Weges) Γ in einem affinen Raum $(X, V, +)$. Dazu unterteilen wir den Weg gleichmäßig in Stücke, indem wir eine große Zahl von Stützpunkten p_0, p_1, \dots, p_N einführen:



Dann berechnen wir die Summe

$$\alpha_{p_0}(p_1 - p_0) + \alpha_{p_1}(p_2 - p_1) + \dots + \alpha_{p_{N-1}}(p_N - p_{N-1}).$$

Schließlich verfeinern wir die Kette der Stützpunkte, bis sich im Limes $N \rightarrow \infty$ ein Grenzwert (nämlich das Wegintegral $\int_{\Gamma} \alpha$ von α längs Γ) einstellt:

$$\int_{\Gamma} \alpha := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_{p_i}(p_{i+1} - p_i). \quad (2.45)$$

Bemerkung. Für diese Definition wird nur die affine Struktur des Raumes benötigt: zur Bestimmung der auftretenden Summanden $\alpha_{p_i}(p_{i+1} - p_i)$ tun wir nichts weiter, als die Linearformen α_{p_i} auf den Differenzvektoren $p_{i+1} - p_i$ auszuwerten. Hierfür genügt der Begriff von Parallelität – im anschaulichen Bild von Abschnitt 1.4 zählen wir ganz einfach die von $p_{i+1} - p_i$ gekreuzten Ebenen von α_{p_i} . Winkelmessung und/oder Längenmessung von Vektoren kommt hier nicht vor! (Tatsächlich ist Winkel- und Längenmessung für unser spezielles Ziel, nämlich die Berechnung von Wegintegralen von Kraftfeldern, nicht angezeigt.) \square

Um zu einer konzisen Definition zu gelangen, ersetzt man grob gesprochen die Differenzvektoren der Stützpunkte durch die Tangentialvektoren der Kurve. Das genaue Vorgehen ist wie folgt. Sei Γ eine Kurve in X mit Anfangspunkt p und Endpunkt q . Unter einer **Parametrisierung** von Γ versteht man eine differenzierbare Abbildung

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow X \quad (2.46)$$

mit $\gamma([0, 1]) = \Gamma$ (als Punktmenge), $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$ und $\gamma'(t) \neq \mathbf{0}$ für alle $t \in [0, 1]$.

Definition (Wegintegral). Ist $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ eine Parametrisierung der Kurve Γ , so erklärt man das Wegintegral der 1-Form $\alpha : X \rightarrow V^*$ längs Γ durch

$$\int_{\Gamma} \alpha := \int_0^1 \alpha_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt. \quad (2.47)$$

Bemerkung. Das Wegintegral hängt nicht von der Wahl der Parametrisierung ab. Ist nämlich

$\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow X$ eine andere Parametrisierung von Γ , so existiert eine monoton wachsende differenzierbare Funktion $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ mit $\gamma_1(t) = \gamma(h(t))$, und es resultiert

$$\int_0^1 \alpha_{\gamma_1(t)}(\gamma_1'(t)) dt = \int_0^1 \alpha_{\gamma(h(t))}(\gamma'(h(t))) h'(t) dt = \int_0^1 \alpha_{\gamma(s)}(\gamma'(s)) ds. \quad (2.48)$$

Das erste Gleichheitszeichen folgt hier aus der Kettenregel, das zweite aus der Variablensubstitution $s = h(t)$.

Aufgabe. Man hat beim Wegintegral die Freiheit, das Intervall $[0, 1]$ durch ein anderes Intervall $[a, b]$ zu ersetzen: ist $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ eine Parametrisierung von Γ , so gilt

$$\int_{\Gamma} \alpha = \int_a^b \alpha_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt. \quad (2.49)$$

Mitteilung. Bei genauer Betrachtung erweist sich die Einschränkung $\gamma'(t) \neq \mathbf{0}$ als unnötig. Mehrmaliges Umkehren ist erlaubt (!), solange γ nur der Spur der Kurve Γ treu bleibt und vom Anfangspunkt zum Endpunkt führt.

2.5.1 Wegintegral in kartesischen Koordinaten

Die konkrete Berechnung des Wegintegrals erfordert in der Regel die Wahl eines Koordinatensystems. Hierbei hat man völlige Freiheit, denn das Wegintegral drückt sich in allen Koordinaten in der gleichen Weise aus. Von dieser Freiheit wollen wir hier aber noch keinen Gebrauch machen, sondern ein ganz spezielles Koordinatensystem verwenden. Außerdem arbeiten wir in diesem Abschnitt im dreidimensionalen Euklidischen Raum, E_3 .

Wir erinnern daran, dass ein affines Koordinatensystem $\{o; e_x, e_y, e_z\}$ von E_3 kartesisch heißt, wenn die Basisvektoren e_x, e_y, e_z ein Orthonormalsystem von $V = \mathbb{R}^3$ bilden. Durch ein solches Koordinatensystem werden kartesische Koordinaten x, y, z und Koordinatenformen dx, dy, dz bestimmt. dx läßt sich anschaulich als die Schar von Ebenen auffassen, die parallel zur yz -Ebene liegen (eigentlich: die Lösungsmengen der affinen Gleichung $x = \text{constant}$ sind) und Abstand Eins voneinander haben (mit Pluspol bei $x = +\infty$). Eine analoge Aussage gilt für dy und dz . Eine beliebige 1-Form A wird durch $A = A_x dx + A_y dy + A_z dz$ ausgedrückt, wobei die Komponenten Funktionen $A_x, A_y, A_z : E_3 \rightarrow \mathbb{R}$ sind.

Rechenbeispiel. Eine **Schraubenlinie** Γ mit Radius R , Schraubenhöhe L und Hub $2\pi L/a$ wird parametrisiert durch

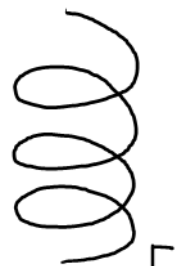
$$[0, 1] \ni t \mapsto \gamma(t) = o + R \cos(at)e_x + R \sin(at)e_y + Lte_z.$$

Zu berechnen sei das Wegintegral längs Γ eines Kraftfelds K mit Koordinatendarstellung

$$K = k_1 dy + k_2 z dz \quad (k_1, k_2 \in \mathbb{R}).$$

Zuerst ermitteln wir durch Ableiten nach t den **Tangentenvektor** der Kurve:

$$\gamma'(t) = -Ra \sin(at)e_x + Ra \cos(at)e_y + Le_z.$$



Einsetzen ins Kraftfeld ergibt

$$K_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = k_1 R a \cos(at) + k_2 L^2 t.$$

So erhalten wir das Wegintegral

$$\int_{\Gamma} K = \int_0^1 K_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt = \int_0^1 (k_1 R a \cos(at) + k_2 L^2 t) dt = k_1 R \sin(a) + k_2 L^2 / 2.$$

2.5.2 Wegintegral einer exakten 1-Form

Wie zuvor sei $(X, V, +)$ ein affiner Raum.

Definition. Eine 1-Form $\alpha : X \rightarrow V^*$ heißt **exakt**, wenn sie das Differenzial einer Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ist, wenn also gilt

$$\alpha_p(v) = (df)_p(v) \equiv (D_p f)(v), \quad (2.50)$$

oder kurz: $\alpha = df$. Ein exaktes Kraftfeld K heißt **konservativ**. In der Physik schreibt man in diesem Fall $K = -dU$ und nennt die Funktion U ein **Potenzial** des konservativen Kraftfeldes K .

Hauptsatz (der Differenzial- und Integralrechnung). Das Wegintegral $\int_{\Gamma} \alpha$ einer exakten 1-Form $\alpha = df$ hängt nur vom Anfangspunkt p und vom Endpunkt q der Kurve Γ ab, nicht aber vom Verlauf der Kurve dazwischen:

$$\int_{\Gamma} \alpha = \int_{\Gamma} df = f(q) - f(p). \quad (2.51)$$

Beweis. Wähle eine Parametrisierung der Kurve Γ ,

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow X, \quad t \mapsto \gamma(t), \quad \gamma(0) = p, \quad \gamma(1) = q.$$

Per Definition ist dann

$$\int_{\Gamma} \alpha = \int_0^1 (df)_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt.$$

Für die Verkettung von Abbildungen

$$[0, 1] \xrightarrow{\gamma} X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

gilt nun nach der Kettenregel

$$(df)_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = (D_{\gamma(t)} f)(D_t \gamma) = D_t(f \circ \gamma) = \frac{d}{dt} f(\gamma(t)).$$

Hiermit folgt schon das gewünschte Ergebnis:

$$\int_{\Gamma} \alpha = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) dt = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = f(q) - f(p).$$

Beispiel 1. Sei jetzt $X = E_3$ wieder der Euklidische Raum mit kartesischen Koordinaten x, y, z . Die **elektrische Feldstärke** E einer im Koordinatenursprung befindlichen Punktladung Q ist die 1-Form

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x dx + y dy + z dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (2.52)$$

Diese Feldstärke ist exakt, $E = -d\Phi$, mit elektrischem Potenzial

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}. \quad (2.53)$$

Nach dem obigen Hauptsatz ist das Wegintegral $\int_{\Gamma} E = \Phi(p) - \Phi(q)$ längs einer Kurve Γ von p nach q wegunabhängig. Man nennt $\int_{\Gamma} E =: \int_p^q E$ die **elektrische Spannung** zwischen den Punkten p und q .

Beispiel 2. Das Kraftfeld K des Rechenbeispiels von Abschnitt 2.5.1 ist exakt:

$$K = k_1 dy + k_2 z dz = df, \quad f = k_1 y + k_2 z^2/2.$$

Mit Kenntnis des Hauptsatzes wäre die Berechnung des Wegintegrals $\int_{\Gamma} K$ kürzer ausgefallen:

$$\int_{\Gamma} K = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = k_1 R \sin(a) + k_2 L^2/2.$$

2.5.3 Anschauliche Deutung des Hauptsatzes

Wir wissen aus Abschnitt 1.4, dass wir Linearformen $\lambda : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ durch Ebenenscharen veranschaulichen können – in dieser bildlichen Vorstellung wird der Funktionswert $\lambda(v)$ durch Abzählen der von v gekreuzten Ebenen bestimmt. In Abschnitt 2.4.2 haben wir dann gesehen, wie die Ebenenschar zu $\lambda \equiv (df)_p$ durch Linearisierung der Niveauflächen der Funktion f im Punkt p entsteht. Diese Deutung des Differenzials df in Verbindung mit der anschaulichen Definition des Wegintegrals einer 1-Form in Gl. (2.45) lässt eine intuitive Deutung des Hauptsatzes zu.

Deutung (des Hauptsatzes). Beim Integrieren einer exakten 1-Form $\alpha = df$ führt die Prozedur des “Abzählens gekreuzter Ebenen” (im differenziellen Limes, $N \rightarrow \infty$) insgesamt dazu, dass gekreuzte Niveauflächen gezählt werden, das Integral $\int_p^q df$ also die Niveau-Zunahme/Abnahme $f(q) - f(p)$ berechnet.

2.5.4 Wegintegral eines Vektorfeldes

Das Wegintegral einer 1-Form ist immer erklärt, sofern der Raum affin ist (oder allgemeiner: eine differenzierbare Struktur hat). Anders im Falle eines Vektorfeldes! Um Vektorfelder längs Kurven zu integrieren, muss man die Geometrie des Raumes kennen und heranziehen. Sei $X = E_n$ im Folgenden ein Euklidischer Raum. Aus Abschnitt 2.4.1 ist uns schon der Euklidische Isomorphismus \mathcal{I} zwischen Vektorfeldern und 1-Formen bekannt.

Definition. Sei $u \equiv \vec{u} : X \rightarrow V$ ein Vektorfeld in einem Euklidischen Raum X mit Euklidischem Differenzvektorraum V . Das **Wegintegral** $\int_{\Gamma} \vec{u} \cdot d\vec{r}$ von u längs einer Kurve Γ ist erklärt durch

$$\int_{\Gamma} \vec{u} \cdot d\vec{r} := \int_{\Gamma} \mathcal{I}(u). \quad (2.54)$$

Zur Berechnung des Wegintegrals des Vektorfeldes u gehen wir also zur entsprechenden 1-Form $\mathcal{I}(u)$ über und integrieren dann die 1-Form in der uns bekannten, natürlichen Weise. \square

Als Konsequenz des Hauptsatzes über Wegintegrale exakter 1-Formen ergibt sich:

Satz. Für das Wegintegral eines Gradientenfeldes $\vec{\nabla}f$ längs einer Kurve Γ von p nach q gilt

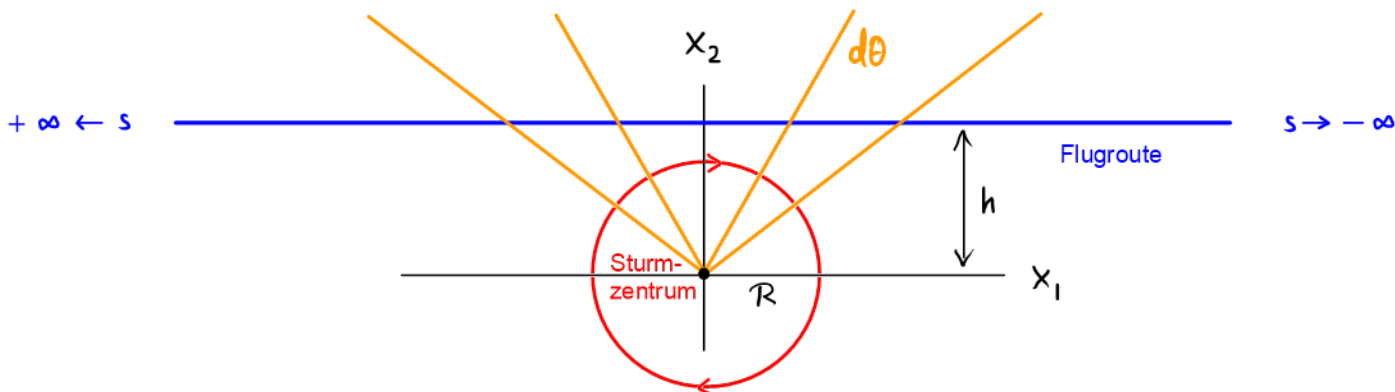
$$\int_{\Gamma} \vec{\nabla}f \cdot d\vec{r} = f(q) - f(p). \quad (2.55)$$

Beweis. $\int_{\Gamma} \vec{\nabla}f \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma} \mathcal{I}(\text{grad}f) = \int_{\Gamma} df = f(q) - f(p)$.

Rechenbeispiel. Ein Langstrecken-Flugzeug soll die Randzone eines Wirbelsturms (Hurricane) von Ost nach West durchfliegen. Die kürzeste Flugroute verläuft nördlich des Wirbelsturms in der nördlichen Hemisphäre (wo große Stürme am Boden im Gegenuhrzeigersinn, in der Reiseflughöhe von 10 km oder darüber aber im Uhrzeigersinn wirbeln), weshalb vor dem Start zusätzliches Kerosin getankt werden muss, um den durch Gegenwind verursachten Mehrbedarf an Energie zu decken. Für eine grobe Abschätzung des Mehrbedarfs legen wir das Sturmzentrum in den Koordinatenursprung eines Systems ebener Polarkoordinaten $x_1 = r \cos \theta$ und $x_2 = r \sin \theta$ und nehmen eine Flugroute Γ längs $x_2 = h = \text{const}$ an. Das vom Wirbelsturm erzeugte, zusätzliche Kraftfeld K^H (infolge von Gegenwind und Reibung, bei vorgegebener Reisefluggeschwindigkeit) sei

$$K^H = -f(r) d\theta, \quad f(r) = kr^2 e^{-(r/R)^2}.$$

Da K^H keine konservative Kraft ist, hilft uns der Hauptsatz nicht weiter und wir sind gezwungen, wirklich zu rechnen. Wir parametrisieren die Flugroute durch $x_1(\gamma(s)) = -hs$ und $x_2(\gamma(s)) = h$.



Nehmen wir eine totale Flugstrecke von $L \gg R$ an, dann machen wir einen vernachlässigbaren Fehler, wenn wir s die gesamte Zahlenachse \mathbb{R} durchlaufen lassen (siehe Skizze). So haben wir

$$r^2(\gamma(s)) = h^2(1 + s^2), \quad \tan \theta(\gamma(s)) = -1/s.$$

Mit der Zwischenrechnung

$$(r^2 d\theta)_{\gamma(s)}(\gamma'(s)) = h^2(1 + s^2) \frac{d}{ds} \arctan(-1/s) = h^2$$

erhalten wir dann das **Arbeitsintegral**

$$-\int_{\Gamma} K^H = -\int_{\mathbb{R}} K_{\gamma(s)}^H(\gamma'(s)) ds = kh^2 \int_{\mathbb{R}} e^{-(1+s^2)h^2/R^2} ds = \sqrt{\pi} khR e^{-h^2/R^2}.$$

Jetzt berechnen wir das gleiche Integral ein zweites Mal und zwar so, wie es die meisten Benutzer des Vektorkalküls (ohne 1-Formen) täten. Diese Rechnung beginnt damit, dass man die

Kraft als Vektorfeld präsentiert bekommt:

$$\vec{K}^H = -\frac{f(r)}{r} \hat{e}_\theta.$$

Dann parametrisiert man die Flugroute z.B. als gleichförmig geradlinige Bewegung:

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \gamma(t) = o - vt e_1 + h e_2, \quad \gamma'(t) = -v e_1.$$

Weiter muss das Euklidische Skalarprodukt des Vektorfeldes \vec{K}^H mit dem Linienelement $d\vec{r}$ berechnet werden:

$$\vec{K}^H \cdot d\vec{r} = -\frac{f(r)}{r} \langle \hat{e}_\theta, -v e_1 \rangle dt = -v \frac{f(r)}{r} \sin \theta dt.$$

Dieser Ausdruck ist längs der Flugroute $\gamma(t)$ auszuwerten. Dazu benötigen wir

$$r(\gamma(t)) = \sqrt{(vt)^2 + h^2}, \quad \sin \theta(\gamma(t)) = \frac{h}{\sqrt{(vt)^2 + h^2}}.$$

Einsetzen ergibt schließlich das Arbeitsintegral

$$- \int_{\Gamma} \vec{K}^H \cdot d\vec{r} = kv \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{v^2 t^2 + h^2} e^{-(v^2 t^2 + h^2)/R^2} \frac{h dt}{\sqrt{v^2 t^2 + h^2}}.$$

Nach Substitution $s = vt$ und Kürzen der Wurzelfaktoren resultiert das Integral von zuvor.

Fußnote. (Spätestens) seit Carl Friedrich **Gauß** kennt man das (nach ihm benannte) **Integral**

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx = 1. \tag{2.56}$$

Durch die Variablensubstitution $y = x\sqrt{\pi/a}$ (für $a > 0$) erhält man

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ay^2} dy = \sqrt{\pi/a} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx = \sqrt{\pi/a}. \tag{2.57}$$

2.6 Flächenintegrale

Die passenden Integranden für Flächenintegrale sind weder Vektorfelder noch 1-Formen, sondern sogenannte 2-Formen.

2.6.1 2-Formen

In Abschnitt 2.3 haben wir gelernt, dass 1-Formen räumlich variable Linearformen sind. Ganz analog sind 2-Formen räumlich variable alternierende 2-lineare Formen.

Definition. Eine 2-Form ω auf einem affinen Raum $(X, V, +)$ ist eine differenzierbare Abbildung

$$\omega : X \rightarrow \text{Alt}^2(V), \quad p \mapsto \omega_p, \quad (2.58)$$

die jedem Punkt p eine alternierende 2-lineare Form ω_p zuweist.

Beispiel. Ein physikalisch wichtiges Beispiel für eine 2-Form im Euklidischen Raum E_3 ist die magnetische Feldstärke B . Wir erinnern daran (siehe Abschnitt 1.9), dass man sich eine alternierende 2-lineare Form als eine Geradenschar (in 3 Raumdimensionen) vorstellen kann. Das gleiche Bild taugt für ein homogenes Magnetfeld B als räumlich konstante 2-Form. Auch im allgemeinen Fall eines nichthomogenen Magnetfelds B taugt die Vorstellung von (jetzt nicht mehr geraden) Linien; diese werden als magnetische Flusslinien bezeichnet.

Definition. Unter dem äußeren Produkt zweier 1-Formen α und β versteht man die 2-Form $\alpha \wedge \beta$, wobei das äußere Produkt punktweise erklärt ist:

$$(\alpha \wedge \beta)_p := \alpha_p \wedge \beta_p. \quad (2.59)$$

Insbesondere gilt

$$(dx \wedge dy)_p = (dx)_p \wedge (dy)_p = \vartheta_x \wedge \vartheta_y, \quad \text{usw.} \quad (2.60)$$

Bei der Multiplikation einer 2-Form ω mit einer Funktion f entsteht eine neue 2-Form, $f\omega$:

$$(f\omega)_p = f(p)\omega_p. \quad (2.61)$$

Mit der punktweisen Definition der Multiplikation werden alle Eigenschaften der Skalarmultiplikation und äußeren Multiplikation (von alternierenden Multilinearformen) übertragen; so gilt zum Beispiel für eine Funktion f und zwei 1-Formen α und β die Relation

$$f(\alpha \wedge \beta) = (f\alpha) \wedge \beta \equiv f\alpha \wedge \beta. \quad (2.62)$$

Koordinatendarstellung. Es sei ein Satz von Koordinatenfunktionen x_1, \dots, x_n mit Koordinatenformen dx_1, \dots, dx_n gegeben. Dann sind die geordneten äußeren Produkte $dx_i \wedge dx_j$ für $1 \leq i < j \leq n$ elementar in dem Sinn, dass eine allgemeine 2-Form ω als Linearkombination derselben dargestellt werden kann:

$$\omega = \sum_{i < j} \omega_{ij} dx_i \wedge dx_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \omega_{ij} dx_i \wedge dx_j. \quad (2.63)$$

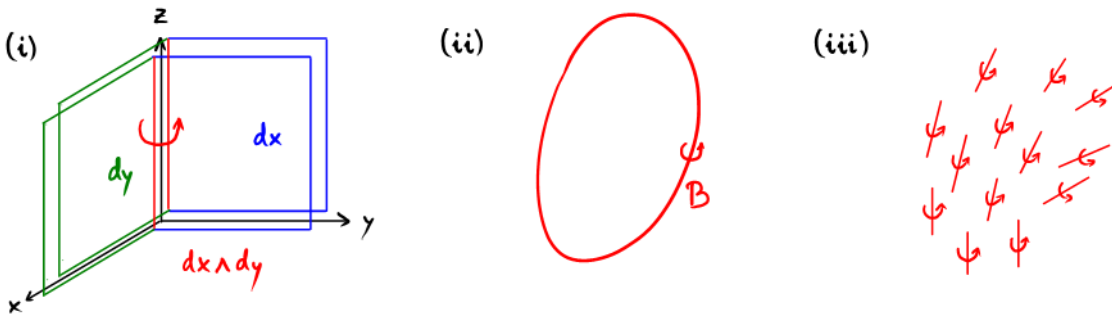
Für das zweite Gleichheitszeichen wird benützt bzw. angenommen, dass gilt

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i, \quad \omega_{ij} = -\omega_{ji}. \quad (2.64)$$

Insbesondere hat man

$$dx_j \wedge dx_j = 0, \quad \omega_{jj} = 0. \quad (2.65)$$

Visualisierung. Wir deuten kurz an, wie man sich 2-Formen im dreidimensionalen Raum anschaulich vorstellen kann. (i) Man bekommt die Geradenschar der konstanten 2-Form $dx \wedge dy$, indem man die Niveauflächen der Koordinatenfunktion x mit den Niveauflächen der Koordinatenfunktion y schneidet. Die Geraden dieser Schar liegen parallel zur z -Achse.



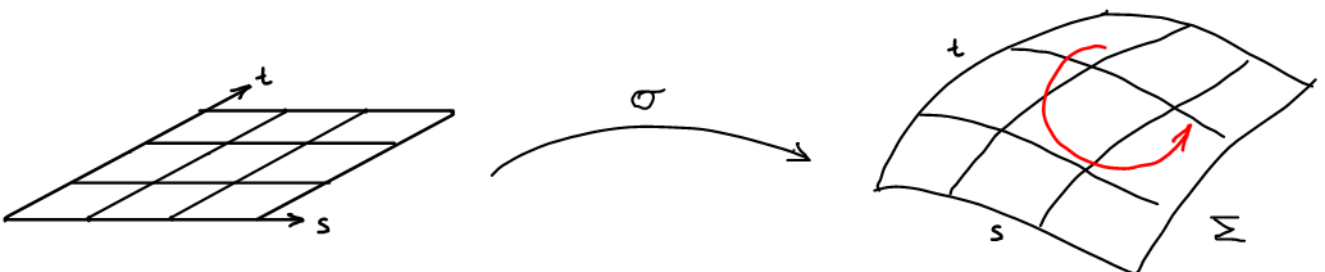
(ii) Die 2-Form der magnetischen Feldstärke B besteht aus **magnetischen Flusslinien**. Aufgrund einer speziellen Eigenschaft von B (nämlich: B ist “geschlossen”, $dB = 0$; siehe Abschnitt 2.7.1) haben diese Linien keinen Anfang und kein Ende. (iii) Auch eine ganz allgemeine 2-Form ω im dreidimensionalen Raum lässt sich als System von Linien visualisieren. Im allgemeinen Fall ($d\omega \neq 0$) sind diese Linien aber nicht geschlossen, d.h. sie können sehr wohl anfangen und enden. Alternativ kann man sich vorstellen, dass die “Liniendicke” variiert. [Die Begründung zu (ii) und (iii) wird in den folgenden Abschnitten gegeben.]

2.6.2 Integral einer 2-Form

Eine **orientierte Fläche** ist (vereinfacht ausgedrückt) eine Fläche mit Zirkulationssinn. Eine Parametrisierung einer orientierten (Quader-)Fläche Σ ist eine differenzierbare Abbildung

$$\sigma : [0, 1]^2 \rightarrow \Sigma \subset X, \quad (s, t) \mapsto \sigma(s, t), \quad (2.66)$$

mit der Eigenschaft, dass das geordnete Paar von Tangentialvektoren $\frac{\partial}{\partial s} \sigma(s, t), \frac{\partial}{\partial t} \sigma(s, t)$ den Zirkulationssinn der Fläche Σ nachbildet. (“Geordnet” bedeutet hier, dass es auf die Reihenfolge der Tangentialvektoren ankommt.)



Definition. Es sei $(X, V, +)$ ein affiner Raum und $\omega : X \rightarrow \text{Alt}^2(V)$ eine 2-Form. Ist $\sigma : [0, 1]^2 \rightarrow \Sigma \subset X$ eine Parametrisierung der Fläche Σ , so ist das **Integral von ω über Σ** erklärt durch das iterierte (Riemann-)Integral

$$\int_{\Sigma} \omega := \int_0^1 \left(\int_0^1 \omega_{\sigma(s,t)} \left(\frac{\partial}{\partial s} \sigma(s,t), \frac{\partial}{\partial t} \sigma(s,t) \right) dt \right) ds. \quad (2.67)$$

Mitteilung. Diese Definition ist von der Wahl der Parametrisierung unabhängig.

Beispiel. Wir integrieren die konstante magnetische Feldstärke $B = B_0 dx \wedge dy$ (mit $B_0 \in \mathbb{R}$) über eine **Hemisphäre** S_+ mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung o und Parametrisierung

$$\sigma(s, t) = o + R \sin(\pi s/2) (\cos(2\pi t) e_x + \sin(2\pi t) e_y) + R \cos(\pi s/2) e_z.$$

Zunächst bestimmen wir den Tangentialvektor zur s -Koordinatenlinie:

$$\frac{\partial}{\partial s} \sigma(s, t) = \frac{1}{2} R \pi \cos(\pi s/2) (\cos(2\pi t) e_x + \sin(2\pi t) e_y) - \frac{1}{2} R \pi \sin(\pi s/2) e_z,$$

und den Tangentialvektor zur t -Koordinatenlinie:

$$\frac{\partial}{\partial t} \sigma(s, t) = 2R\pi \sin(\pi s/2) (-\sin(2\pi t) e_x + \cos(2\pi t) e_y).$$

Dann setzen wir die Tangentialvektoren in die 2-Form ein:

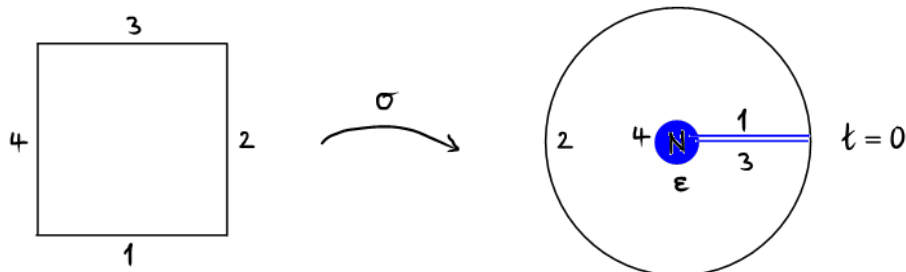
$$\begin{aligned} B_{\sigma(s,t)} \left(\frac{\partial}{\partial s} \sigma(s, t), \frac{\partial}{\partial t} \sigma(s, t) \right) &= B_0 R^2 \pi^2 \sin(\pi s/2) \cos(\pi s/2) (\cos^2(2\pi t) + \sin^2(2\pi t)) \\ &= \frac{1}{2} B_0 (\pi R)^2 \sin(\pi s). \end{aligned}$$

Schließlich berechnen wir das Flächenintegral:

$$\int_{S_+} B = \frac{1}{2} B_0 (\pi R)^2 \int_0^1 \left(\int_0^1 \sin(\pi s) dt \right) ds = B_0 \pi R^2.$$

Bemerkung 1. Es ist kein Zufall, dass das Ergebnis dieser Rechnung dem Produkt aus konstanter Feldstärke B_0 und Kreisfläche πR^2 (Projektion der Hemisphäre auf die xy -Ebene) gleich ist. Den zugehörigen mathematischen Hintergrund (Satz von Gauss) werden wir später kennenlernen.

Bemerkung 2. Die obige Definition des Flächenintegrals ist auf unser Beispiel anwendbar, auch wenn die Hemisphäre nicht in die Klasse der Quaderflächen fällt. Dazu entfernt man eine Kreisscheibe vom Radius ε mit Mittelpunkt im Nordpol und schneidet die Hemisphäre (z.B. längs der Koordinatenlinie $t = 0$) auf. Auf diese Weise entsteht eine Quaderfläche. Die ursprüngliche Hemisphäre gewinnt man im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ (nach Zusammenkleben längs $t = 0$) zurück.



2.6.3 Flächenintegral eines Vektorfeldes

Durch punktweise Anwendung der Abbildung \mathcal{I}_2 von Abschnitt 1.16 erhalten wir einen Isomorphismus

$$\mathcal{I}_2 : \text{Vektorfelder} \longrightarrow \text{2-Formen.} \quad (2.68)$$

Beispiel. Der 2-Form der magnetischen Feldstärke

$$B = B_{xy} dx \wedge dy + B_{yz} dy \wedge dz + B_{zx} dz \wedge dx \quad (2.69)$$

wird durch \mathcal{I}_2^{-1} das Vektorfeld des Magnetfeldes zugeordnet:

$$\mathcal{I}_2^{-1}(B) = B_{xy}\partial_z + B_{yz}\partial_x + B_{zx}\partial_y \equiv B_z\partial_z + B_x\partial_x + B_y\partial_y. \quad (2.70)$$

Definition. Es sei $v \equiv \vec{v} : E_3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld und Σ eine orientierte Fläche in E_3 . Das Flächenintegral $\int_{\Sigma} \vec{v} \cdot d^2\vec{n}$ von v über Σ ist erklärt durch

$$\int_{\Sigma} \vec{v} \cdot d^2\vec{n} = \int_{\Sigma} \mathcal{I}_2(v). \quad (2.71)$$

Man konvertiert also das Vektorfeld v in die 2-Form $\mathcal{I}_2(v)$ und integriert dann letztere in der uns schon bekannten Weise.

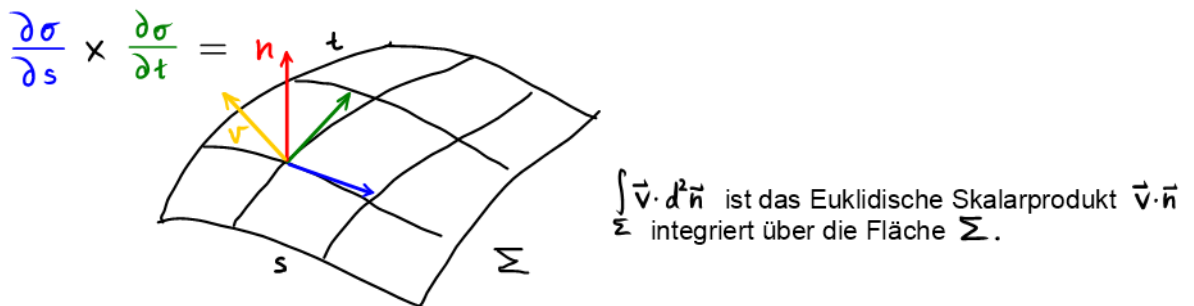
Bemerkung. Aus der Formel $\mathcal{I}_2(v) = \Omega(v, \cdot, \cdot)$ erhalten wir den Ausdruck

$$\int_{\Sigma} \vec{v} \cdot d^2\vec{n} = \int_0^1 \left(\int_0^1 \Omega \left(v(\sigma(s, t)), \frac{\partial}{\partial s} \sigma(s, t), \frac{\partial}{\partial t} \sigma(s, t) \right) dt \right) ds. \quad (2.72)$$

Im Flächenintegral eines Vektorfeldes v integriert man also das Spatvolumen der drei Vektorfelder $v, \frac{\partial}{\partial s} \sigma, \frac{\partial}{\partial t} \sigma$. Wegen $\Omega(u, v, w) = \langle u, v \times w \rangle$ ist eine äquivalente Aussage, dass man im Flächenintegral das Euklidische Skalarprodukt von v mit dem Vektorfeld

$$\frac{\partial}{\partial s} \sigma(s, t) \times \frac{\partial}{\partial t} \sigma(s, t) \quad (2.73)$$

integriert. Laut Definition des Vektorprodukts steht letzteres überall senkrecht auf der Integrationsfläche Σ .



2.7 Rotation

Nach dem Gradienten werden wir jetzt einen zweiten Vektor-Differenzialoperator kennenlernen: die **Rotation** “rot” (engl. “curl”). Dieser Differenzialoperator ist eine Spezialität von E_3 . Um die Rotation in angemessener Weise einzuführen, müssen wir zuerst den allgemeinen Ableitungsbegriff für 1-Formen kennenlernen.

2.7.1 Äußere Ableitung einer 1-Form

Es sei X ein n -dimensionaler affiner Raum. Ist X mit einer Basis dx_1, dx_2, \dots, dx_n von Koordinatenformen ausgestattet, dann ist jede 1-Form α auf X darstellbar als Linearkombination

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx_i \quad (2.74)$$

mit Komponenten $\alpha_i : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Definition. Die **äußere Ableitung** einer 1-Form $\alpha = \sum \alpha_i dx_i$ ist die 2-Form

$$d\alpha = \sum_{i=1}^n d\alpha_i \wedge dx_i. \quad (2.75)$$

Bemerkung. Einen äquivalenten Ausdruck erhält man mit $d\alpha_i = \sum \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} dx_j$ durch Verwenden der Schiefsymmetrie $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ des äußeren Produkts:

$$d\alpha = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i = \sum_{i<j} \left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} \right) dx_i \wedge dx_j. \quad (2.76)$$

Für den Fall einer 1-Form $E = E_x dx + E_y dy + E_z dz$ im dreidimensionalen Raum E_3 hat man

$$dE = \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) dz \wedge dx. \quad \square \quad (2.77)$$

Die äußere Ableitung lässt sich in sehr anschaulicher Weise deuten (siehe später). Sie hat die charakteristische Eigenschaft **“Zweimal d gibt Null”**, was im vorliegenden Kontext Folgendes bedeutet.

Fakt. Die äußere Ableitung einer exakten 1-Form $\alpha = df$ verschwindet:

$$d\alpha = d(df) = \sum_{i<j} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \right) dx_i \wedge dx_j = 0. \quad (2.78)$$

Beweis. Nach obiger Formel folgt die Aussage sofort aus der **Schwarz'schen Regel**

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right).$$

Letztere ist eine unmittelbare Konsequenz der Definition von partieller Ableitung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) (p) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} (p + s e_i) - \frac{\partial f}{\partial x_j} (p) \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(p + s e_i + t e_j) - f(p + s e_i) - f(p + t e_j) + f(p)) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (p). \quad \square \end{aligned}$$

Man verwendet auch die kürzere Schreibweise

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}. \quad (2.79)$$

2.7.2 Rotation eines Vektorfeldes

Die Rotation ist ein Differenzialoperator, den es nur im E_3 gibt. Sie überführt Vektorfelder in Vektorfelder und zwar auf die folgende Weise:

$$\text{rot} : \text{Vektorfeld} \xrightarrow{\mathcal{I}_1} \text{1-Form} \xrightarrow{d} \text{2-Form} \xrightarrow{\mathcal{I}_2^{-1}} \text{Vektorfeld}. \quad (2.80)$$

Wir wandeln also das Vektorfeld v in die 1-Form $\mathcal{I}_1(v)$ um, wenden dann die äußere Ableitung d an, und konvertieren schließlich $d\mathcal{I}_1(v)$ in ein Vektorfeld mittels \mathcal{I}_2^{-1} . In Kurzform:

$$\text{rot} = \mathcal{I}_2^{-1} \circ d \circ \mathcal{I}_1. \quad (2.81)$$

Aus dieser Definition folgt für die Rotation in kartesischen Koordinaten x, y, z die Formel

$$\begin{aligned} \text{rot } v &= \text{rot}(v_x \partial_x + v_y \partial_y + v_z \partial_z) = (\mathcal{I}_2^{-1} \circ d)(v_x dx + v_y dy + v_z dz) \\ &= \mathcal{I}_2^{-1} \left(\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) dz \wedge dx \right) \\ &= \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \partial_z + \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \partial_x + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \partial_y. \end{aligned}$$

Bemerkung 1. Die äußere Ableitung wirkt in allen Koordinatensystemen gleich. Die Formel für die Rotation gilt hingegen nur für kartesische Koordinaten! (In nicht-kartesischen Koordinaten ist die Wirkung von \mathcal{I}_1 und \mathcal{I}_2 komplizierter.)

Bemerkung 2. Genau gesagt bildet die Rotation polare und axiale Vektorfelder auf axiale bzw. polare Vektorfelder ab. Der Wechsel im Transformationsverhalten rührt daher, dass der Isomorphismus \mathcal{I}_2 das Spatprodukt (und somit die Rechte-Hand-Regel) benützt. \square

Aus der Regel $(d \circ d) f = 0$ folgt mit $\text{grad} = \mathcal{I}_1^{-1} \circ d$ und $\text{rot} = \mathcal{I}_2^{-1} \circ d \circ \mathcal{I}_1$ die Regel

$$\text{rot grad } f = (\mathcal{I}_2^{-1} \circ d \circ \mathcal{I}_1) \circ (\mathcal{I}_1^{-1} \circ d) f = (\mathcal{I}_2^{-1} \circ d \circ d) f = 0. \quad (2.82)$$

Rotation in Zylinderkoordinaten. In Zylinderkoordinaten ρ, φ, z sei ein Vektorfeld

$$\vec{A} = A_\rho \hat{e}_\rho + A_\varphi \hat{e}_\varphi + A_z \hat{e}_z$$

gegeben. Wir berechnen $\text{rot} \vec{A}$. Im ersten Schritt ermitteln wir die entsprechende 1-Form:

$$\mathcal{I}_1(\vec{A}) = A_\rho d\rho + A_\varphi \rho d\varphi + A_z dz.$$

Im zweiten Schritt bilden wir die äußere Ableitung:

$$\begin{aligned} d\mathcal{I}_1(\vec{A}) &= \left(\frac{\partial}{\partial \rho}(A_\varphi \rho) - \frac{\partial}{\partial \varphi} A_\rho \right) d\rho \wedge d\varphi \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} A_z - \frac{\partial}{\partial z}(A_\varphi \rho) \right) d\varphi \wedge dz + \left(\frac{\partial}{\partial z} A_\rho - \frac{\partial}{\partial \rho} A_z \right) dz \wedge d\rho. \end{aligned}$$

Im dritten Schritt wenden wir \mathcal{I}_2^{-1} an:

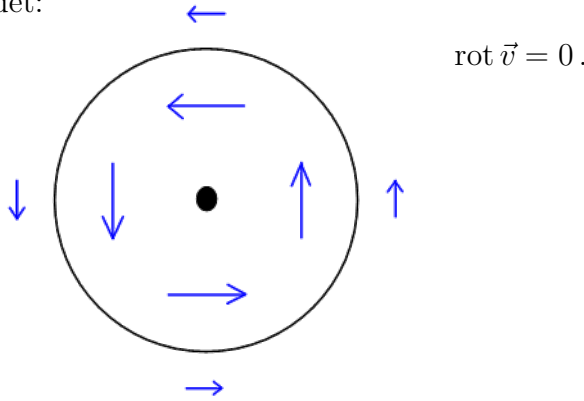
$$\text{rot} \vec{A} = \mathcal{I}_2^{-1} d\mathcal{I}_1(\vec{A}) = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\varphi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right) \hat{e}_z$$

$$+ \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \hat{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \hat{e}_\varphi.$$

Beispiel. Es sei $\vec{A} \equiv \vec{v}$ die Strömungsgeschwindigkeit einer suprafluiden Quantenflüssigkeit (z.B. ^4He bei Temperaturen $T < 2\text{K}$) mit einem Wirbel längs der z -Achse:

$$\vec{v} = \frac{\kappa}{\rho} \hat{e}_\varphi.$$

(κ ist ein dimensionsbehafteter Parameter.) Die Supraflüssigkeit zirkuliert hier also um die z -Achse, und die Strömungsgeschwindigkeit fällt wie der inverse Abstand von der z -Achse ab. Wir haben $v_\rho = v_z = 0$ und $v_\varphi = 1/\rho$. Mit der obigen Formel für die Rotation in Zylinderkoordinaten sieht man, dass $\text{rot } \vec{v}$ (die sogenannte Vortizität der Quantenflüssigkeit) außerhalb der z -Achse verschwindet:



Rotation in Kugelkoordinaten. Wir berechnen den Ausdruck für die Rotation eines Vektorfeldes \vec{A} in Kugelkoordinaten r, θ, ϕ :

$$\vec{A} = A_r \hat{e}_r + A_\theta \hat{e}_\theta + A_\phi \hat{e}_\phi.$$

Erster Schritt:

$$\mathcal{I}_1(\vec{A}) = A_r dr + A_\theta r d\theta + A_\phi r \sin \theta d\phi.$$

Zweiter Schritt:

$$\begin{aligned} d\mathcal{I}_1(\vec{A}) &= \left(\frac{\partial}{\partial r}(A_\theta r) - \frac{\partial}{\partial \theta} A_r \right) dr \wedge d\theta \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\phi r \sin \theta) - \frac{\partial}{\partial \phi}(A_\theta r) \right) d\theta \wedge d\phi + \left(\frac{\partial}{\partial \phi} A_r - \frac{\partial}{\partial r}(A_\phi r \sin \theta) \right) d\phi \wedge dr. \end{aligned}$$

Dritter Schritt:

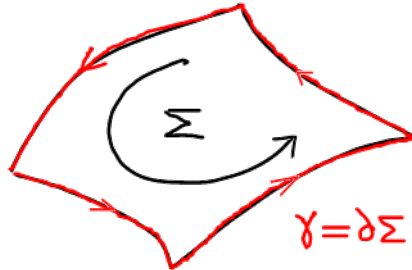
$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{A} &= \mathcal{I}_2^{-1} d\mathcal{I}_1(\vec{A}) = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r}(r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \hat{e}_\phi \\ &+ \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin \theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r A_\phi) \right) \hat{e}_\theta. \end{aligned}$$

Demnach haben wir

$$\begin{aligned} (\text{rot } \vec{A})_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} + \frac{\cot \theta}{r} A_\phi - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}, \\ (\text{rot } \vec{A})_\theta &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial r} - \frac{A_\phi}{r}, \\ (\text{rot } \vec{A})_\phi &= \frac{\partial A_\theta}{\partial r} + \frac{A_\theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

2.7.3 Satz von Stokes

In einem affinen Raum $(X, V, +)$ sei $\omega : X \rightarrow V^*$ eine differenzierbare 1-Form und $\Sigma \subset X$ eine orientierte Fläche. Die Fläche Σ wird durch eine Linie berandet, die wir mit $\gamma \equiv \partial\Sigma$ bezeichnen. Wir nennen die Operation der Randbildung, $\partial : \text{Fläche} \rightarrow \text{Randlinie}$, den **Randoperator**. Das nächste Bild illustriert, wie der Randoperator aus der Orientierung der Fläche Σ eine Orientierung der Randlinie $\gamma = \partial\Sigma$ (also einen Durchlaufsinne von γ) bestimmt.



Satz von Stokes:

$$\int_{\Sigma} d\omega = \int_{\partial\Sigma} \omega. \quad (2.83)$$

Korollar. Sei $X = E_3$, $V = \mathbb{R}^3$. Für ein Vektorfeld \vec{v} auf E_3 sei $\omega := \mathcal{I}_1(\vec{v})$ die zugeordnete 1-Form. Mit der Formel $\text{rot} = \mathcal{I}_2^{-1} \circ d \circ \mathcal{I}_1$ folgt dann

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \text{rot } \vec{v} \cdot d^2\vec{n} &= \int_{\Sigma} (\mathcal{I}_2^{-1} \circ d \circ \mathcal{I}_1)(\vec{v}) \cdot d^2\vec{n} \\ &= \int_{\Sigma} \mathcal{I}_2^{-1}(d\omega) \cdot d^2\vec{n} = \int_{\Sigma} d\omega = \int_{\partial\Sigma} \omega = \int_{\gamma} \mathcal{I}_1(\vec{v}) = \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{r}, \end{aligned}$$

d.h. das Integral der Rotation von \vec{v} über die Fläche Σ ist gleich dem Wegintegral von \vec{v} längs der geschlossenen Randkurve $\partial\Sigma = \gamma$.

Bemerkung. In die Formulierung des Integralsatzes

$$\int_{\Sigma} \text{rot } \vec{v} \cdot d^2\vec{n} = \int_{\gamma} \vec{v} \cdot d\vec{r} \quad (\text{Satz von Stokes für Vektorfelder}) \quad (2.84)$$

geht an mehreren Stellen Längen- und Winkelmessung ein. Allerdings ist dies ein Fall von **“Viel Lärm um Nichts”!** Die fundamentale Gleichheit $\int_{\Sigma} d\omega = \int_{\partial\Sigma} \omega$ zeigt, dass die Aussage des Satzes im Grunde von der Metrik (d.h. Längen- und Winkelmessung) komplett unabhängig ist.

Beispiel. Die elektrische Feldstärke E ist eine (im allgemeinen nicht-exakte) 1-Form. Das Wegintegral $\int_{\gamma} E$ von E längs einer geschlossenen Kurve γ heißt die elektrische **Ringspannung** längs γ . Das Faraday’sche **Induktionsgesetz** besagt

$$dE = -\dot{B}, \quad (2.85)$$

wobei \dot{B} die Zeitableitung der magnetischen Feldstärke B bezeichnet. Durch Integration über eine Fläche Σ mit Rand $\partial\Sigma = \gamma$ erhält man mit dem Satz von Stokes

$$\int_{\gamma} E = \int_{\Sigma} dE = - \int_{\Sigma} \dot{B} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} B. \quad (2.86)$$

Die elektrische Ringspannung $\int_{\gamma} E$ längs $\gamma = \partial\Sigma$ ist also gleich dem Negativen der zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses $\int_{\Sigma} B$ durch Σ . Das Induktionsgesetz lässt sich auch in der Sprache der **Vektorfelder** $\vec{E} := \mathcal{I}_1^{-1}(E)$ und $\vec{B} = \mathcal{I}_2^{-1}(B)$ ausdrücken. Es lautet dann

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} && \text{(differenzielle Form),} \\ \int_{\partial\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{r} &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d^2\vec{n} && \text{(Integralform).} \end{aligned}$$

Interpretation. Die Vektorfeld-Version des Satzes von Stokes im E_3 gestattet eine Deutung der Rotation. Hierzu betrachten wir z.B. eine zur xy -Ebene parallele Kreisscheibe $D_{p,\varepsilon}^{(xy)}$ mit Mittelpunkt $p \in E_3$ und Radius $\varepsilon > 0$. Für ein langsam veränderliches Vektorfeld \vec{v} , dessen Rotation $\vec{u} := \operatorname{rot} \vec{v}$ auf $D_{p,\varepsilon}^{(xy)}$ annähernd konstant ist, haben wir näherungsweise

$$\int_{D_{p,\varepsilon}^{(xy)}} \vec{u} \cdot d^2\vec{n} \approx u_z(p) \int_{D_{p,\varepsilon}^{(xy)}} \partial_z \cdot d^2\vec{n} = \pi\varepsilon^2 u_z(p).$$

Ist $S_{p,\varepsilon}^{(xy)} := \partial D_{p,\varepsilon}^{(xy)}$ die die Kreisscheibe berandende Kreislinie, so gilt nach Stokes $\int_{D_{p,\varepsilon}^{(xy)}} \operatorname{rot} \vec{v} \cdot d^2\vec{n} = \int_{S_{p,\varepsilon}^{(xy)}} \vec{v} \cdot d\vec{r}$. Damit können wir die Rotation als **Grenzwert** ausdrücken:

$$(\operatorname{rot} \vec{v})_z(p) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\pi\varepsilon^2)^{-1} \int_{S_{p,\varepsilon}^{(xy)}} \vec{v} \cdot d\vec{r}. \quad (2.87)$$

Anstelle der Familie von Kreislinien $S_{p,\varepsilon}^{(xy)}$ können wir genauso gut jede andere Familie von Flächen benutzen, die zur xy -Ebene parallel sind und gegen den Punkt p schrumpfen. Hierzu ist lediglich die Kreisfläche $\pi\varepsilon^2$ durch den gegen Null konvergierenden Flächeninhalt der Familie zu ersetzen. Außerdem sollte klar sein, wie man die Prozedur zu adaptieren hat, um zu entsprechenden Ausdrücken für die x - und y -Komponenten von $\operatorname{rot} \vec{v}$ zu gelangen.

Mitteilung. Jedes differenzierbare Vektorfeld $v : E_3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ hat eine eindeutige Zerlegung der Form

$$v = \operatorname{grad} f + \operatorname{rot} u. \quad (2.88)$$

(Natürlich ist die Funktion f nur bis auf Konstanten und das Vektorfeld u nur bis auf Gradienten eindeutig.) Der erste Summand dieser sogenannten **Hodge-Zerlegung** heißt der **Gradientenanteil** von v , der zweite der **Wirbelanteil** von v . Wegen $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$ oder $\oint \operatorname{grad} f \cdot d\vec{r} = 0$ (Hauptsatz!) misst die Rotation genau den Wirbelanteil des Vektorfeldes.

Hinweis. Um eine gute Intuition für den Differenzialoperator der Rotation zu entwickeln, bedarf es einer gewissen Übung. Z.B. hatten wir im Beispiel von Abschnitt 2.7.2 das außerhalb der z -Achse erklärte Vektorfeld

$$v = \frac{x \partial_y - y \partial_x}{x^2 + y^2} \quad (2.89)$$

betrachtet (wir verwenden wieder kartesische Koordinaten x, y, z), dessen Rotation verschwindet, obwohl es zeichnerisch wie ein Wirbelfeld aussieht. (Die Wirbel verstecken sich hier gewissermaßen auf der z -Achse $x = y = 0$.) Leichter ist es, ein intuitives Verständnis der äußeren Ableitung zu entwickeln; siehe dazu den späteren Abschnitt 2.9.2.

2.7.4 Beweis des Satzes von Stokes

Wir arbeiten wieder in einem affinen Raum $(X, V, +)$ und beginnen mit zwei **Vorbereitungen**. Zum ersten benötigen wir eine koordinatenfreie Darstellung der äußeren Ableitung. Für $\omega = \sum f_i dx_i$ definierten wir $d\omega = \sum df_i \wedge dx_i$ (siehe Abschnitt 2.7.1). Um die Koordinaten x_i aus dieser Definition zu beseitigen, machen wir die folgende Rechnung:

$$(d\omega)_p(u, v) = \left(\sum_i df_i \wedge dx_i \right)_p(u, v) = \sum_i \left((df_i)_p(u) (dx_i)_p(v) - (df_i)_p(v) (dx_i)_p(u) \right).$$

Jetzt verwenden wir die Definition von df_i und die Konstanz von $(dx_i)_p = \vartheta_i = (dx_i)_{p+tv}$:

$$\begin{aligned} (d\omega)_p(u, v) &= \sum_i \frac{d}{dt} \left(f_i(p+tu) (dx_i)_{p+tu}(v) - f_i(p+tv) (dx_i)_{p+tv}(u) \right) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\omega_{p+tu}(v) - \omega_{p+tv}(u) \right) \Big|_{t=0}. \end{aligned}$$

Nun gilt aber

$$\frac{d}{dt} \omega_{p+tv} \Big|_{t=0} = (D_p \omega)(v), \quad (2.90)$$

wobei $D_p \omega$ das Differenzial (siehe Abschnitt 2.1) der Abbildung $\omega : X \rightarrow V^*$ im Punkt p ist. Somit erhält man für die äußere Ableitung die **Formel**

$$(d\omega)_p(u, v) = ((D_p \omega)(u))(v) - ((D_p \omega)(v))(u). \quad (2.91)$$

Die äußere Ableitung auf 1-Formen ist also eine anti-symmetrisierte Version des Differenzials.

Wir kommen zur **zweiten Vorbereitung**. Sei dazu γ das Geradenstück zwischen dem Anfangspunkt p und dem Endpunkt q , also $\gamma(t) = p + t(q-p)$ mit $0 \leq t \leq 1$. Dann haben wir für das Wegintegral der 1-Form α längs γ den Ausdruck

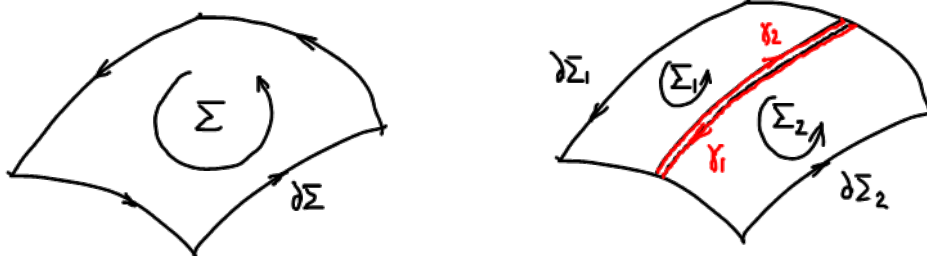
$$\int_\gamma \alpha = \int_0^1 \alpha_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt = \int_0^1 \alpha_{p+t(q-p)}(q-p) dt. \quad (2.92)$$

Weiter sei Δ das orientierte Dreieck mit den Eckpunkten p, q, r , in dieser Reihenfolge. Wählen wir für Δ die Parametrisierung $\sigma(s, t) = p + s(q-p) + t(r-p)$ (mit $0 \leq s+t \leq 1$), so ergibt sich für das Flächenintegral der 2-Form β über Δ der Ausdruck

$$\int_\Delta \beta = \int_0^1 \left(\int_0^{1-s} \beta_{p+s(q-p)+t(r-p)}(q-p, r-p) dt \right) ds. \quad (2.93)$$



Wir beginnen jetzt mit dem **Beweis** des Satzes von Stokes. Zur Vereinfachung machen wir eine Reduktion: wir teilen die Fläche Σ in zwei Hälften, Σ_1 und Σ_2 :

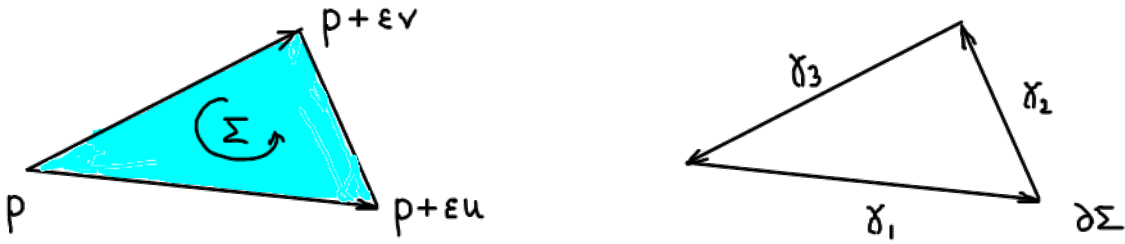


Es gilt dann $\int_\Sigma d\omega = \int_{\Sigma_1} d\omega + \int_{\Sigma_2} d\omega$ und $\int_{\partial\Sigma} \omega = \int_{\partial\Sigma_1} \omega + \int_{\partial\Sigma_2} \omega$. In die zweite Beziehung geht ein, dass die Beiträge von dem durch Teilung entstandenen zusätzlichen Rand sich genau auslöschen:

$$\int_{\gamma_1} \omega = - \int_{\gamma_2} \omega. \quad (2.94)$$

Man sieht jetzt, dass der Satz von Stokes für die Fläche Σ gilt, wenn er für beide Teilflächen Σ_1 und Σ_2 gilt. Durch Iteration der Prozedur des Teilens gelangt man zu immer kleineren Flächen. Es reicht deshalb letztendlich aus, den Satz von Stokes für “infinitesimale” Flächen zu zeigen.

Sei also Σ das Dreieck mit den Eckpunkten $p, p + \varepsilon u, p + \varepsilon v$ (und ε klein).



Wir berechnen zunächst das **Wegintegral** von ω längs des Randes $\partial\Sigma$:

$$\int_{\partial\Sigma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega + \int_{\gamma_3} \omega = \int_0^\varepsilon \left(\omega_{p+\varepsilon u-tu}(u) + \omega_{p+\varepsilon v-tv}(-v) + \omega_{p+\varepsilon u+t(v-u)}(v-u) \right) dt.$$

Hierbei benutzen wir die Relation $\int_0^\varepsilon f(t) dt = \int_0^\varepsilon f(\varepsilon - t) dt$. Jetzt verwenden wir die Linearität $\lambda(v-u) = \lambda(v) - \lambda(u)$ und fassen die Terme geeignet zusammen:

$$\int_{\partial\Sigma} \omega = \int_0^\varepsilon \left((\omega_{p+\varepsilon u-tu} - \omega_{p+\varepsilon u-tv+tu})(u) + (\omega_{p+\varepsilon v-tv+tu} - \omega_{p+\varepsilon v-tv})(v) \right) dt.$$

Der dritte Term stammt von $\int_0^\varepsilon \omega_{p+\varepsilon v-tv+tu}(v) dt = \int_0^\varepsilon \omega_{p+\varepsilon u+t(v-u)}(v) dt$. Die auftretenden Differenzen lassen sich in erster Näherung (für kleine ε) durch die Differenziale der als Abbildung $\omega : X \rightarrow V^*$ aufgefassten 1-Form ω ersetzen:

$$\omega_{p+\varepsilon u-tu} - \omega_{p+\varepsilon u-tv+tu} \approx -(D_{p+\varepsilon u-tu} \omega)(tv) \approx -(D_p \omega)(tv),$$

und analog für die zweite Differenz. Es folgt

$$\int_{\partial\Sigma} \omega \approx \left(\int_0^\varepsilon t dt \right) \left(-((D_p \omega)(v))(u) + ((D_p \omega)(u))(v) \right) = \frac{\varepsilon^2}{2} (d\omega)_p(u, v).$$

Mit der gleichen Genauigkeit berechnen wir auch das **Flächenintegral**:

$$\int_{\Sigma} d\omega = \int_0^\varepsilon \left(\int_0^{\varepsilon-s} (d\omega)_{p+su+tv}(u, v) \right) ds \approx (d\omega)_p(u, v) \int_0^\varepsilon \left(\int_0^{\varepsilon-s} dt \right) ds = \frac{\varepsilon^2}{2} (d\omega)_p(u, v).$$

In erster Näherung bekommen wir also das gleiche Ergebnis.

Die bei den Näherungen gemachten Fehler sind für differenzierbares ω hinreichend klein, um den gewünschten Schluss (nämlich die Gültigkeit des Satzes von Stokes) ziehen zu können. \square

Mitteilung. Der Satz von Stokes lässt sich auch direkt exakt (d.h. ohne Näherungen im Integral zu machen) beweisen, indem man Wegintegral und Flächenintegral parametrisiert und Ketten- und Produktregel geschickt ausnützt. Ein hilfreicher Begriff ist dabei die Operation des Zurückziehens (engl. “pullback”) von Differentialformen, der uns hier aber noch nicht zur Verfügung steht.

2.8 Divergenz

Nachdem wir die Differentialoperatoren des Gradienten und der Rotation kennengelernt haben, verbleibt uns die Aufgabe, den Differentialoperator der Divergenz einzuführen. Wir werden dies in einer Weise tun, die auch gleich die passenden Integranden für Volumenintegrale, nämlich 3-Formen, zur Verfügung stellt.

2.8.1 Volumenintegral einer 3-Form

Wir erinnern daran (Abschnitt 1.15), dass $\text{Alt}^3(V)$ den Vektorraum der alternierenden 3-linearen Formen auf V bezeichnet.

Definition. Eine 3-Form ω auf einem affinen Raum $(X, V, +)$ ist eine differenzierbare Abbildung

$$\omega : X \rightarrow \text{Alt}^3(V), \quad (2.95)$$

also eine räumlich veränderliche alternierende 3-lineare Form.

Definition. Sei $U \subset X$ ein dreidimensionales Gebiet. Eine Orientierung von U ist eine (stetige) Regel, die für jeden Punkt $p \in U$ zu entscheiden gestattet, ob ein Tripel von linear unabhängigen und zu U in p tangentialen Vektoren u, v, w ein positives (\cong "rechtshändiges") oder negatives (\cong "linkshändiges") System bildet. Rechnerisch festlegen lässt sich die Orientierung durch eine stetige, nirgendwo verschwindende 3-Form Ω :

$$\begin{aligned} \Omega_p(u, v, w) > 0 &\Leftrightarrow u, v, w \text{ positives System,} \\ \Omega_p(u, v, w) < 0 &\Leftrightarrow u, v, w \text{ negatives System.} \end{aligned}$$

Definition. Das Integral $\int_U \omega$ der 3-Form ω über ein orientiertes dreidimensionales Quadergebiet $U \subset X$ wird folgendermaßen erklärt. Sei

$$h : [0, 1]^3 \rightarrow X, \quad (r, s, t) \mapsto h(r, s, t), \quad (2.96)$$

eine orientierungstreue Parametrisierung von U , d.h. die Tangentialvektoren $\frac{\partial h}{\partial r}, \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t}$ bilden in jedem Punkt von U ein positives System. Dann definiert man

$$\int_U \omega = \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \omega_{h(r,s,t)} \left(\frac{\partial h}{\partial r}(r, s, t), \frac{\partial h}{\partial s}(r, s, t), \frac{\partial h}{\partial t}(r, s, t) \right) dt \right) ds \right) dr. \quad (2.97)$$

Mitteilung. Auch diese Definition ist reparametrisierungsinvariant.

Beispiel. Sei $X = E_3$ der dreidimensionale Euklidische Raum mit kartesischen Koordinaten x, y, z . Wir wollen die 3-Form $\omega = (x^2 + y^2 + z^2) dx \wedge dy \wedge dz$ über die (rechtshändig orientierte) Kugel K mit Radius R und Mittelpunkt im Koordinatenursprung o integrieren. Dazu wählen wir die Parametrisierung

$$h(r, s, t) = o + Rr \cos(\pi s) e_z + Rr \sin(\pi s) (\cos(2\pi t) e_x + \sin(2\pi t) e_y)$$

und berechnen die Tangentialvektoren:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial r}(r, s, t) &= R \cos(\pi s) e_z + R \sin(\pi s) (\cos(2\pi t) e_x + \sin(2\pi t) e_y), \\ \frac{\partial h}{\partial s}(r, s, t) &= -\pi R r \sin(\pi s) e_z + \pi R r \cos(\pi s) (\cos(2\pi t) e_x + \sin(2\pi t) e_y), \\ \frac{\partial h}{\partial t}(r, s, t) &= 2\pi R r \sin(\pi s) (-\sin(2\pi t) e_x + \cos(2\pi t) e_y). \end{aligned}$$

Man verifiziert leicht, dass $\frac{\partial h}{\partial r}, \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t}$ ein rechtshändiges System bilden. Einsetzen dieser Vektoren in die 3-Form ergibt

$$\omega_{h(r,s,t)} \left(\frac{\partial h}{\partial r}(r,s,t), \frac{\partial h}{\partial s}(r,s,t), \frac{\partial h}{\partial t}(r,s,t) \right) = 2\pi^2 R^5 r^4 \sin(\pi s),$$

und es folgt

$$\int_K \omega = 2\pi^2 R^5 \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 r^4 \sin(\pi s) dt \right) ds \right) dr = \frac{4\pi}{5} R^5.$$

2.8.2 Äußere Ableitung einer 2-Form

In einem affinen Raum $(X, V, +)$ mit affinen Koordinaten x_1, x_2, \dots, x_n hat jede 2-Form β eine **Koordinatendarstellung**

$$\beta = \sum_{i < j} f_{ij} dx_i \wedge dx_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j} f_{ij} dx_i \wedge dx_j. \quad (2.98)$$

Gemäß der alternierenden Eigenschaft $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ treffen wir für die Koeffizientenfunktionen die Konvention $f_{ij} = -f_{ji}$.

Definition. Die **äußere Ableitung** einer 2-Form $\beta = \sum_{i < j} f_{ij} dx_i \wedge dx_j$ ist die 3-Form

$$d\beta = \sum_{i < j} df_{ij} \wedge dx_i \wedge dx_j. \quad (2.99)$$

(Das äußere Produkt ist bekanntlich assoziativ.)

Bemerkung. Unter Verwendung der Koordinatendarstellung der Differenziale df_{ij} lässt sich die äußere Ableitung $d\beta$ auch folgendermaßen schreiben:

$$d\beta = \sum_{i < j < k} \left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial f_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial f_{ki}}{\partial x_j} \right) dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k. \quad (2.100)$$

Beispiel. Es ist ein Naturgesetz, dass die äußere Ableitung der 2-Form B der magnetischen Feldstärke immer verschwindet: **$dB = 0$** . Im E_3 mit kartesischen Koordinaten,

$$B = B_{xy} dx \wedge dy + B_{yz} dy \wedge dz + B_{zx} dz \wedge dx,$$

lautet dieses Gesetz wie folgt:

$$dB = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial B_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial B_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial B_{zx}}{\partial y} = 0. \quad (2.101)$$

Fakt. (“Zweimal d gibt Null.”) Unter einer exakten 2-Form β versteht man per Definition die äußere Ableitung einer 1-Form, also $\beta = d\alpha$. Kurze Rechnung zeigt, dass die äußere Ableitung einer exakten 2-Form identisch verschwindet:

$$d\beta = d(d\alpha) = 0. \quad \square \quad (2.102)$$

Für eine 2-Form β bezeichnen wir mit $D\beta$ das Differenzial der Abbildung $\beta : X \rightarrow \text{Alt}^2(V)$.

Aufgabe. Zeige, dass die äußere Ableitung $d\beta$ die folgende (koordinatenfreie) Darstellung hat:

$$(d\beta)_p(u, v, w) = ((D_p \beta)(u))(v, w) - ((D_p \beta)(v))(u, w) + ((D_p \beta)(w))(u, v). \quad (2.103)$$

2.8.3 Divergenz eines Vektorfeldes

Wir definieren jetzt die Divergenz eines Vektorfeldes im Euklidischen Raum E_3 . (Unsere Definition trifft den Kern der Sache nicht ganz, ist aber für jetzige Zwecke gut genug.)

Der Vektorraum $\text{Alt}^3(\mathbb{R}^3)$ ist eindimensional, d.h. alle alternierenden 3-linearen Formen im \mathbb{R}^3 sind proportional zum Spatprodukt Ω . Multiplikation mit dem (“hungrigen”) Spatprodukt ergibt einen **Isomorphismus**

$$\mathcal{I}_3 : \mathbb{R} \rightarrow \text{Alt}^3(\mathbb{R}^3), \quad a \mapsto a\Omega. \quad (2.104)$$

Anders gesagt haben wir $\rho = \mathcal{I}_3^{-1}(\rho)\Omega$ für $\rho \in \text{Alt}^3(\mathbb{R}^3)$. Punktweise Anwendung liefert einen Isomorphismus

$$\mathcal{I}_3 : \text{Funktionen} \rightarrow 3\text{-Formen}. \quad (2.105)$$

Für den späteren Gebrauch halten wir fest, dass für eine Funktion f und eine 3-Form ω gilt:

$$\mathcal{I}_3^{-1}(f\omega) = f\mathcal{I}_3^{-1}(\omega). \quad (2.106)$$

In kartesischen Koordinaten x, y, z hat man zudem

$$\mathcal{I}_3(1) = dx \wedge dy \wedge dz, \quad \mathcal{I}_3^{-1}(dx \wedge dy \wedge dz) = 1. \quad (2.107)$$

Unter Zuhilfenahme des aus Abschnitt 1.16 bekannten Isomorphismus \mathcal{I}_2 definieren wir jetzt die Divergenz wie folgt.

Definition. Als Differenzialoperator 1. Ordnung, der Vektorfelder in Funktionen überführt, ist die **Divergenz** (im E_3) folgendermaßen erklärt:

$$\text{div} : \text{Vektorfelder} \xrightarrow{\mathcal{I}_2} 2\text{-Formen} \xrightarrow{d} 3\text{-Formen} \xrightarrow{\mathcal{I}_3^{-1}} \text{Funktionen}, \quad (2.108)$$

also $\text{div} = \mathcal{I}_3^{-1} \circ d \circ \mathcal{I}_2$.

Divergenz in kartesischen Koordinaten. Für ein Vektorfeld $v = v_x\partial_x + v_y\partial_y + v_z\partial_z$ in kartesischen Koordinaten erhält man durch kurze Rechnung

$$\begin{aligned} \text{div}(v) &= (\mathcal{I}_3^{-1} \circ d \circ \mathcal{I}_2)(v_x\partial_x + v_y\partial_y + v_z\partial_z) \\ &= (\mathcal{I}_3^{-1} \circ d)(v_x dy \wedge dz + v_y dz \wedge dx + v_z dx \wedge dy) \\ &= \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \mathcal{I}_3^{-1}(dx \wedge dy \wedge dz), \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Identität (2.106) verwendet wurde. Mit $\mathcal{I}_3^{-1}(dx \wedge dy \wedge dz) = 1$ resultiert der **Ausdruck**

$$\text{div}(v) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (2.109)$$

Bemerkung. Anders als die Rotation hängt die Divergenz von der Rechte-Hand-Regel nicht ab. Tatsächlich wird die Rechte-Hand-Regel in unserer Definition $\text{div} = \mathcal{I}_3^{-1} \circ d \circ \mathcal{I}_2$ zweimal verwendet (nämlich über das Spatprodukt jeweils einmal in \mathcal{I}_2 und \mathcal{I}_3^{-1}) und somit am Ende gar nicht.

Divergenz in Kugelkoordinaten. Wir beginnen mit dem Ausdruck für ein Vektorfeld v in Kugelkoordinaten:

$$v = v_r \widehat{e}_r + v_\theta \widehat{e}_\theta + v_\phi \widehat{e}_\phi.$$

Um \mathcal{I}_2 anzuwenden, benützen wir, dass die drei 1-Formen dr , $r d\theta$ und $r \sin \theta d\phi$ ein rechtshändiges Orthonormalsystem bilden. Es folgt $\mathcal{I}_2(dr) = r d\theta \wedge r \sin \theta d\phi$ usw. und somit

$$\mathcal{I}_2(v) = v_r r d\theta \wedge r \sin \theta d\phi + v_\theta r \sin \theta d\phi \wedge dr + v_\phi dr \wedge r d\theta.$$

Im nächsten Schritt wird einfach nur differenziert:

$$\begin{aligned} d\mathcal{I}_2(v) &= \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \sin \theta v_r) dr \wedge d\theta \wedge d\phi \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \theta}(r \sin \theta v_\theta) d\theta \wedge d\phi \wedge dr + \frac{\partial}{\partial \phi}(r v_\phi) d\phi \wedge dr \wedge d\theta. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wenden wir das Inverse von \mathcal{I}_3 an. Mit der Formel $\mathcal{I}_3^{-1}(dr \wedge d\theta \wedge d\phi) = (r^2 \sin \theta)^{-1}$ resultiert

$$\operatorname{div}(v) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}. \quad (2.110)$$

Mitteilung. Für beliebige Koordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 mit Volumenform $dx \wedge dy \wedge dz = f d\xi_1 \wedge d\xi_2 \wedge d\xi_3$ hat man für die Divergenz von $v = \sum v_{\xi_j} \partial_{\xi_j}$ den Ausdruck

$$\operatorname{div}(v) = \frac{1}{f} \sum_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}(f v_{\xi_j}). \quad (2.111)$$

Von diesem Ergebnis liest man ab, dass die Divergenz allein von der Wahl der **Volumenform** bestimmt wird und von sonst nichts. \square

Wir kennen bereits die Relation $\operatorname{rot} \circ \operatorname{grad} = 0$ auf Funktionen. Eine eng verwandte Aussage ist die folgende.

Merke. Als Konsequenz von ‘‘Zweimal d ist Null’’ (auf 1-Formen) hat man

$$\operatorname{div} \circ \operatorname{rot} = (\mathcal{I}_3^{-1} \circ d \circ \mathcal{I}_2)(\mathcal{I}_2^{-1} \circ d \circ \mathcal{I}_1) = \mathcal{I}_3^{-1} \circ d \circ d \circ \mathcal{I}_1 = 0. \quad (2.112)$$

Die Hintereinanderausführung der Differenzialoperatoren von Rotation und Divergenz ergibt also immer Null:

$$\operatorname{div} \circ \operatorname{rot} = 0. \quad (2.113)$$

2.8.4 Satz von Gauss

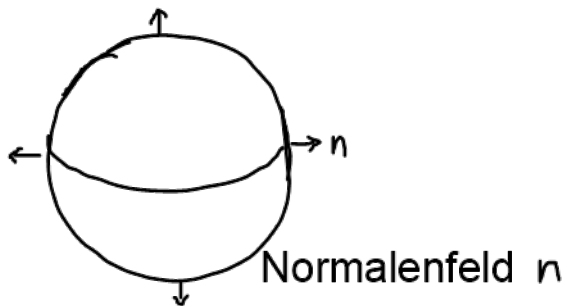
In Abschn. 2.8.1 wurde erklärt, was unter der Orientierung eines dreidimensionalen Gebiets $U \subset X$ zu verstehen ist. Für die jetzt anstehende Aussage benötigen wir zusätzlich ein Verständnis, wie die Orientierung von U eine Orientierung auf dem zweidimensionalen Rand ∂U bestimmt.

Definition. Sei das dreidimensionale Gebiet $U \subset X$ durch die 3-Form Ω orientiert. Ist u ein Vektorfeld, das überall auf dem Rand von U von innen nach außen zeigt (bzgl. U), so wird der Rand ∂U durch die 2-Form $\omega = \Omega(u, \cdot, \cdot)$ orientiert, d.h. für $p \in \partial U$ gilt

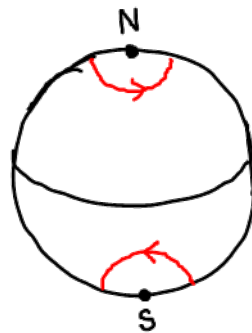
$$\begin{aligned} \omega_p(v, w) = \Omega(u(p), v, w) &> 0 \Leftrightarrow v, w \text{ positives System,} \\ &< 0 \Leftrightarrow v, w \text{ negatives System.} \end{aligned}$$

Beispiel.

Kugel $U=K$ orientiert durch $\Omega = dx \wedge dy \wedge dz$.



Kugeloberfläche $\partial U = \partial K$ orientiert durch $\omega = \Omega(n, \cdot, \cdot)$:



$$\begin{aligned} \omega_N &= (dx \wedge dy)_N \\ &= \vartheta_x \wedge \vartheta_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_S &= -(dx \wedge dy)_S \\ &= +\vartheta_y \wedge \vartheta_x \end{aligned}$$

Satz. Für einen affinen Raum $(X, V, +)$ sei $\beta : X \rightarrow \text{Alt}^2(V)$ eine differenzierbare 2-Form und $U \subset X$ ein orientiertes dreidimensionales Gebiet mit Rand ∂U . Dann gilt

$$\int_U d\beta = \int_{\partial U} \beta. \quad (2.114)$$

Bemerkung. Man beachte die Ähnlichkeit (mit der Ersetzung $U \leftrightarrow \Sigma$) zum Integralsatz von Abschnitt 2.7.3. Tatsächlich sind beide Integralsätze Spezialfälle des sogenannten **Allgemeinen Stokes'schen Satzes**,

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega, \quad (2.115)$$

für eine k -Form ω auf einer Mannigfaltigkeit M der Dimension $k + 1$. Der Beweis des obigen Satzes ist nicht wesentlich verschieden von dem in Abschnitt 2.7.4 (und entfällt daher).

Korollar (Satz von Gauss). Sei v ein Vektorfeld im dreidimensionalen Euklidischen Raum E_3 , und sei ∂U der Rand eines Gebiets U . Dann ist das Oberflächenintegral von v über ∂U gleich dem Volumenintegral der Divergenz von v über U :

$$\int_{\partial U} \vec{v} \cdot d^2\vec{n} = \int_U \text{div}(v) dx \wedge dy \wedge dz. \quad (2.116)$$

Beweis. Durch Anwendung des obigen Satzes auf $\beta = \mathcal{I}_2(v)$ erhalten wir

$$\int_{\partial U} \vec{v} \cdot d^2\vec{n} = \int_{\partial U} \mathcal{I}_2(v) = \int_U d\mathcal{I}_2(v) = \int_U (\mathcal{I}_3 \circ (\mathcal{I}_3^{-1} d\mathcal{I}_2))(v).$$

Der Satz von Gauss folgt dann mit $(\mathcal{I}_3^{-1} d\mathcal{I}_2)(v) = \text{div}(v)$ und $\mathcal{I}_3(1) = dx \wedge dy \wedge dz$.

2.9 Visualisierung

2.9.1 1 Raumdimension

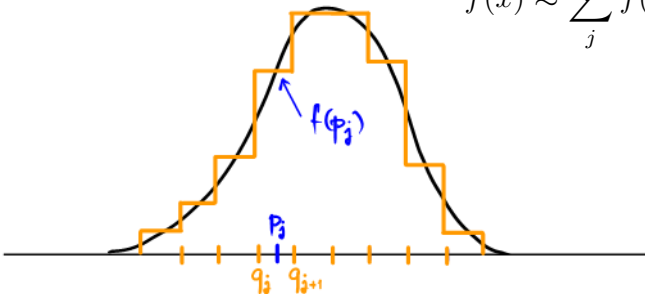
Wie schon mehrfach angedeutet wurde, veranschaulichen wir k -Formen in n Raumdimensionen durch $(n - k)$ -dimensionale Objekte. Zur anschaulichen Vorbereitung des Satzes von Stokes (Abschnitt 2.7.3) führen wir jetzt das zugrunde liegende Approximationsprinzip am Beispiel der Raumdimension $n = 1$ ein. In dieser einfachen Situation sind nur $k = 0$ und $k = 1$ zu betrachten (nämlich Funktionen bzw. 1-Formen). Wir beginnen mit dem Fall $k = 0$.

Treppenfunktionen und 0-Ketten. Als erstes berechnen wir die Approximation einer reellwertigen Funktion $f(x)$ durch eine Treppenfunktion. Dazu benötigen wir den Begriff der **charakteristischen Funktion** χ eines Intervalls $[a, b]$:

$$\chi_{[a,b]}(x) := \begin{cases} 1 & a < x < b, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.117)$$

Nun wählen wir einen ersten Satz von Stützstellen $q_j \in \mathbb{R}$ mit $q_j < q_{j+1}$ für $j \in \{0, \dots, N\}$. (In der Praxis ängt die optimale Wahl von der zu approximierenden Funktion ab.) Einen zweiten Satz von **Stützstellen** $p_j \in \mathbb{R}$ erklären wir dann dadurch, dass wir p_j jeweils gleich dem Mittelpunkt des Intervalls $[q_j, q_{j+1}]$ setzen. In einer solchen Diskretisierung von \mathbb{R} können wir eine Funktion f (mit beschränktem Träger und beschränkter Variation) durch eine **Treppenfunktion** approximieren:

$$f(x) \approx \sum_j f(p_j) \chi_{[q_j, q_{j+1}]}(x). \quad (2.118)$$



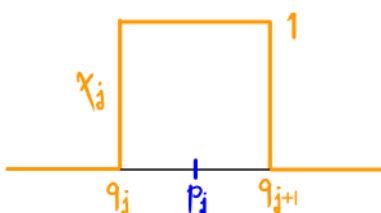
Mit den Abkürzungen

$$f_j \equiv f(p_j), \quad \chi_j \equiv \chi_{[q_j, q_{j+1}]} \quad (2.119)$$

haben wir die vereinfachte Schreibweise

$$f \approx \sum f_j \chi_j. \quad (2.120)$$

Wie wir aus Beispiel 3 von Abschnitt 1.2 wissen, bilden die reellwertigen Funktionen mit der Operation der punktweisen Addition einen Vektorraum. Diese Vektorraumstruktur bleibt bei der Einschränkung auf Treppenfunktionen erhalten (jedenfalls für eine feste Wahl der Sprungstellen q_j). Wir bezeichnen den Vektorraum der Treppenfunktionen $\sum f_j \chi_j$ mit C^0 . Im vorliegenden Fall gilt $\dim C^0 = N$. Per Konstruktion haben wir (mit dem Kronecker δ -Symbol δ_{ij})



$$\chi_i(p_j) = \delta_{ij}. \quad (2.121)$$

Es ist nun zweckmäßig und fruchtbar, die Auswertung einer Treppenfunktion auf einem Punkt als eine Art von (linearer) Paarung zu betrachten. Anders gesagt deuten wir die Punkte p_j als Basis“vektoren” eines zweiten Vektorraums, $C_0 \equiv (C^0)^*$, der zum Vektorraum C^0 der Treppenfunktionen dual ist. Die Addition und Skalarmultiplikation in C_0 wird folgendermaßen definiert:

$$f\left(\sum \lambda_j p_j\right) := \sum_j \lambda_j f(p_j) \quad (\lambda_j \in \mathbb{R}). \quad (2.122)$$

Die Elemente $c = \sum_j \lambda_j p_j$ (mit reellen Koeffizienten λ_j) von C_0 heißen **0-Ketten**. Insgesamt haben wir also eine **Paarung** $C^0 \times C_0 \rightarrow \mathbb{R}$ von Treppenfunktionen $f \in C^0$ mit 0-Ketten $c \in C_0$:

$$f(c) = \left(\sum_i f_i \chi_i\right) \left(\sum_j \lambda_j p_j\right) = \sum_{i,j} f_i \lambda_j \chi_i(p_j) = \sum_j f_j \lambda_j. \quad (2.123)$$

Treppenformen und 1-Ketten. Als nächstes besprechen wir die Approximation einer 1-Form $\mu : \mathbb{R} \supset M \rightarrow \mathbb{R}^*$ (mit beschränktem Träger M) durch eine Treppenform. Im vorliegenden Kontext (mit Koordinatenform dx) verstehen wir unter einer **Treppenform** einen Ausdruck

$$\sum_j m_j \chi_{[p_{j-1}, p_j]} dx \quad (m_j \in \mathbb{R}). \quad (2.124)$$

Es handelt sich also um eine Linearkombination der lokal konstanten 1-Formen $\chi_{[p_{j-1}, p_j]} dx$, mit reellen Koeffizienten m_j . Den Vektorraum solcher Treppenformen bezeichnen wir mit C^1 .

Auch hier ist es zweckmäßig, einen passenden Dualraum $C_1 \equiv (C^1)^*$ einzuführen. Dieser heißt der Vektorraum der **1-Ketten** und wird durch die Basis-Intervalle

$$\gamma_j := [p_{j-1}, p_j] \quad (2.125)$$

aufgespannt. Die Paarung $C^1 \times C_1 \rightarrow \mathbb{R}$ erfolgt durch das Integral. Auf der Ebene der Basisvektoren $\chi_{[p_{j-1}, p_j]} dx \in C^1$ und $\gamma_i \in C_1$ haben wir

$$\int_{\gamma_i} \chi_{[p_{j-1}, p_j]}(x) dx = \delta_{ij} \Delta_j, \quad \Delta_j = p_j - p_{j-1}. \quad (2.126)$$

Die Addition und Skalarmultiplikation in C_1 erklären wir nach dem gleichen Prinzip wie für C_0 :

$$\mu\left(\sum_j r_j \gamma_j\right) \equiv \int_{\sum r_j \gamma_j} \mu := \sum_j r_j \int_{\gamma_j} \mu. \quad (2.127)$$

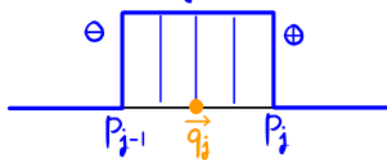
Nun nehmen wir die folgende **Identifikation** (!) vor:

$$q_j \equiv \Delta_j^{-1} \chi_{[p_{j-1}, p_j]} dx; \quad (2.128)$$

wir verwenden also das Symbol des Punktes q_j für die im Integral auf Eins normierte Treppenform $\Delta_j^{-1} \chi_{[p_{j-1}, p_j]} dx$. (Das ist deshalb möglich, weil die Rolle der Stützpunkte allein von den p_j getragen wird und wir die q_j nicht länger in ihrer Rolle als Punkte benötigen.) Man vermerke die Kronecker- δ -Paarung

$$q_i(\gamma_j) \equiv \int_{\gamma_j} q_i = \frac{1}{\Delta_i} \int_{\gamma_j} \chi_{[p_{i-1}, p_i]}(x) dx = \delta_{ij}. \quad (2.129)$$

Der allgemeine Ausdruck dieser Paarung $C^1 \times C_1 \rightarrow \mathbb{R}$ ist

$$\left(\sum_i m_i q_i \right) \left(\sum_j r_j \gamma_j \right) = \sum_{i,j} m_i r_j q_i(\gamma_j) = \sum_j m_j r_j. \quad (2.130)$$


Es sei noch darauf hingewiesen, dass wir den Punkt q_j genau genommen mit einer **äußeren Orientierung** (durch Pfeil oder Polarität) ausstatten müssen, um die gerichtete 1-Form $\Delta_j^{-1}[p_{j-1}, p_j] dx$ präzise nachzubilden.

Nach diesen Vorbereitungen approximieren wir eine vorgegebene 1-Form $\mu = f(x) dx$ durch eine Treppenform in C^1 :

$$\mu \approx \sum_j m_j q_j = \sum_j \frac{m_j}{\Delta_j} \chi_{[p_{j-1}, p_j]} dx, \quad m_j = \int_{\gamma_j} \mu. \quad (2.131)$$

In Worten: wir ersetzen μ durch die lokal konstante 1-Form $\sum_j m_j q_j$ – dabei wählen wir die Koeffizienten m_j so, dass für jedes Basis-Intervall $\gamma_i = [p_{i-1}, p_i]$ das Integral $m_i = \int_{\gamma_i} \sum_j m_j q_j$ der approximierenden Treppenform mit dem Integral $\int_{\gamma_i} \mu$ der Ausgangsform übereinstimmt.

Differenzial. Unsere Treppenfunktionen $f \in C^0$ sind nicht stetig und schon gar nicht differenzierbar. Andererseits wollen wir (mit Blick auf den angekündigten Satz von Stokes) eine Beziehung zwischen Integral und Differenzial herstellen. Der gegenwärtige Kontext wirft daher die Frage auf, was mit dem **(diskretisierten) Differenzial** $d : C^0 \rightarrow C^1$ gemeint sein soll.

Die richtige Antwort auf diese Frage leitet sich aus dem bekannten Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung ab:

$$\int_a^b df = f(b) - f(a),$$

der natürlich in unserem Approximationsschema von Treppenformen und Ketten weiterhin gelten soll. Dazu machen wir mit der 0-Kette $c = \sum r_j \gamma_j$ die folgende Umformung:

$$\int_c df = \sum_j r_j \int_{p_{j-1}}^{p_j} df = \sum_j r_j (f(p_j) - f(p_{j-1})). \quad (2.132)$$

Für eine sprunghafte Funktion $f = \chi_i$ ergibt die linke Seite keinen Sinn (jedenfalls nicht a priori), die rechte Seite aber sehr wohl. Deshalb definieren wir

$$\int_c d\chi_i := \sum_j r_j (\chi_i(p_j) - \chi_i(p_{j-1})) \quad (2.133)$$

und erhalten mit $\chi_i(p_j) = \delta_{ij}$ den Wert

$$\int_c d\chi_i = r_i - r_{i+1}. \quad (2.134)$$

Nun wissen auch, dass gilt

$$\int_c q_i = \sum_j \frac{r_j}{\Delta_j} \int_{p_{j-1}}^{p_j} \chi_{[p_{j-1}, p_j]} dx = r_i. \quad (2.135)$$

Durch Vergleich folgt

$$d\chi_i = q_i - q_{i+1}. \quad (2.136)$$

Für das Differenzial einer allgemeinen Treppenfunktion haben wir damit

$$d \sum_j f_j \chi_j = \sum_j (f_j - f_{j-1}) q_j. \quad (2.137)$$

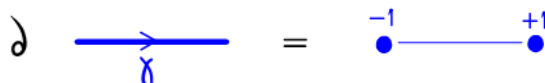
Randoperator und Hauptsatz. Für eine konzise Notation und Buchführung brauchen wir noch eine lineare Abbildung zwischen 1-Ketten und 0-Ketten, den sogenannten **Randoperator**:

$$\partial : C_1 \rightarrow C_0. \quad (2.138)$$

Er ist definiert durch

$$\partial \sum_j r_j \gamma_j = \sum_j r_j \partial \gamma_j, \quad \partial \gamma_j = -p_{j-1} + p_j. \quad (2.139)$$

Der Rand der elementaren 1-Kette $\gamma_j = [p_{j-1}, p_j]$ ist also die 0-Kette $\partial \gamma_j$, die aus dem Endpunkt p_j mit dem positiven Vorzeichen und dem Anfangspunkt p_{j-1} mit dem negativen Vorzeichen besteht.



Vermöge dieses Randoperators ∂ lässt sich der Hauptsatz (2.132) auch wie folgt formulieren:

$$\int_c df = f \left(\sum_j r_j (p_j - p_{j-1}) \right) = f(\partial c). \quad (2.140)$$

Um herauszustreichen, dass auf beiden Seiten der gleiche Typ von Paarung $C^k \times C_k \rightarrow \mathbb{R}$ ($k = 0, 1$) vorliegt, schreiben wir diesen Hauptsatz auch in der Form

$$(df)(c) \equiv \int_c df = \int_{\partial c} f \equiv f(\partial c). \quad (2.141)$$

Resümée. Uns sind zwei lineare Abbildungen gegeben: der Randoperator $\partial : C_1 \rightarrow C_0$ und das Differenzial $d : C^0 \rightarrow C^1$. Der Hauptsatz (“Integrieren ist die Umkehrung von Differenzieren”) besagt, dass die eine Abbildung die Transponierte der anderen ist.

$$\begin{array}{ccc} C^0 & \xrightarrow{d} & C^1 \\ \times & & \times \\ C_0 & \xleftarrow{\partial} & C_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R} & & \mathbb{R} \end{array} \quad (2.142)$$

Graphische Illustration. Im Grunde ist der Vektorraum C^k einfach nur der Dualraum zum Vektorraum C_k mittels der (Integral-)Paarung $C^k \times C_k \rightarrow \mathbb{R}$. Zum Zweck der anschaulichen Darstellung setzen wir aber noch einen Trick oben drauf: wir stellen uns die Elemente von C^1 als 0-Ketten und jene von C^0 als 1-Ketten vor! Tatsächlich gehört jede charakteristische Funktion χ_j zu genau einem Intervall (oder Linienstück) $[q_j, q_{j+1}]$, und so können wir jede Treppenfunktion

$f = \sum_j f_j \chi_j$ als 1-Kette von Linienstücken χ_j mit “Stärken” (oder “Gewichten” oder “Massen”) f_j auffassen. Analog gehört jede elementare Treppenform $\Delta_j^{-1} \chi_{[p_{j-1}, p_j]} dx$ zu genau einem Punkt q_j – davon haben wir schon in (2.128) Gebrauch gemacht. So können wir jede Treppenform $\mu = \sum_j m_j q_j$ als 0-Kette von Punkten q_j mit Stärken/Gewichten/Massen m_j auffassen.

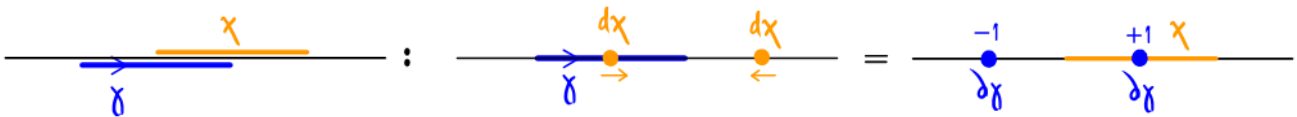


Integral als Schnittpaarung. In unserem diskreten Bild (von k -Formen als $(n - k)$ -Ketten) nimmt die Integralpaarung

$$C^k \times C_k \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\omega, c) \mapsto \int_c \omega,$$

die Form einer “Schnittpaarung” an. Im Fall von $k = 0$ “schneiden” wir die 0-Kette $\sum_j r_j p_j$ mit der 1-Kette $\sum_i f_i \chi_i$, siehe Gleichung (2.123). Die elementare Schnittpaarung ist hierbei $\chi_i(p_j) = \delta_{ij}$; sie verschwindet, wenn das Linienstück χ_i den Punkt p_j nicht schneidet; und sie ist gleich Eins, wenn p_j im Linienstück χ_i enthalten ist (also ein Schnittpunkt vorliegt). Im Fall von $k = 1$ schneiden wir die 1-Kette $\sum_j r_j \gamma_j$ mit der 0-Kette $\sum_i m_i q_i$, siehe Gleichung (2.130). Die elementare Schnittpaarung ist nun $q_i(\gamma_j) = \delta_{ij}$; sie verschwindet, wenn der Punkt q_i das Linienstück γ_j nicht schneidet; und sie ist gleich Eins, wenn q_i in γ_j enthalten ist.

Mit dieser Vorstellung von Schnittpaarung nimmt der Hauptsatz eine intuitiv verständliche Bedeutung an, die in der nächsten Graphik illustriert ist.



Die linke Graphik stellt die eindimensionalen Akteure vor: eine gerichtete Linie γ und ein (ungerichtetes) Linienstück χ . Die mittlere Graphik illustriert die Situation auf der linken Seite ($\int_\gamma d\chi$) des Hauptsatzes. Das Differenzial $d\chi$ besteht aus zwei gerichteten Punkten – die jeweilige Richtung liest man aus Gleichung (2.136) ab (es ist immer die Richtung der Zunahme von χ). Das Integral $\int_\gamma d\chi$ ist von Null verschieden, da die Linie γ einen Punkt von $d\chi$ kreuzt (oder schneidet). Es hat den Wert $+1$ (anstatt -1), weil die Richtung von γ mit der Richtung des gekreuzten Punkts übereinstimmt. Die rechte Graphik illustriert die Situation auf der rechten Seite ($\int_{\partial\gamma} \chi$) des Hauptsatzes. Der durch Paarung ermittelte Wert ist wieder Eins, da ein Punkt von $\partial\gamma$ mit Gewicht $+1$ im Linienstück χ enthalten ist.

Man erkennt somit, dass der Hauptsatz einen topologischen Sachverhalt wiedergibt: wenn (in 1 Raumdimension) ein Intervall einen Randpunkt eines anderen Intervalls enthält, dann gilt dasselbe mit vertauschten Rollen der beiden Intervalle. Um zur Gleichheit $\int_\gamma d\chi = \int_{\partial\gamma} \chi$ zu gelangen, reicht eine korrekte Buchführung (über die Orientierungs- oder Richtungsverhältnisse).

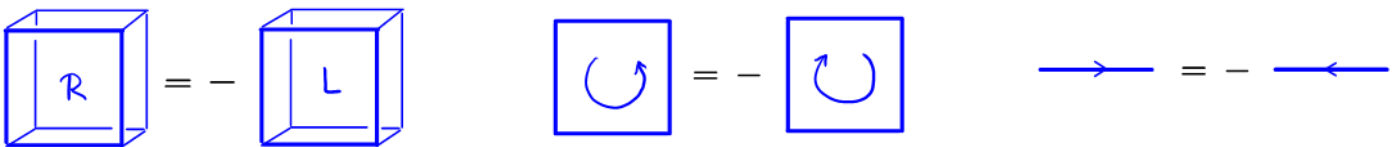
Hinweis. Man beachte die Ähnlichkeit zwischen Differenzial d und Randoperator ∂ in diesem Bild. Hierauf werden wir später noch genauer eingehen.

2.9.2 3 Raumdimensionen

Nach ausführlicher Behandlung des eindimensionalen Falles gehen wir jetzt zu 3 Raumdimensionen über. (Der Fall von 2 Raumdimensionen wird in den Übungen behandelt.) Wie zuvor ist die Grundlage der diskreten Approximation eine fest gewählte Aufteilung des Raumes in Zellen (vormals Intervallen). Die Raumaufteilung lässt sich auf vielerlei Weise bewerkstelligen – mit Quadern, Tetraedern (oder Simplizes), Polytopen, usw. Der Einfachheit halber benützen wir hier ein kubisches Gitter (tatsächlich zwei zueinander duale kubische Gitter).

k -Ketten und Randoperator. Wir stellen uns vor, dass der dreidimensionale Raum (oder der für eine physikalische Anwendung relevante Teil davon) in identische Würfel eingeteilt ist. Diese Würfel heißen auch die 3-Zellen des kubischen Gitters. Die quadratischen Seitenflächen der Würfel sind die 2-Zellen, die Kanten die 1-Zellen, und die Eckpunkte die 0-Zellen. Das Gesamtkonstrukt dieses kubischen Gitters nennen wir K (wie **Komplex**).

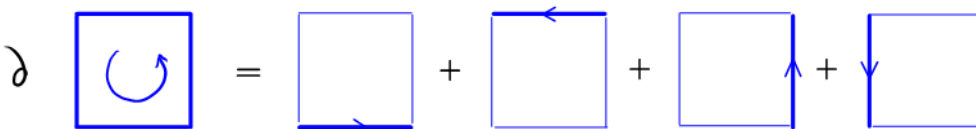
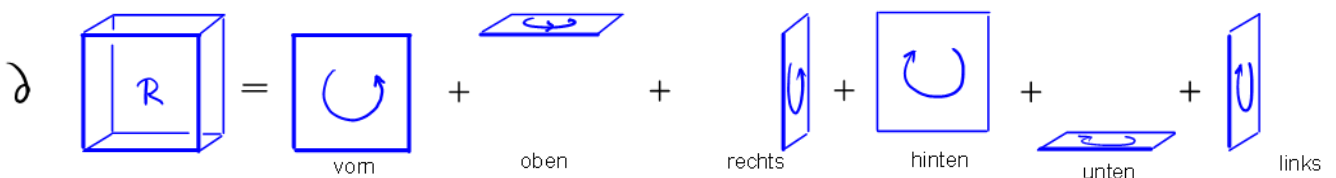
Wie schon erläutert, verstehen wir unter einer k -Kette eine formale Linearkombination (mit reellen Koeffizienten) von k -Zellen. Der Vektorraum der k -Ketten auf K wird mit $C_k(K)$ bezeichnet. Die Basiselemente von $C_3(K)$, $C_2(K)$, $C_1(K)$ und $C_0(K)$ sind also die elementaren Würfel, Quadrate, Linienstücke bzw. Punkte. Für die genaue Buchführung (insbesondere die nachfolgende Basisdarstellung des Randoperators) statten wir jede k -Zelle mit einer **inneren Orientierung** aus. (Die innere Orientierung von Punkten entfällt.)



Der **Randoperator** ∂ ist eine lineare Abbildung, die k -Ketten auf $(k - 1)$ -Ketten abbildet:

$$C_3(K) \xrightarrow{\partial} C_2(K) \xrightarrow{\partial} C_1(K) \xrightarrow{\partial} C_0(K). \quad (2.143)$$

Es gilt $\partial \circ \partial = 0$ ("der Rand vom Rand ist Null"). Als lineare Abbildung ist der Randoperator ∂ vollständig durch seine Wirkung auf die Basiselemente charakterisiert. Diese Wirkung sieht graphisch wie folgt aus:



k -Formen und äußere Ableitung. Die k -Ketten auf dem Komplex K liefern uns die Integrationswege, -flächen und -gebiete. Wir wenden uns jetzt den Integranden, den k -Formen, zu. Zu ihrer diskreten Approximation führen wir einen zweiten, zu K passenden Komplex \tilde{K} ein. Im vorliegenden Fall ist \tilde{K} wieder ein kubischer Komplex. Die 0-Zellen von \tilde{K} liegen in den Mittelpunkten der 3-Zellen von K , die 1-Zellen von \tilde{K} werden von den 2-Zellen von K mittig geteilt, usw. (diese Beziehung zwischen K und \tilde{K} ist umseitig graphisch illustriert).

$$\begin{aligned}
 C^3(\tilde{K}) : & \quad \overset{\mathcal{R}}{\bullet} = - \overset{\mathcal{L}}{\bullet} & C^2(\tilde{K}) : & \quad \text{---} \curvearrowright \text{---} = - \text{---} \curvearrowleft \text{---} \\
 C^1(\tilde{K}) : & \quad \text{---} \uparrow \text{---} = - \text{---} \downarrow \text{---} \\
 C^0(\tilde{K}) : & \quad \text{---} \text{---} \text{---} & \chi = & \begin{cases} 1 & \text{innen,} \\ 0 & \text{außen.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

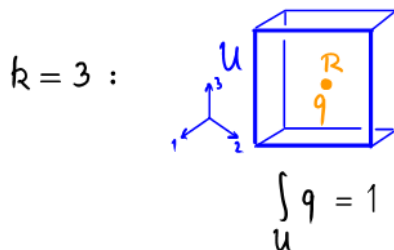
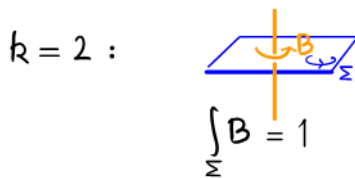
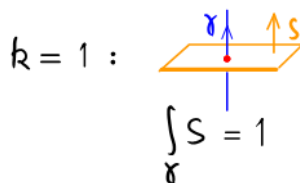
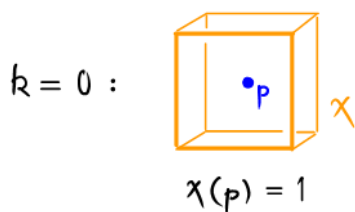
Im Folgenden betrachten wir den Vektorraum der $(3 - k)$ -Ketten mit äußerer Orientierung auf \tilde{K} . (Die äußere Orientierung von 3-Zellen entfällt.) Dieser wird mit $C^k(\tilde{K})$ bezeichnet. Die diskretisierte äußere Ableitung d (engl.: coboundary operator) ist eine lineare Abbildung

$$C^0(\tilde{K}) \xrightarrow{d} C^1(\tilde{K}) \xrightarrow{d} C^2(\tilde{K}) \xrightarrow{d} C_3(\tilde{K}). \tag{2.144}$$

Es gilt $d \circ d = 0$ ("Zweimal d ist Null"). Aufgrund der Linearität reicht es wieder, die äußere Ableitung auf den Basiselementen anzugeben. Die Wirkung auf die Basis ist wie folgt:

$$\begin{aligned}
 d \text{---} \text{---} \text{---} &= \text{---} \nearrow \text{---} + \text{---} \downarrow \text{---} + \text{---} \leftarrow \text{---} + \text{---} \searrow \text{---} + \text{---} \uparrow \text{---} + \text{---} \rightarrow \text{---} \\
 &\quad \text{vorn} \qquad \text{oben} \qquad \text{rechts} \qquad \text{hinten} \qquad \text{unten} \qquad \text{links} \\
 d \text{---} \curvearrowright \text{---} &= \text{---} \curvearrowleft \text{---} + \text{---} \curvearrowright \text{---} + \text{---} \curvearrowleft \text{---} + \text{---} \curvearrowright \text{---} \\
 d \text{---} \curvearrowleft \text{---} &= \text{---} \bullet \overset{\mathcal{L}}{\text{---}} + \overset{\mathcal{R}}{\bullet} \text{---}
 \end{aligned}$$

Integral als Schnittpaarung. Die beiden zueinander passenden Komplexe K und \tilde{K} sind so konstruiert, dass die Schnittmenge einer k -Zelle von K mit einer $(3 - k)$ -Zelle von \tilde{K} entweder die Nullmenge ist oder aus einem gemeinsamen Punkt besteht. Im letzteren Fall wird dem Schnittpunkt durch Orientierungsvergleich der Wert ± 1 zugewiesen. Auf diese Weise (und durch lineare Fortsetzung) entsteht die Schnittpaarung $\int : C^k(\tilde{K}) \times C_k(K) \rightarrow \mathbb{R}$ für $k = 0, 1, 2, 3$. Diese Paarung spielt die Rolle des Integrals.

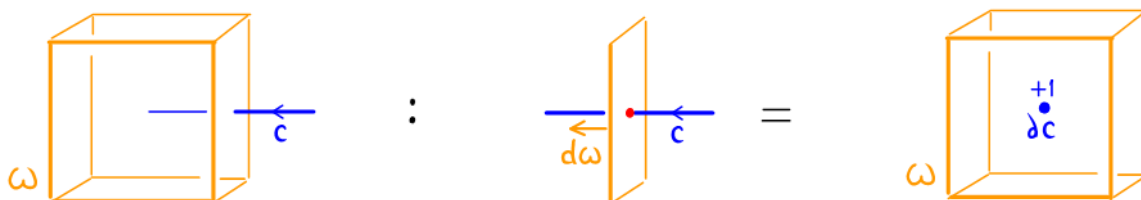


Allgemeiner Satz von Stokes. Für eine differenzierbare k -Form ω und eine $(k+1)$ -Kette c gilt der Allgemeine Stokes'sche Satz,

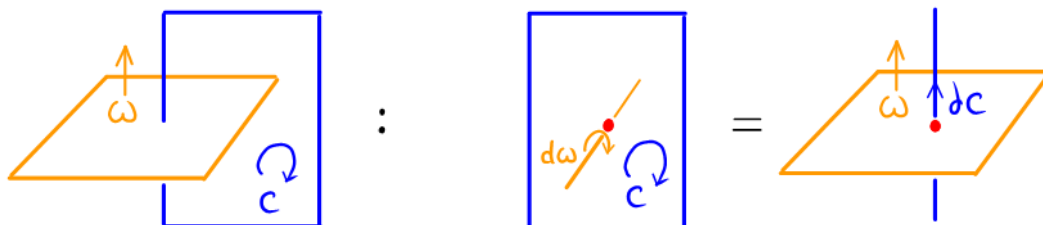
$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega. \quad (2.145)$$

Er heißt ausführlich der Satz von **Newton-Leibniz-Gauss-Green-Ostrogradskii-Stokes-Poincaré**. Unser diskretes Approximationsschema ist so konstruiert, dass der Allgemeine Stokes'sche Satz mit dem als Schnittpaarung verstandenen Integral seine Gültigkeit behält. Der Beweis des Satzes erfordert in unserer diskreten Situation lediglich die Inspektion einiger elementarer Fälle:

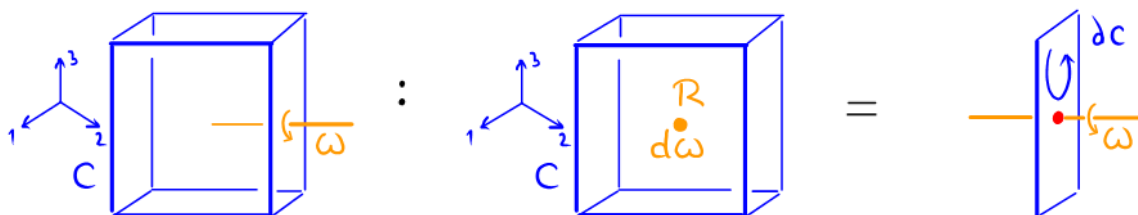
- $k = 0$ ($\omega \in C^0(\tilde{K})$, $c \in C_1(K)$; "Hauptsatz"):



- $k = 1$ ($\omega \in C^1(\tilde{K})$, $c \in C_2(K)$; Satz von Stokes im engeren Sinn):



- $k = 2$ ($\omega \in C^2(\tilde{K})$, $c \in C_3(K)$; Satz von Gauss):



2.10 Formen vom ungeraden Typ

Motivation. Das Bild \curvearrowright “stimmt” für die Linienstücke der magnetischen Feldstärke B . Nicht so für einige andere 2-Formen der physikalischen dreidimensionalen Welt! (Mit 2-Formen meinen wir hier Größen, die über Flächen zu integrieren sind.) Für die sogenannten “Stromdichten” (von Masse, Energie, Ladung, usw.) “stimmt” das andere Bild: \uparrow ; dabei gibt das Linienstück den Stromverlauf und der Pfeil die Stromrichtung an.

Fazit. Die bislang eingeführten mathematischen Objekte taugen für manche, aber nicht für alle physikalischen Zwecke, und wir benötigen noch eine Erweiterung des Kalküls.

2.10.1 Innere und äußere Orientierung

Wir haben zwei unterschiedliche Typen von Linien oder Linienstücken kennengelernt: (i) Zum Zweck der Integration von 1-Formen verwenden wir Linien mit Richtungssinn. (ii) Zum Zweck der anschaulichen Modellierung von 2-Formen (im E_3) benützen wir Linienstücke mit Zirkulationssinn. Im ersten Fall spricht man von einer Linie mit innerer Orientierung, im zweiten Fall von einem Linienstück mit äußerer Orientierung.

Die gleiche Unterscheidung zwischen innerer und äußerer Orientierung trifft man für Punkte, Flächen und Gebiete. Eine Fläche Σ , die als Integrationsfläche für eine 2-Form dient, trägt wie wir wissen einen Zirkulationssinn; das nennt man in diesem Fall eine innere Orientierung. Die Flächenstücke einer 1-Form im E_3 , z.B. der elektrischen Feldstärke E , tragen eine Durchstoßrichtung oder Polarität; hier spricht man wieder von äußerer Orientierung.

Im Fall von Punkten (minimale Dimension) und dreidimensionalen Gebieten (maximale Dimension im E_3) ist die Sprechweise ähnlich, wenn auch mit einer kleinen Ausnahmeregelung. Ein Punkt mit Händigkeit ist ein Punkt mit äußerer Orientierung, und ein 3-dimensionales Gebiet mit Händigkeit ist ein Gebiet mit innerer Orientierung. Hingegen ist unter einem Punkt mit innerer Orientierung per Definition ein Punkt ohne jede Orientierung zu verstehen. Ebenso ist ein Gebiet (maximaler Dimension, also $d = 3$ im E_3) mit äußerer Orientierung ein Gebiet ohne jede Orientierung.

Ganz allgemein ist Orientierung ein binärer Begriff, d.h. die Wahl einer Orientierung ist immer eine Wahl zwischen zwei Möglichkeiten. Der Pfeil auf einer Linie mit innerer Orientierung zeigt entweder in der einen Richtung oder in der anderen Richtung; der Zirkulationssinn einer Linie mit äußerer Orientierung ist entweder gleich dem Uhrzeigersinn oder gleich dem Gegenuhrzeigersinn; ein geordnetes System $\{e_1, e_2, e_3\}$ von linear unabhängigen Vektoren bildet entweder ein rechtshändiges oder ein linkshändiges System. Eine dritte Möglichkeit gibt es nicht. So entspricht die Wahl einer Orientierung immer der Wahl eines Elements der Menge $\{\pm 1\}$.

Zum Zweck der Sprachökonomie vereinbaren wir die folgende Sprechweise: 0-Zelle für Punkt, 1-Zelle für (offene) Linie, 2-Zelle für Quadrat-Fläche, 3-Zelle für Quader-Gebiet. Ist c eine orientierte k -Zelle (mit innerer oder äußerer Orientierung), so vereinbaren wir die Konvention, dass $-c$ die gleiche k -Zelle mit der umgekehrten Orientierung ist. Wenn c zum Beispiel eine Linie mit

Richtungssinn ist, dann ist $-c$ die gleiche Linie mit dem umgekehrten Richtungssinn.

Die Entweder-Oder Eigenschaft von Orientierung spielt auch eine Rolle in einer **Konstruktion**, die Zellen mit innerer und äußerer Orientierung miteinander in Beziehung setzt. Sei $\tilde{\gamma}$ eine Linie mit äußerer Orientierung, und sei γ die gleiche Linie (als Punktmenge), aber mit einer inneren Orientierung. Dann bestimmt das Paar $\gamma, \tilde{\gamma}$ eine Orientierung (in diesem Fall eine Händigkeit) des umgebenden Raumes; das ist die Händigkeit der Hand, deren Finger sich gemäß des Zirkulationssinnes von $\tilde{\gamma}$ krümmen, wenn der Daumen in Richtung des Richtungssinnes von γ zeigt.

Per Annahme bilde das Paar $\gamma, \tilde{\gamma}$ jetzt eine rechte Hand. Diesen Sachverhalt drücken wir dann formelmäßig so aus:

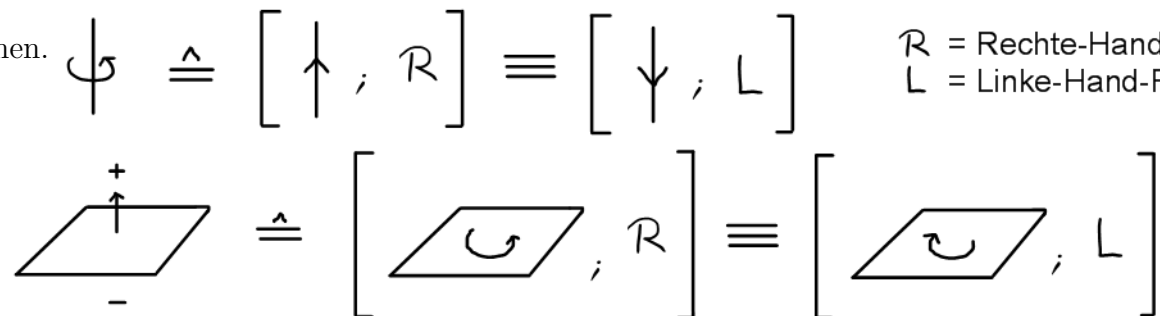
$$\tilde{\gamma} = [\gamma; \text{rechts}] \equiv [\gamma; R]. \quad (2.146)$$

Allerdings ist aus Sicht der Zelle $\tilde{\gamma}$ mit äußerer Orientierung der Richtungssinn von γ ein irrelevantes Stück von Information. Es gibt keinen guten Grund, warum wir γ und nicht $-\gamma$ benutzen sollen. Da das Paar $\gamma, \tilde{\gamma}$ eine rechte Hand darstellt, bildet das neue Paar $-\gamma, \tilde{\gamma}$ eine linke Hand. Nach dem gleichen Prinzip wie oben haben wir also

$$\tilde{\gamma} = [-\gamma; \text{links}] \equiv [-\gamma; L]. \quad (2.147)$$

Aus Gründen der Konsistenz müssen wir deshalb die **Identifikation**

$$[\gamma; R] \equiv [-\gamma; L] \quad (2.148)$$

vornehmen. 

Hier tritt nun die tiefere Bedeutung der eben eingeführten Notation zutage: ist c eine Zelle mit innerer Orientierung und $\text{Or} \in \{R, L\}$ eine Orientierung des Raumes, dann steht $[c; \text{Or}]$ für die **Äquivalenzklasse**, die aus dem Paar c, Or und dem Paar $-c, -\text{Or}$ besteht:

$$[c; \text{Or}] = [-c; -\text{Or}]. \quad (2.149)$$

Formal gesprochen wirkt die Gruppe $\mathbb{Z}_2 = \{+1, -1\}$ auf beide Glieder des Paares, und wir bilden Äquivalenzklassen, indem wir durch diese **Gruppenwirkung** teilen. Diese Operation der Bildung von Äquivalenzklassen ist distributiv bzgl. der Addition:

$$[c + c'; \text{Or}] = [c; \text{Or}] + [c'; \text{Or}], \quad (2.150)$$

und linear bzgl. der Skalarmultiplikation:

$$[\lambda c; \text{Or}] = \lambda [c; \text{Or}] \quad (\lambda \in \mathbb{R}). \quad (2.151)$$

2.10.2 Differenzialformen vom ungeraden Typ

Definition. Unter einer k -Form $\tilde{\omega}$ vom ungeraden Typ (kurz: einer ungeraden k -Form $\tilde{\omega}$) versteht man eine Äquivalenzklasse

$$\tilde{\omega} = [\omega; \text{Or}] \equiv [-\omega; -\text{Or}], \quad (2.152)$$

wobei $\omega : X \rightarrow \text{Alt}^k(V)$ eine k -Form und Or eine Orientierung des ambienten Vektorraums V ist. (Wie zuvor ist V der Differenzvektorraum des affinen Raums X .)

Bemerkung. Uns wird nur der Spezialfall $X = E_3$, $V = \mathbb{R}^3$ beschäftigen. In diesem Fall haben wir entweder $\text{Or} = R$ (Rechte-Hand-Regel) oder $\text{Or} = L$ (Linke-Hand-Regel), und wir vereinbaren die Konvention $-R = L$ und $-L = R$.

Definition. Eine ungerade 3-Form im E_3 heißt eine Dichte. (Allgemeiner spricht man bei ungeraden n -Formen im n -dimensionalen Raum von Dichten.) Eine ungerade 2-Form im E_3 heißt auch eine Stromdichte oder Flussdichte.

Die Operationen von äußerer Ableitung und äußerem Produkt übertragen sich in natürlicher Weise auf ungerade Formen. Im Fall der äußeren Ableitung definiert man

$$d[\omega; \text{Or}] := [d\omega; \text{Or}], \quad (2.153)$$

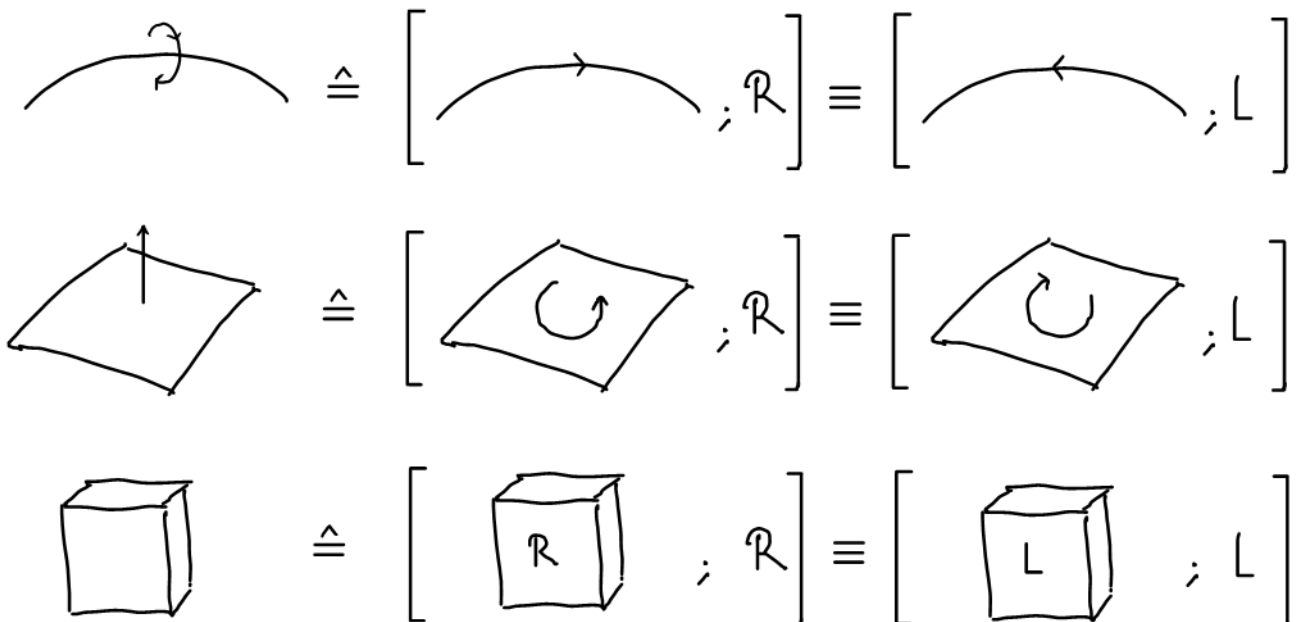
und im Fall des äußeren Produkts

$$\alpha \wedge [\beta; \text{Or}] := [\alpha \wedge \beta; \text{Or}], \quad [\alpha; \text{Or}] \wedge [\beta; \text{Or}] := \alpha \wedge \beta. \quad (2.154)$$

Mit $[\beta; -\text{Or}] = [-\beta; \text{Or}]$ folgt insbesondere $[\alpha; \text{Or}] \wedge [\beta; -\text{Or}] = -\alpha \wedge \beta$.

2.10.3 Integration ungerader Formen

Zum Zweck der sinnvollen Integration ungerader Formen müssen wir zuerst die Beschaffenheit der Integrationsmannigfaltigkeit (d.h. der Kurven, Flächen, Gebiete) entsprechend anpassen. Dies geschieht nach dem gleichen Prinzip wie oben:



Definition. Unter einem k -dimensionalen **Integrationsgebiet** ($k = 1$: Kurve, $k = 2$: Fläche, $k = 3$: Raumgebiet, usw.) **mit äußerer Orientierung** versteht man eine Äquivalenzklasse

$$\tilde{c} = [c; \text{Or}] \equiv [-c; -\text{Or}]. \quad (2.155)$$

Hierbei ist c ein k -dimensionales Integrationsgebiet mit innerer Orientierung (d.h. vom schon bekannten Typ) und Or eine Orientierung des ambienten Vektorraums.

Bemerkung. Für ein n -dimensionales Gebiet in n Dimensionen ist eine äußere Orientierung gleichbedeutend mit gar keiner Orientierung (siehe z.B. die letzte Skizze auf der vorigen Seite).

Definition. Wir erklären das **Integral** einer ungeraden k -Form $\tilde{\omega} = [\omega; \text{Or}]$ über ein k -dimensionales Integrationsgebiet $\tilde{c} = [c; \text{Or}]$ durch

$$\int_{\tilde{c}} \tilde{\omega} = \int_{[c; \text{Or}]} [\omega; \text{Or}] := \int_c \omega. \quad (2.156)$$

Wir beseitigen also die Orientierung des ambienten Raums sowohl für die ungerade k -Form wie auch für das Integrationsgebiet und drücken somit das neue Integral durch das schon bekannte Integral aus. Im inkongruenten Fall verfahren wir natürlich so:

$$\int_{[c; -\text{Or}]} [\omega; \text{Or}] = \int_{[c; -\text{Or}]} [-\omega; -\text{Or}] = - \int_c \omega. \quad (2.157)$$

Bemerkung. Wenn wir nur Dichten zu integrieren hätten, ließe sich die Definition deutlich vereinfachen (durch konsequentes Eliminieren von Orientierung jeder Art). Der recht aufwändige Formalismus wird dadurch erzwungen, dass wir zur naturgetreuen Beschreibung physikalischer Vorgänge auch ungerade 2-Formen (also Stromdichten) und ungerade 1-Formen sinnvoll integrieren wollen/müssen. \square

Es folgt jetzt die **Übertragung** aller Integralsätze. Sei dazu $\tilde{\omega} = [\omega; \text{Or}]$ eine ungerade k -Form und $\tilde{c} = [c; \text{Or}]$ ein $(k + 1)$ -dimensionales Integrationsgebiet mit äußerer Orientierung. Der Rand von \tilde{c} wird erklärt durch

$$\partial \tilde{c} := [\partial c; \text{Or}]. \quad (2.158)$$

Dann haben wir

$$\int_{\tilde{c}} d\tilde{\omega} = \int_{[c; \text{Or}]} [d\omega; \text{Or}] = \int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega = \int_{[\partial c; \text{Or}]} [\omega; \text{Or}] = \int_{\partial \tilde{c}} \tilde{\omega}. \quad (2.159)$$

Der (Allgemeine) Stokes'sche Satz gilt also auch (mutatis mutandi) für den Fall ungerader Formen.

2.10.4 Beispiele aus der Theorie des Elektromagnetismus

Beispiel 1: elektrische Ladungsdichte. Die elektrische Ladungsdichte ρ im E_3 ist eine ungerade 3-Form:

$$\rho = f [dx \wedge dy \wedge dz; R] = f [-dx \wedge dy \wedge dz; L]. \quad (2.160)$$

Wir schreiben in diesem Fall auch

$$\rho = f |dx \wedge dy \wedge dz|, \quad (2.161)$$

oder noch kürzer:

$$\rho = f \, dx \, dy \, dz. \quad (2.162)$$

Das Integral $Q(U) := \int_U \rho$ berechnet die gesamte im Raumbereich U befindliche elektrische Ladungsmenge.

Bemerkung. In physikalischen Lehrbüchern wird meist die Größe f als die elektrische Ladungsdichte bezeichnet. Wir reservieren den Namen “Ladungsdichte” für die bedeutsamere (weil invariant erklärte) Größe ρ . Zur besseren Unterscheidung nennen wir f die Ladungsdichtefunktion.

Deutung des Dichteintegrals. Die Ladungsdichte ρ bestehe aus Ladungen q_i an den Orten p_i , also $\rho = \sum_i q_i \delta_{p_i}$. Dann ist

$$Q(U) = \int_U \rho = \sum_{i: p_i \in U} q_i. \quad (2.163)$$

Wir bilden also die Summe aller Ladungen q_i , die sich an Orten p_i innerhalb des Gebiets U befinden. (Beachte: Längeneinheiten und Volumenmessung gehen hier nicht ein!)

Beispiel 2: elektrische Erregung. Die **elektrische Erregung** (oder elektrische Flussdichte) D ist im E_3 eine ungerade 2-Form:

$$D = \sum_{i < j} D_{ij} [dx_i \wedge dx_j; R] = \sum_{i < j} D_{ij} [dx_j \wedge dx_i; L]. \quad (2.164)$$

Das Integral $\int_S D$ heißt der **elektrische Fluss** durch die Fläche S (mit äußerer Orientierung). Es gilt das **Gauss'sche Gesetz**:

$$dD = \rho. \quad (2.165)$$

Durch Integration über ein beliebiges Raumbereich $U \subset E_3$ (ohne Orientierung) folgt:

$$\int_{\partial U} D = \int_U \rho. \quad (2.166)$$

Die elektrische Ladung im Gebiet U ist also gleich dem elektrischen Fluss durch die Oberfläche ∂U . Hieraus resultiert die Vorstellung, dass elektrische Ladungen die Quellen des elektrischen Flusses sind. Insbesondere hat elektrischer Fluss die physikalische Dimension von Ladung.

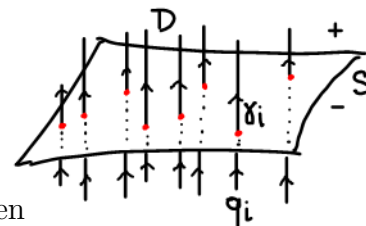
Deutung des Flussintegrals. D bestehe aus Linienstücken γ_i mit Gewichtsfaktoren q_i der physikalischen Dimension von elektrischem Fluss oder Ladung, also $D = \sum q_i \gamma_i$. Dann ist

$$\int_S D = \sum_{i: \gamma_i \cap S} \pm q_i. \quad (2.167)$$

Die Summe läuft über alle Linienstücke γ_i , die S kreuzen.

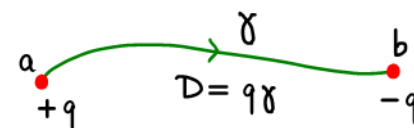
Jedes Linienstück γ_i trägt zur Summe mit seinem elektrischen

Fluss $\pm q_i$ bei, und das Vorzeichen wird wie immer durch Orientierungsvergleich ermittelt.



Deutung (anschaulich) des Gauss'schen Gesetzes. Nun besprechen wir eine besonders simple Konfiguration, die das Gauss'sche Gesetz $dD = \rho$ befriedigt. Sei dazu $D = q\gamma$, d.h. D bestehe aus einer einzigen Linie γ , die den elektrischen Fluss q trägt. Die Linie beginne im Punkt a und

ende im Punkt b . In Formeln: $\partial\gamma = b - a$. Der Rand von γ besteht also aus dem Endpunkt b mit Gewicht $+1$ und dem Anfangspunkt a mit Gewicht -1 . In dieser Situation verlangt das Gauss'sche Gesetz, dass eine Ladung $+q$ im Punkt a und eine Ladung $-q$ im Punkt b vorliegen muss: $\rho = qa + (-q)b$. In der Tat gilt hiermit

$$dD = d(q\gamma) = q(-\partial\gamma) = qa + (-q)b = \rho.$$

(2.168)

Warnung: dieses Bild illustriert das Gauss'sche Gesetz (nämlich: ist D bekannt, so erhält man die elektrische Ladungsdichte ρ aus $dD = \rho$) und sonst nichts! Die elektrische Erregung eines realen Dipols mit Ladungen wie im Bild entsteht durch lineare Überlagerung einer Vielzahl elektrischer Flusslinien, die alle in der positiven Ladung des Dipols beginnen und in der negativen enden.

2.10.5 Zusammenfassende Bemerkungen

Die Differentialoperatoren der Vektoranalysis im E_3 lassen sich in dem folgenden **kommutativen Diagramm** zusammenfassen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{Funktionen} & \xrightarrow{d} & \text{1-Formen} & \xrightarrow{d} & \text{2-Formen} & \xrightarrow{d} & \text{3-Formen} \\
 \parallel & & \uparrow \mathcal{I}_1 & & \uparrow \mathcal{I}_2 & & \uparrow \mathcal{I}_3 \\
 \text{Funktionen} & \xrightarrow{\text{grad}} & \text{Vektorfelder} & \xrightarrow{\text{rot}} & \text{Vektorfelder} & \xrightarrow{\text{div}} & \text{Funktionen}
 \end{array}
 \tag{2.169}$$

Die Kommutativität des Diagramms bedeutet, dass es nur auf Anfangs- und Endraum ankommt, nicht aber auf den Weg von Abbildungen dazwischen. Wir haben also

$$d = \mathcal{I}_1 \circ \text{grad}, \quad d \circ \mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2 \circ \text{rot}, \quad d \circ \mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_3 \circ \text{div}. \tag{2.170}$$

Die generelle Regel

$$d \circ d = 0 \tag{2.171}$$

ergibt speziell:

$$\text{div} \circ \text{rot} = 0, \quad \text{rot} \circ \text{grad} = 0. \tag{2.172}$$

Mit der Deutung der äußeren Ableitung als Randoperator hat die Regel $d \circ d = 0$ eine anschauliche Deutung: **“der Rand vom Rand ist immer Null”**.

Zum Schluss präsentieren wir jetzt noch eine Verfeinerung des obigen Diagramms. Die erste Zeile gibt es genau gesagt zweimal (für ungerade wie für gerade Formen). Dementsprechend gibt es auch die zweite Zeile zweimal:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{Funktionen} & \xrightarrow{\text{grad}} & \text{Vektorfelder} & \xrightarrow{\text{rot}} & \text{Vektorfelder} & \xrightarrow{\text{div}} & \text{Funktionen} \\
 (\text{skalar}) & & (\text{polar}) & & (\text{axial}) & & (\text{pseudoskalar}) \\
 \phi_e & & \vec{E} & & \vec{B} & & \rho_m
 \end{array}
 \tag{2.173}$$

und

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{Funktionen} & \xrightarrow{\text{grad}} & \text{Vektorfelder} & \xrightarrow{\text{rot}} & \text{Vektorfelder} & \xrightarrow{\text{div}} & \text{Funktionen} \\
 (\text{pseudoskalar}) & & (\text{axial}) & & (\text{polar}) & & (\text{skalar}) \\
 \phi_m & & \vec{H} & & \vec{D} & & \rho_e
 \end{array}
 \tag{2.174}$$

Erläuterungen. Sei $\pi : E_3 \rightarrow E_3$ eine **Raumspiegelung**, also eine Spiegelung z.B. am Koordinatenursprung o :

$$\pi(p) = \pi(o + (p - o)) = o - (p - o). \quad (2.175)$$

Eine **(skalare) Funktion** $f : E_3 \rightarrow \mathbb{R}$ transformiert sich (wir benützen die Notation $f \mapsto \pi^* f$) unter π einfach durch Spiegelung des Arguments:

$$(\pi^* f)(p) = f(\pi(p)). \quad (2.176)$$

Hingegen erleidet eine **pseudoskalare** Funktion f einen zusätzlichen Vorzeichenwechsel:

$$(\pi^* f)(p) = -f(\pi(p)). \quad (2.177)$$

Ein physikalisches **Beispiel** für eine pseudoskalare Funktion wäre die magnetische Ladungsdichtefunktion (wenn es denn magnetische Ladungen gäbe). Magnetische Ladungen (wenn sie existierten) würden kein positives oder negatives Vorzeichen (wie elektrische Ladungen) tragen, sondern wären rechtshändig oder linkshändig. Unter Raumspiegelung haben wir:

$$\text{rechtshändig} \mapsto \text{linkshändig} = -\text{rechtshändig}. \quad (2.178)$$

Eine ähnliche Unterscheidung hat man für Vektorfelder zu treffen. Unter einer Raumspiegelung wechseln **polare** Vektoren ihr Vorzeichen:

$$(\pi^* \vec{E})(p) = -\vec{E}(\pi(p)), \quad (2.179)$$

axiale Vektoren hingegen tun dies nicht:

$$(\pi^* \vec{B})(p) = +\vec{B}(\pi(p)). \quad (2.180)$$

Ganz zum Schluss kommt jetzt noch eine **Zusammenfassung** der Integralsätze der Vektoranalysis. Man sagt, dass k -Formen mit k -dimensionalen Flächenstücken über die Operation der Integration **gepaart** sind:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{Funktionen} & \xrightarrow{d} & \text{1-Formen} & \xrightarrow{d} & \text{2-Formen} & \xrightarrow{d} & \text{3-Formen} \\
 \otimes & & \otimes & & \otimes & & \otimes \\
 \text{Punkte} & \xleftarrow{\partial} & \text{Kurven} & \xleftarrow{\partial} & \text{Flächen} & \xleftarrow{\partial} & \text{Gebiete} \\
 \downarrow \int & & \downarrow \int & & \downarrow \int & & \downarrow \int \\
 \mathbb{R} & & \mathbb{R} & & \mathbb{R} & & \mathbb{R}
 \end{array} \quad (2.181)$$

Es gilt der Allgemeine Stokes'sche Satz:

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega. \quad (2.182)$$

Im Vektorkalkül spaltet er sich in **drei spezielle Sätze** auf:

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} \text{grad} f \cdot d\vec{r} &= \int_{\partial\gamma} f \equiv f(b) - f(a) & (\partial\gamma = b - a), \\
 \int_{\Sigma} \text{rot} \vec{E} \cdot d^2\vec{n} &= \int_{\partial\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{r}, \\
 \int_U \text{div} \vec{D} \, dx \, dy \, dz &= \int_{\partial U} \vec{D} \cdot d^2\vec{n}.
 \end{aligned} \quad (2.183)$$

3 Einfaches zu Differenzialgleichungen

3.1 Lineare Differenzialgleichungen

3.1.1 Struktur des Lösungsraums

Wir betrachten im Folgenden Differenzialgleichungen für Funktionen einer reellen Veränderlichen:

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto y(x) \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

In diesem Kontext ist eine **lineare Differenzialgleichung n -ter Ordnung** eine Gleichung der Form

$$a_n(x) \frac{d^n}{dx^n} y(x) + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} y(x) + \dots + a_1(x) \frac{d}{dx} y(x) + a_0(x) y(x) = f(x). \quad (3.2)$$

Wir schreiben abkürzend $\mathcal{L} := \sum_{k=0}^n a_k(x) \frac{d^k}{dx^k}$. Ein solches Objekt \mathcal{L} nennt man einen Differenzialoperator n -ter Ordnung. Die Differenzialgleichung **(DGL)** lautet jetzt kurz $\mathcal{L}y = f$. Die Funktion f heißt die **Inhomogenität** der DGL. Der Differenzialoperator \mathcal{L} ist linear, d.h.

$$\mathcal{L}(y_1 + y_2) = \mathcal{L}y_1 + \mathcal{L}y_2, \quad \mathcal{L}(ry) = r\mathcal{L}y \quad (r \in \mathbb{R}). \quad (3.3)$$

Offenbar gilt:

- 1) $(\mathcal{L}y_1 = 0 \text{ und } \mathcal{L}y_2 = 0) \Rightarrow \mathcal{L}(y_1 + y_2) = 0$.
- 2) $(\mathcal{L}y_1 = 0, r \in \mathbb{R}) \Rightarrow \mathcal{L}(ry_1) = 0$.

Also sind mit y_1 und y_2 auch $(y_1 + y_2)(x) := y_1(x) + y_2(x)$ und $(ry_1)(x) := ry_1(x)$ Lösungen der homogenen Gleichung $\mathcal{L}y = 0$.

Merke: Der Lösungsraum der (homogenen) DGL $\mathcal{L}y = 0$ (also mit $f = 0$) hat die Struktur eines Vektorraumes. \square

Hingegen hat der Lösungsraum der inhomogenen DGL $\mathcal{L}y = f$ die Struktur eines **affinen Raumes** (mit Differenzvektorraum gleich dem Lösungsraum der homogenen DGL), denn aus $\mathcal{L}y_1 = f$ und $\mathcal{L}y_2 = f$ folgt $\mathcal{L}(y_2 - y_1) = 0$.

Merke: Jede (beliebige) Lösung der inhomogenen DGL $\mathcal{L}y = f$ lässt sich darstellen als eine spezielle Lösung y_1 dieser Gleichung plus eine Lösung der homogenen DGL.

Beweis. Sei y_1 eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL $\mathcal{L}y_1 = f$. Eine beliebige andere Lösung y lässt sich ausdrücken als $y = y_1 + (y - y_1)$, und, wie wir wissen, ist $y - y_1$ Lösung der homogenen DGL.

3.1.2 Homogene lineare DGL 1. Ordnung

Wir behandeln jetzt die Differenzialgleichung

$$y'(x) = a(x) y(x) \quad (3.4)$$

mit variablem Koeffizienten $a(x)$, also $\mathcal{L}y = 0$ mit dem Differenzialoperator $\mathcal{L} = \frac{d}{dx} - a(x)$. Unter der Annahme, dass durch $y(x)$ dividiert werden kann, haben wir

$$a(x) = \frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{d}{dx} \ln y(x). \quad (3.5)$$

Per Integration folgt

$$\int_{x_0}^x a(t) dt = \int_{x_0}^x \frac{d}{dt} \ln y(t) dt = \ln y(t) \Big|_{t=x_0}^{t=x} = \ln y(x) - \ln y(x_0) = \ln \frac{y(x)}{y(x_0)}. \quad (3.6)$$

Demnach gilt

$$\exp\left(\int_{x_0}^x a(t) dt\right) = \frac{y(x)}{y(x_0)} \quad (3.7)$$

oder

$$y(x) = y(x_0) \exp\left(\int_{x_0}^x a(t) dt\right). \quad (3.8)$$

Der Lösungsraum ist hier eindimensional; er wird durch die Konstante $y_0 \equiv y(x_0)$ parametrisiert. Wir sehen auch, dass die eingangs gemachte Annahme $y(x) \neq 0$ keine Einschränkung bedeutet.

3.1.3 Variation der Konstanten

Wir wenden uns jetzt der **inhomogenen** Gleichung $\mathcal{L}y = b$ zu; also

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x). \quad (3.9)$$

Diese löst man durch **“Variation der Konstanten”**, d.h. mittels des Ansatzes

$$y(x) = c(x) e^{A(x)}, \quad A(x) = \int_{x_0}^x a(t) dt. \quad (3.10)$$

Einmal Differenzieren ergibt

$$y' = c' e^A + cA' e^A = (c' + ca) e^A \quad \text{oder} \quad y' - ay = c' e^A. \quad (3.11)$$

Es folgt $c' e^A = b$ oder $c' = e^{-A} b$. Durch Integration dieser Gleichung und Hinzufügen der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung erhalten wir

$$y(x) = y_0 e^{A(x)} + \int_{x_0}^x e^{A(x)-A(t)} b(t) dt. \quad (3.12)$$

Bemerkung. Wie man ohne Mühe sieht, hat die Lösung die Form

$$y(x) = h(x) + \int_{\mathbb{R}} G(x, x') b(x') dx' \quad (3.13)$$

mit $h(x)$ = Lösung der homogenen Gleichung und

$$G(x, x') = \begin{cases} e^{A(x)-A(x')} & x > x', \\ 0 & x < x'. \end{cases} \quad (3.14)$$

Man nennt $G(x, x')$ die **Greenfunktion** (vgl. Abschn. 3.1.5) der linearen DGL 1. Ordnung.

3.1.4 Homogene lineare DGL 2. Ordnung: Wronski-Determinante

Die homogene Differenzialgleichung 2. Ordnung mit variablen Koeffizienten lautet

$$\mathcal{L} y = 0, \quad \mathcal{L} = \frac{d^2}{dx^2} + a(x) \frac{d}{dx} + b(x). \quad (3.15)$$

(Ohne großen Verlust an Allgemeinheit haben wir den Koeffizienten der zweiten Ableitung konstant gleich Eins gesetzt.)

Definition. Unter der **Wronski-Determinante** zweier Lösungen y_1, y_2 der homogenen Gleichung $\mathcal{L} y = 0$ versteht man die Funktion

$$W_{y_1, y_2}(x) \equiv W(x) := y_1(x) y_2'(x) - y_2(x) y_1'(x). \quad \square \quad (3.16)$$

Kurze Rechnung ergibt folgende Differenzialgleichung für die Wronski-Determinante:

$$W' = y_1 y_2'' - y_2 y_1'' = -y_1 (a y_2' + b y_2) + y_2 (a y_1' + b y_1) = -a W. \quad (3.17)$$

Die Lösung hiervon lautet (für irgendein $x_0 \in \mathbb{R}$)

$$W(x) = W(x_0) e^{\int_{x_0}^x a(t) dt}. \quad (3.18)$$

Es folgt, dass $W(x)$ entweder für keinen Wert oder für alle Werte von x verschwindet.

Mitteilung. Die stationäre **Schrödinger-Gleichung** der Quantenmechanik (für die Bewegung eines Teilchens der Masse m und Energie E auf einer Achse mit Koordinate x und Potenzialfunktion $V(x)$) lautet $\mathcal{L} \psi = 0$, wobei

$$\mathcal{L} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x)). \quad (3.19)$$

(\hbar ist die Plancksche Konstante.) Diese eindimensionale Schrödinger-Gleichung ist der Spezialfall der hier betrachteten Differenzialgleichung für $a(x) \equiv 0$ und $b(x) = 2m(E - V(x))/\hbar^2$. In diesem Spezialfall hat die skalierte Wronski-Determinante $\frac{\hbar}{m}(y_1 y_2' - y_2 y_1')$ die physikalische Bedeutung des (erhaltenen) **Wahrscheinlichkeitsstromes** im quantenmechanischen Zustand mit komplexwertiger Wellenfunktion $\psi = \text{Re}(\psi) + i \text{Im}(\psi) = y_1 + i y_2$.

Satz. Ist die Wronski-Determinante zweier Lösungen y_1, y_2 von $\mathcal{L} y = 0$ ungleich Null, so sind y_1 und y_2 linear unabhängig, d.h. es existiert kein vom Nullpaar verschiedenes Zahlenpaar c_1, c_2 mit der Eigenschaft $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0$ (Nullfunktion).

Beweis. Sei $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0$ mit $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$. Differenzieren dieser Gleichung liefert

$$c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) = 0. \quad (3.20)$$

Durch geschicktes Multiplizieren und Addieren von Gleichungen folgt

$$W = y_1 y_2' - y_2 y_1' = 0. \quad (3.21)$$

Die lineare Abhängigkeit von y_1 und y_2 impliziert also $W = 0$. Dieser Schluss ist logisch äquivalent zur Implikation ($W \neq 0 \implies y_1, y_2$ linear unabhängig). \square

Definition. Wenn die Wronski-Determinante zweier Lösungen y_1, y_2 von $\mathcal{L}y = 0$ nicht verschwindet, dann heißt das Paar y_1, y_2 ein **Fundamentalsystem** der DGL.

Satz. Ist y_1, y_2 ein Fundamentalsystem der DGL $\mathcal{L}y = 0$, so lässt sich jede Lösung y derselben als Linearkombination von y_1 und y_2 darstellen.

Beweis. Für eine Lösung y von $\mathcal{L}y = 0$ definieren wir zwei Funktionen $x \mapsto c_j(x)$ ($j = 1, 2$) durch

$$c_j(x) := \frac{y(x)y_j'(x) - y_j(x)y'(x)}{W(x)}. \quad (3.22)$$

Durch Differenzieren von $x \mapsto c_j(x)W(x)$ erhalten wir

$$c_j'W + c_jW' = yy_j'' - y_jy'' = -a(yy_j' - y_jy') = -aWc_j. \quad (3.23)$$

Mit $W' = -aW$ folgt $c_j'W = 0$ und somit $c_j(x) \equiv c_j$ (unabhängig von x).

Jetzt multiplizieren wir die Gleichung $c_jW = yy_j' - y_jy'$ für $j = 1$ mit y_2 und dieselbe Gleichung für $j = 2$ mit y_1 und bilden die Differenz. So entsteht

$$(c_1y_2 - c_2y_1)W = (yy_1' - y_1y')y_2 - (yy_2' - y_2y')y_1 = -yW. \quad (3.24)$$

Es folgt $y(x) = c_2y_1(x) - c_1y_2(x)$ mit konstanten Koeffizienten c_1, c_2 , wie behauptet.

3.1.5 Greenfunktion der linearen DGL 2. Ordnung

Wir betrachten nun die inhomogene Differenzialgleichung 2. Ordnung mit variablen Koeffizienten:

$$\mathcal{L}y = f, \quad \mathcal{L} = \frac{d^2}{dx^2} + a(x)\frac{d}{dx} + b(x). \quad (3.25)$$

Motivation. Sei G ein Operator [also eine lineare Abbildung von Funktionen $x \mapsto f(x)$ zu Funktionen $x \mapsto (Gf)(x)$], der ein **Rechtsinverses** von \mathcal{L} ist – d.h. in Formeln soll gelten: $\mathcal{L}Gf = f$. Wenn ein solcher Operator G existiert, dann ist $y(x) := (Gf)(x)$ offensichtlich eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL $\mathcal{L}y = f$. Nun ist G aber nicht ohne weiteres eindeutig bestimmt, denn mit Gf löst ja auch $(Gf)(x) + c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ (für ein Fundamentalsystem y_1, y_2 von $\mathcal{L}y = 0$) die gleiche DGL. Um G festzulegen, müssen sog. **Randbedingungen** gestellt werden.

Vorschlag. Sei y_1, y_2 ein Fundamentalsystem der homogenen Differenzialgleichung $\mathcal{L}y = 0$ und $W = y_1\frac{d}{dx}y_2 - y_2\frac{d}{dx}y_1$ die zugehörige Wronski-Determinante. Betrachte

$$G(x, x') = \frac{1}{W(x')} \begin{cases} y_2(x)y_1(x') & x \geq x' \\ y_1(x)y_2(x') & x \leq x' \end{cases} \quad (3.26)$$

Man nennt $G(x, x')$ eine **Greenfunktion** für \mathcal{L} .

Fakt. Das Integral

$$y(x) := (Gf)(x) \equiv \int_{\mathbb{R}} G(x, x') f(x') dx' \quad (3.27)$$

(wenn es konvergiert) ist eine spezielle Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung $\mathcal{L}y = f$.

Verifikation. Ausgehend von

$$y(x) = y_2(x) \int_{-\infty}^x \frac{y_1(x')}{W(x')} f(x') dx' + y_1(x) \int_x^{+\infty} \frac{y_2(x')}{W(x')} f(x') dx'$$

prüfen wir die Lösungseigenschaft nach. Für die erste Ableitung y' erhalten wir

$$\frac{dy}{dx}(x) = \frac{dy_2}{dx}(x) \int_{-\infty}^x \frac{y_1(x')}{W(x')} f(x') dx' + \frac{dy_1}{dx}(x) \int_x^{+\infty} \frac{y_2(x')}{W(x')} f(x') dx',$$

und für die zweite Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2}(x) &= \frac{d^2y_2}{dx^2}(x) \int_{-\infty}^x \frac{y_1(x')}{W(x')} f(x') dx' + \frac{d^2y_1}{dx^2}(x) \int_x^{+\infty} \frac{y_2(x')}{W(x')} f(x') dx' \\ &+ \frac{1}{W(x)} \left(y_1(x) \frac{dy_2}{dx}(x) - y_2(x) \frac{dy_1}{dx}(x) \right) f(x). \end{aligned}$$

Der Term in der letzten Zeile vereinfacht sich zu $f(x)$. Durch Multiplikation mit den Koeffizienten von \mathcal{L} und Aufsummieren von Gleichungen erhalten wir

$$(\mathcal{L}y)(x) = (\mathcal{L}y_1)(x) \int_{-\infty}^x \frac{y_1(x')}{W(x')} f(x') dx' + (\mathcal{L}y_2)(x) \int_x^{+\infty} \frac{y_2(x')}{W(x')} f(x') dx' + f(x).$$

Mit $\mathcal{L}y_1 = \mathcal{L}y_2 = 0$ folgt die Behauptung $\mathcal{L}y = f$.

Bemerkung. Der angegebene Ausdruck für $G(x, x')$ taugt dann, wenn die Inhomogenität f nur in einem beschränkten Teil von \mathbb{R} von Null verschieden ist, da für solche f die Existenz des Integrals $\int_{\mathbb{R}} G(x, x') f(x') dx'$ gesichert ist. Wenn $f(x') = 0$ nur für $x' < x_0$ (für irgendein $x_0 > -\infty$) bekannt ist, dann kann die Form (3.26) zu einem divergenten Integral und somit sinnlosen Ausdruck führen. In diesem Fall ersetzt man (3.26) durch

$$G^+(x, x') = \frac{1}{W(x')} \begin{cases} y_2(x)y_1(x') - y_1(x)y_2(x') & x \geq x', \\ 0 & x \leq x'. \end{cases} \quad (3.28)$$

Das Integral $y^+(x) = \int_{\mathbb{R}} G^+(x, x') f(x') dx'$ erstreckt sich dann nur über den **endlichen Bereich** $x_0 \leq x' \leq x$. Auch y^+ ist eine spezielle Lösung von $\mathcal{L}y = f$. Um das schnell zu verifizieren, berechnen wir die Differenz

$$G(x, x') - G^+(x, x') = y_1(x)y_2(x')/W(x') \quad (3.29)$$

und bemerken, dass

$$y(x) - y^+(x) = (Gf - G^+f)(x) = y_1(x) \int_{\mathbb{R}} \frac{y_2(x')}{W(x')} f(x') dx' \quad (3.30)$$

eine Lösung der homogenen Gleichung $\mathcal{L}(y - y^+) = 0$ ist. Man sieht auch leicht ein, dass der Ausdruck (3.28) für $G^+(x, x')$ nicht von der Wahl des Fundamentalsystems abhängt.

Die skizzierte Situation liegt u.a. vor, wenn x wie im nächsten Beispiel die physikalische Bedeutung von Zeit hat und die treibende Kraft f erst zu einer Anfangszeit x_0 einsetzt.

Beispiel. Wir betrachten den getriebenen und gedämpften harmonischen Oszillator,

$$\mathcal{L}y = f, \quad \mathcal{L} = \frac{d^2}{dt^2} + a \frac{d}{dt} + b \quad (x \equiv t), \quad (3.31)$$

im **überdämpften** Bereich, d.h. für Parameterwerte $0 < b < a/2$. Ein Fundamentalsystem y_1, y_2 von Lösungen der homogenen Gleichung ist

$$y_1(t) = e^{\lambda_+ t}, \quad y_2(t) = e^{\lambda_- t}, \quad \lambda_{\pm} = -a/2 \pm \sqrt{a^2/4 - b}. \quad (3.32)$$

Man beachte $\lambda_{\pm} \in \mathbb{R}$ und $\lambda_- < \lambda_+ < 0$. Für die entsprechende Wronski-Determinante ergibt sich

$$W(t) = y_1(t)\dot{y}_2(t) - y_2(t)\dot{y}_1(t) = (\lambda_- - \lambda_+) e^{(\lambda_- + \lambda_+)t}, \quad (3.33)$$

und die Greenfunktion G^+ ist

$$G^+(t, t') = \frac{e^{\lambda_+(t-t')} - e^{\lambda_-(t-t')}}{\lambda_+ - \lambda_-} \quad (3.34)$$

für $t \geq t'$ und $G^+(t, t') = 0$ sonst. Wir haben somit die folgende spezielle Lösung:

$$y(t) = \int_{t_0}^t \frac{e^{\lambda_+(t-t')} - e^{\lambda_-(t-t')}}{\lambda_+ - \lambda_-} f(t') dt', \quad (3.35)$$

falls $f(t') = 0$ für $t' \leq t_0$. Wenn wir auch noch als **Anfangsbedingung** verlangen, dass der Oszillator aus der Ruhe heraus angetrieben wird (also $y(t_0) = 0$), dann ist (3.35) die eindeutige Lösung der inhomogenen DGL $\mathcal{L}y = f$ mit der gestellten Anfangsbedingung. Andernfalls (also für $y(t_0) \neq 0$) ist die geeignete Lösung der homogenen Gleichung hinzuzufügen.

3.2 Differenzialgleichung mit getrennten Variablen

Wir verlassen das Thema der linearen Differenzialgleichungen und wenden uns einem ausgewählten Typ von nichtlinearer Differenzialgleichung zu:

$$y'(x) = f(x)g(y). \quad (3.36)$$

Üblicherweise geht man hier per **“Eselsbrücke”** vor. Man schreibt $y' = \frac{dy}{dx}$ und verfährt hiermit so, als wäre $\frac{dy}{dx}$ ein Bruch von Zahlen dx und dy : Die Gleichung $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ multipliziert mit $\frac{dx}{g(y)}$ ergibt $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$. (Der Sinn dieser Gleichung bleibt leider im Dunkeln, solange Differenzialformen unbekannt sind.) Mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ gibt Integration

$$G(y(x)) := \int_{y_0}^{y(x)} \frac{ds}{g(s)} = \int_{x_0}^x f(t) dt =: F(x). \quad (3.37)$$

Diese Gleichung macht wieder für jedermann Sinn, auch ohne Differenzialformen: sie bestimmt y (unter geeigneten Voraussetzungen) als Funktion von x durch Auflösen von $G(y(x)) = F(x)$.

Beispiel 1. Wir betrachten die Newton'sche Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} = -V'(x) \quad (3.38)$$

für eine potenzielle Energie V . Der hieraus resultierende **Energiesatz**

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 + V(x) \right) \quad (3.39)$$

liefert

$$\frac{m}{2} \dot{x}^2 + V(x) = E = \text{const.} \quad (3.40)$$

Auflösen nach der Geschwindigkeit ergibt

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}. \quad (3.41)$$

Das ist eine Differenzialgleichung $y'(x) = f(x)g(y)$ mit **getrennten Variablen**, wenn wir die folgenden Umbenennungen vornehmen:

$$y \rightarrow x \quad \text{und} \quad x \rightarrow t \quad \text{und} \quad y' \rightarrow \dot{x} \quad (3.42)$$

und die spezielle Wahl $f(t) \equiv 1$ treffen.

Sei nun $\dot{x} = +\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))} > 0$. Dann gilt per Eselsbrücke

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))} \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} = dt \\ &\Rightarrow \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x'))}} = \int_{t_0}^t dt' = t - t_0 \quad (\text{mit } x_0 = x(t_0)). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Man erhält nun die Lösung des Problems, indem man das Integral auf der linken Seite ermittelt und den resultierenden Ausdruck nach $x(t)$ auflöst. Dieser letzte Schritt wird im nachfolgenden Beispiel explizit ausgeführt.

Beispiel 2. Harmonischer Oszillator: $V(x) = m\omega^2 x^2/2$. Wir setzen $2E = mv_{\max}^2$ und $v_{\max} = \omega x_{\max}$, wodurch v_{\max} und x_{\max} als die maximale Geschwindigkeit bzw. Auslenkung des Oszillators eingeführt werden. Sei nun $t_0 = 0$ und $x_0 = 0$. Dann ergibt sich

$$t = \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{v_{\max}^2 - \omega^2 x'^2}} = \frac{1}{\omega} \int_0^{x/x_{\max}} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}, \quad (3.44)$$

wobei die Substitution $x = \xi x_{\max}$ verwendet wurde. Nun gilt $(1 - \xi^2)^{-1/2} d\xi = d(\arcsin \xi)$.

Beweis. Zur Erinnerung: $(g \circ f)(x) = x \Rightarrow g'(f(x))f'(x) = 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))}$. Setze nun $g = \sin$, $f = \arcsin$ (Umkehrfunktion des Sinus). Es folgt $g' = \cos = \sqrt{1 - \sin^2}$ und somit $g'(f(x)) = \sqrt{1 - x^2}$, woraus sich schließlich

$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (3.45)$$

ergibt. \square

Nun weiter im Beispiel 2:

$$\omega t = \int_0^{x/x_{\max}} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} = \arcsin(\xi) \Big|_{\xi=0}^{\xi=x/x_{\max}} = \arcsin(x/x_{\max}), \quad (3.46)$$

also $x(t) = x_{\max} \sin(\omega t)$.

3.2.1 Zurückziehen von Formen

Definition (Zurückziehen einer Funktion). Gegeben sei eine Funktion $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ und eine Abbildung $\psi : M \rightarrow N$. Dann definiert man mittels ψ eine Funktion $\psi^* f : M \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$(\psi^* f)(p) := f(\psi(p)). \quad (3.47)$$

Man nennt diese Operation $f \mapsto \psi^* f$ das **Zurückziehen** der Funktion f von N nach M (mittels der Abbildung $\psi : M \rightarrow N$).

Definition. In ähnlicher Weise definiert man die Operation des Zurückziehens von Differentialformen. Sei β eine 1-Form auf N , und sei die Abbildung $\psi : M \rightarrow N$ jetzt differenzierbar. Dann erklärt man die 1-Form $\psi^* \beta$ auf M durch

$$(\psi^* \beta)_p(v) := \beta_{\psi(p)}((D_p \psi)(v)). \quad (3.48)$$

Hierbei ist $D_p \psi$ das Differential der Abbildung $\psi : M \rightarrow N$ im Punkt p . Analog definiert man den Rückzug $\psi^* \omega$ einer k -Form ω ($k > 1$) durch

$$(\psi^* \omega)_p(v_1, \dots, v_k) := \omega_{\psi(p)}((D_p \psi)(v_1), \dots, (D_p \psi)(v_k)). \quad (3.49)$$

Mitteilung. Ohne Mühe zeigt man (s.u.), dass ψ^* mit dem äußeren Produkt verträglich ist:

$$\psi^*(\alpha \wedge \beta) = (\psi^* \alpha) \wedge (\psi^* \beta). \quad (3.50)$$

Satz (Transformationssatz, Substitutionsregel): Gegeben seien eine k -Form ω auf N , eine k -dimensionale Fläche c in M und eine differenzierbare Abbildung $\psi : M \rightarrow N$. Dann gilt

$$\int_{\psi(c)} \omega = \int_c \psi^* \omega. \quad (3.51)$$

Bemerkung. Für den Spezialfall $M = N = \mathbb{R}$, $c = [a, b]$ und $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsend erhält man die bekannte **Substitutionsregel**:

$$\int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(y) dy = \int_a^b f(\psi(x)) \psi'(x) dx. \quad (3.52)$$

Hierzu setzen wir $\omega = f dy$. Dann ist

$$\int_{\psi(c)} \omega = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(y) dy, \quad (3.53)$$

und die Berechnung von $\psi^* \omega$ ergibt

$$(\psi^* \omega)_p(1) = \psi^*(f dy)_p(1) = f(\psi(p))(dy)_{\psi(p)}(\psi'(p) \cdot 1) = f(\psi(p))\psi'(p), \quad (3.54)$$

also

$$\int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(y) dy = \int_{\psi(c)} \omega \stackrel{\text{Satz}}{=} \int_c \psi^* \omega = \int_a^b f(\psi(x)) \psi'(x) dx. \quad (3.55)$$

3.2.2 Begründung der Eselsbrücke von Abschnitt 3.2

Satz: Die Operationen der äußeren Ableitung und des Zurückziehens von Formen vertauschen. Insbesondere gilt für eine Funktion f und eine differenzierbare Abbildung ψ die Gleichheit

$$\psi^*(df) = d(\psi^*f). \quad (3.56)$$

Beweis. Wir verifizieren die Aussage für den explizit angegebenen Fall. Auswertung der linken Seite auf einem Vektor v im Punkt p ergibt (gemäß der Definition der Operation des Zurückziehens der 1-Form df mittels ψ):

$$(\psi^*(df))_p(v) = (df)_{\psi(p)}((D_p\psi)(v)). \quad (3.57)$$

Auf der rechten Seite erhalten wir unter Verwendung der Kettenregel der Differentialrechnung

$$(d(\psi^*f))_p(v) = (d(f \circ \psi))_p(v) = ((df)_{\psi(p)} \circ (D_p\psi))(v). \quad (3.58)$$

Das ist wegen der Assoziativität der Hineinanderausführung von Abbildungen das gleiche Ergebnis wie auf der linken Seite. \square

Nach dieser Vorbereitung wenden wir uns der Begründung der **Eselsbrücke** zu. Die Differentialgleichung $y' = f(x)g(y)$ bedeutet im Klartext, dass wir eine (Lösungs-)Funktion $x \mapsto \psi(x)$ mit der Eigenschaft $\psi'(x) = f(x)g(\psi(x))$ suchen. Äquivalent hierzu (für $g(\psi(x)) \neq 0$) ist

$$\frac{\psi'(x)}{g(\psi(x))} = f(x). \quad (3.59)$$

Zur Lösung dieser Gleichung betrachten wir auf $N = \mathbb{R}$ die 1-Form $\beta = \frac{dy}{g(y)}$ und auf $M = \mathbb{R}$ die 1-Form $\alpha = f(x)dx$. Gesucht ist dann eine Abbildung $\psi: M \rightarrow N$ mit der Eigenschaft $\psi^*\beta = \alpha$; wegen $\psi^*\beta = (1/(g \circ \psi))d\psi$ löst eine solche Abbildung ψ unsere Gleichung.

Nun sei $\alpha = dF$ und $\beta = dG$, also $F' = f$ und $G' = 1/g$. Dann folgt aus $\psi^*\beta = \alpha$

$$d(\psi^*G) = \psi^*(dG) = \psi^*\beta = \alpha = dF. \quad (3.60)$$

Nach Integration von $d(\psi^*G) = dF$ haben wir

$$G \circ \psi = \psi^*G = F + c_0 \quad (3.61)$$

mit einer Integrationskonstanten $c_0 \in \mathbb{R}$. Falls G die Umkehrfunktion G^{-1} hat, folgt $\psi = G^{-1} \circ (F + c_0)$. Das ist die behauptete Lösung für $y = \psi(x)$ in der durch Eselsbrücke erhaltenen Form.

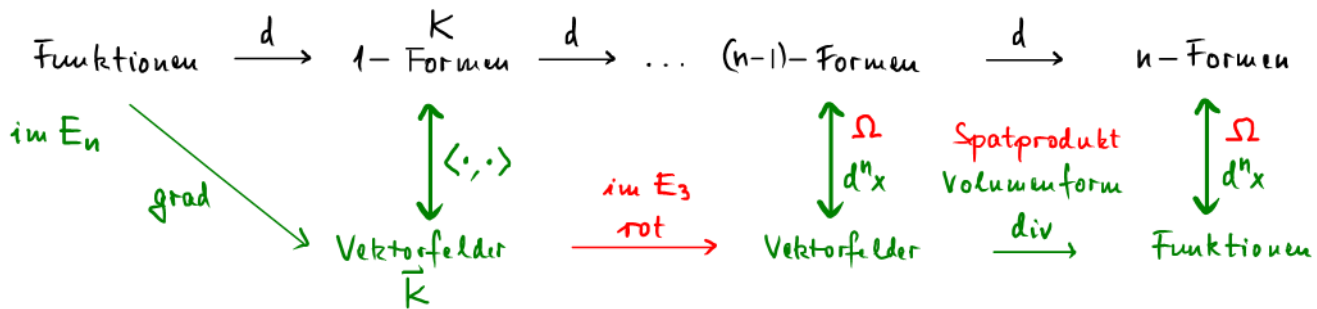
Zum Abschluss **verifizieren** wir die erhaltene Regel ohne Verwendung des Zurückziehens von Differentialformen. Dazu differenzieren wir $\psi(x) = G^{-1}(F(x) + c_0)$ mit der Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion und erhalten

$$\psi'(x) = \frac{F'(x)}{G' \circ G^{-1}(F(x) + c_0)} = f(x)g(\psi(x)). \quad (3.62)$$

ψ erfüllt also wie verlangt die Differentialgleichung $\psi'(x) = f(x)g(\psi(x))$.

Sondervorlesung über Thermodynamik des Gleichgewichts (aus der Perspektive der Math. Methoden f. Physiker)

Erinnerung an mathematische Strukturen ($\dim M = n$, diff. bar):

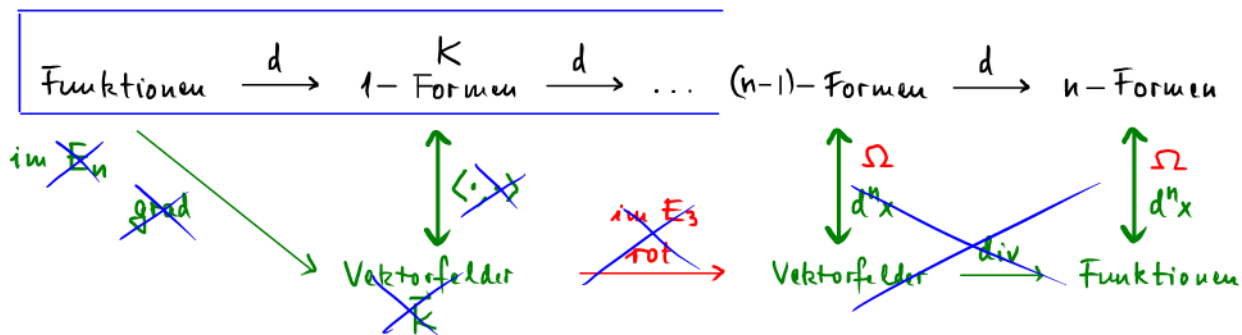


Bemerkungen: schwarze Zeile fundamental & universell (erfordert nur diff. bare Struktur)

grüne Zeile benützt Skalarprodukt, Volumenform ($\leftarrow E_n$)

rote Zeile benützt Skalarprodukt & Vektorprodukt ($\leftarrow E_3$)

THERMODYNAMIK:



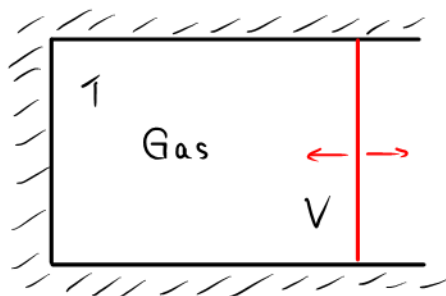
Mitteilung.

Falls M einfach zusammenhängend, gilt das Poincaré-Lemma:

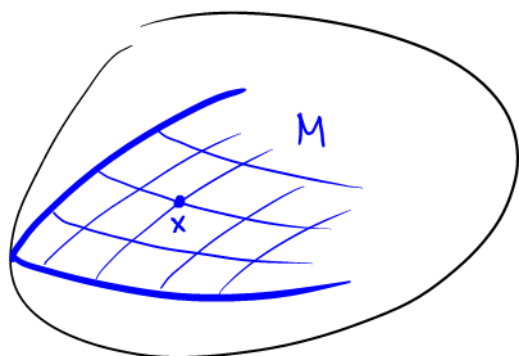
$$\alpha = df \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{d^2=0} \\ \text{P.L.} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} \quad d\alpha = 0$$

Einfaches
Beispielsystem:

Energieaustausch ja;
Teilchenaustausch nein.



Gastemperatur und Gasvolumen
langsam ändern, damit System
immer im Gleichgewicht bleibt.



Zustandsgrößen
 $T, p; E, V, S, H$ usw.



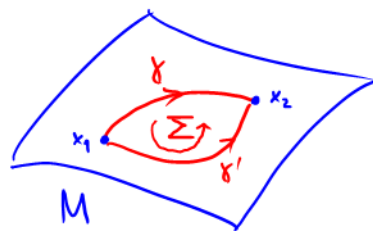
M = Raum der Gleichgewichtszustände (hier 2-dimensional, also eine Fläche)
als Unterraum eines Raums von Makrozuständen.

Zustandsgrößen sind reellwertige Funktionen auf M .

z.B. Temperatur $T: M \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto T(x)$.

Wärme & Arbeit (sind keine Zustandsgrößen)

Betrachte (langsamen) Prozess, bei dem das (immer im Gleichgewicht befindliche)
System eine Kurve γ in M durchläuft:



$W[\gamma] :=$ Arbeit, die beim Durchlaufen von γ am System verrichtet wird.

! Achtung: $W[\gamma]$ ist echt wegabhängig, also $W[\gamma] \neq W[\gamma']$ oder
(Kreisprozess:) $W[\partial\Sigma] \neq 0$.

$$W[\gamma] = \int_{\gamma} W, \quad W = \text{Arbeitsform (1-Form)},$$

$$W = -p dV.$$

Lehrbuchliteratur: $W \equiv \delta W \equiv \Delta W$ o.ä.

$Q[x] :=$ Wärme, die beim Durchlaufen von γ dem System zugeführt wird.

Wie $W[x]$ ist auch $Q[x]$ wegababhängig.

$$Q[x] = \int_{\gamma} Q, \quad Q = \text{Wärmeform (1-Form)},$$
$$\oint_{\gamma} \frac{Q}{T} = 0 \leadsto Q = T ds \quad (S = \text{Entropie}).$$

Lehrbücher: $Q \equiv \delta Q \equiv \Delta Q$

Hauptsatz (Energieerhaltung): $\oint (Q+W) = 0$

"In einem (reversiblen) Kreisprozess ist die in 1 Zykel am System verrichtete Arbeit gleich der dem System im gleichen Zykel entzogenen Wärme."

Folgerung: $0 \stackrel{HS}{=} \oint_{\partial \Sigma} (Q+W) \stackrel{\text{Stokes}}{=} \iint_{\Sigma} d(Q+W) \leadsto d(Q+W) = 0$

$\xrightarrow{\text{Poincaré Lemma}}$ die 1-Form $Q+W$ ist exakt: $Q+W = dU$
($U =$ innere Energie)

$$\iint_{\Sigma} dT ds = \iint_{\Sigma} dQ = - \iint_{\Sigma} dW = \iint_{\Sigma} dp \wedge dV$$

Wärmezufuhr = vom System geleistete Arbeit

Alle bisherige Diskussion koordinatenfrei.

Wähle jetzt 2 Koordinatenfunktionen $\xi_1, \xi_2: M \rightarrow \mathbb{R}$.

Dann $W = W_{\xi_1} d\xi_1 + W_{\xi_2} d\xi_2$, $Q = Q_{\xi_1} d\xi_1 + Q_{\xi_2} d\xi_2$.

$$Q+W = dU = \frac{\partial U}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial U}{\partial \xi_2} d\xi_2$$

oder $Q_{\xi_1} + W_{\xi_1} = \frac{\partial U}{\partial \xi_1}$, $Q_{\xi_2} + W_{\xi_2} = \frac{\partial U}{\partial \xi_2}$.

Beispiel: $\xi_1 = S$ (Entropie), $\xi_2 = V$ (Volumen)

$$dU = \frac{\partial U}{\partial S} dS + \frac{\partial U}{\partial V} dV \equiv \left. \frac{\partial U}{\partial S} \right|_V dS + \left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_S dV.$$

Vergleich mit dem (koordinatenunabhängigen) Ausdruck $dU = T ds - p dV$

ergibt $\left. \frac{\partial U}{\partial S} \right|_V = T$ und $\left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_S = -p$.

Zur Erinnerung:

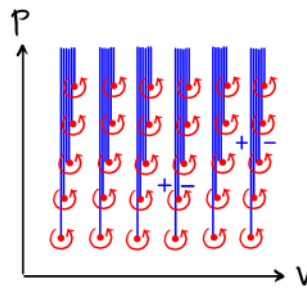
Vektorfelder ($\hat{=}$ partielle Ableitungen):

$$dS \left(\left. \frac{\partial}{\partial S} \right|_V \right) = 1, \quad dS \left(\left. \frac{\partial}{\partial V} \right|_S \right) = 0,$$

$$dV \left(\left. \frac{\partial}{\partial S} \right|_V \right) = 0, \quad dV \left(\left. \frac{\partial}{\partial V} \right|_S \right) = 1.$$

Visualisierung (für dim $M=2$):

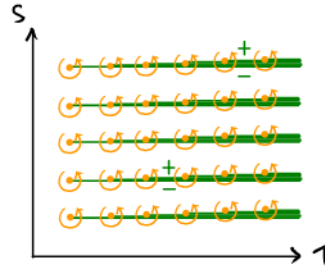
Die 1-Form W der Arbeit besteht aus Linienstücken, deren Quellen die Punkte von dW sind:



$$W = -p dV$$

$$dW = -dp \wedge dV$$

Die 1-Form Q der Wärme besteht ebenfalls aus Linienstücken. Ihre Quellen sind die Punkte von dQ :

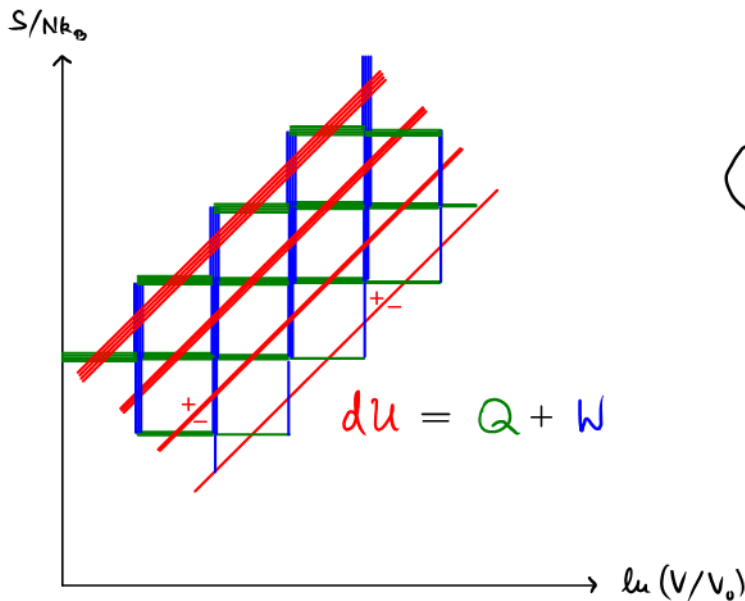


$$Q = T dS$$

$$dQ = dT \wedge dS$$

Hauptsatz (formuliert in unserer Sprache der Visualisierung):

Die Linienstücke der Wärmeform Q fügen sich mit den Linienstücken der Arbeitsform W zu geschlossenen Linien zusammen, nämlich den Linien von dU (also den Linien konstanter innerer Energie).



Wärme-Kraftmaschine:
Konversion
Wärme \sim mech. Energie

Diese Zeichnung "stimmt" für das ideale Gas:

$$dU = \frac{2U}{3} \left(\frac{dS}{k_B N} - d \ln V \right)$$

2-Formen in der Thermodynamik: Anwendungsbeispiel

Wärmekapazitäten: $C_V = T \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_V$, $C_P = T \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_P$.

Kompressibilitäten: $K_T = -\frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial p} \right|_T$, $K_S = -\frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial p} \right|_S$.

Aufgabe: Zeige $C_P/C_V = K_T/K_S$.

Lösung. Betrachte die (koordinatenfrei erklärte) 2-Form $d \ln V \wedge Q = \frac{T}{V} dV \wedge dS$.

1. Berechnung in Koordinaten V, T dann p, T :

$$\frac{T}{V} dV \wedge dS = \frac{T}{V} dV \wedge \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_V dT = \frac{dV}{V} \wedge C_V dT = \frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial p} \right|_T dp \wedge C_V dT = K_T C_V dT \wedge dp.$$

2. Berechnung in Koordinaten p, S dann p, T :

$$\frac{T}{V} dV \wedge dS = T dS \wedge \left(-\frac{1}{V}\right) \left. \frac{\partial V}{\partial p} \right|_S dp = T \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_P dT \wedge K_S dp = C_P K_S dT \wedge dp.$$

q.e.d.

Tensorprodukt. Seien V und W reelle Vektorräume. (Im Fall komplexer Vektorräume ändert sich nichts Wesentliches.) Unter dem *Tensorprodukt* $V \otimes W$ versteht man den reellen Vektorraum der Dimension $\dim(V) \times \dim(W)$, der folgendermaßen erklärt ist.

- Die Elemente von $V \otimes W$ sind sogenannte **Tensoren** $v \otimes w$ ($v \in V, w \in W$). Das Symbol \otimes bedeutet die Verschiebbarkeit von Skalaren, also $(av) \otimes w \equiv v \otimes (aw)$ für $a \in \mathbb{R}$.
- Sind $\{e_1, \dots, e_m\}$ und $\{f_1, \dots, f_n\}$ Basen von V bzw. W , so ist

$$e_i \otimes f_j \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$$

eine Basis von $V \otimes W$.

- Skalarmultiplikation: $a \cdot (v \otimes w) := (av) \otimes w \equiv v \otimes (aw)$.
- Distributivität (des Tensorprodukts): $(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w$ und $v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2$.

Jetzt betrachten wir den Vektorraum $\text{Hom}(V, W)$ der linearen Abbildungen zwischen V und W . Es existiert ein **kanonischer Isomorphismus**

$$I : W \otimes V^* \rightarrow \text{Hom}(V, W),$$

der wie folgt definiert ist:

$$I(w \otimes \alpha)(v) := \alpha(v) w.$$

Wir ordnen also einem Vektor $w \in W$ und einer Linearform $\alpha \in V^*$ eine lineare Abbildung $I(w \otimes \alpha) : V \rightarrow W$ durch $v \mapsto \alpha(v) w$ zu, d.h., wir machen aus dem Vektor $v \in V$ den Skalar $\alpha(v) \in \mathbb{R}$ und dann den Vektor $\alpha(v) w \in W$.

Um den inversen Isomorphismus explizit angeben zu können, wählen wir eine Basis $\{e_i\}$ von V mit Dualbasis $\{\vartheta_i\}$ von V^* . Dann haben wir für $I^{-1} : \text{Hom}(V, W) \rightarrow W \otimes V^*$ den Ausdruck

$$I^{-1}(A) = \sum_i (Ae_i) \otimes \vartheta_i.$$

Aufgabe. Zeige, dass $I^{-1}(A)$ unabhängig von der Basiswahl ist. \square