

Vorlesung: Maxwell in Ketten (Elektrodynamik für Fortgeschrittene)

M. Zirnbauer
Institut für Theoretische Physik
Universität zu Köln

Sommersemester 2016

Contents

1	Lebesgue-Integral	3
1.1	Motivation	3
1.2	Die Idee des Lebesgue-Integrals	3
1.3	Volumen offener Mengen per Quaderzerlegung	4
1.4	Lebesgue-messbare Mengen	5
1.5	Lebesgue-messbare Funktionen	6
1.6	Eigenschaften des Lebesgue-Integrals	8
1.7	Integrale mit Parameter	10
1.8	Vertauschung der Integrationsreihenfolge	11
1.9	Der Raum $L^2(\Omega)$	12
2	Schwache Lösungen, Distributionen und deRham-Ströme	14
2.1	Motivation	14
2.2	Testfunktionen	15
2.3	Schwache Lösungen	17
2.4	Distributionen	19
2.5	Operationen auf Distributionen	20
2.6	Fundamentallösungen	22
2.7	DeRham-Ströme	25
2.8	Operationen auf deRham-Strömen	26
2.8.1	Beispiel: Spule in Ruhe	29
2.8.2	Beispiel: Spule in Bewegung	29
3	Maxwell in Ketten	30
3.1	Multipolentwicklung	30
3.2	Kugelflächenfunktionen	31
3.3	E.M. Statik mit dR-Strömen	32

3.4	Propagation eines ebenen Lichtpulses	34
3.5	Das Feynmansche Paradoxon	34
3.6	Symmetrien und Erhaltungssätze	35
3.7	Strahlung einer monochromatischen Quelle	36
3.7.1	Elektrische Dipolstrahlung	36
3.7.2	Magnetische Dipolstrahlung	37
3.8	Homogene Wellengleichung (3D): schwache Lösung Σ_t	38
3.9	Entladung eines Kondensators	39
3.10	Lienard-Wiechert-Potentiale	42
3.10.1	Kalkül mit der Delta-Funktion	42
4	Appendix	44
4.1	(Integer) Quantum Hall Effect	44
4.1.1	Excursion: charged quantum particles in an E.M. field	47
4.1.2	Homology and cohomology	50
4.1.3	Cohomology of conductance	51
4.2	Residuenkalkül	52
4.2.1	Holomorphe Funktionen	52
4.2.2	Komplexe Kurvenintegrale	52
4.2.3	Analytische Funktionen	53
4.2.4	Isolierte Singularitäten	53
4.2.5	Residuensatz	54
4.3	Fourier-Transformation temperierter Distributionen	55
4.3.1	Temperierte Distributionen	55
4.3.2	Fourier-Transformation auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$	56

Literatur:

H. Kaul, H. Fischer, *Mathematik für Physiker*, Bd. 2 (Teubner-Verlag, 1998)

Kapitel 1: Lebesgue-Integral

Literatur: Fischer & Kaul, Mathematik für Physiker 2 (Teubner, 1998) §8

1.1 Motivation

Für viele Zwecke in Mathematik und Physik benötigt man **vollständige** Funktionenräume.

(Vollständigkeit bedeutet, dass **Cauchy-Folgen** von Funktionen im Funktionenraum konvergieren.)

Beispiel. Die **Wellenfunktionen** der Quantentheorie (in der Schrödinger- oder Orts-Darstellung) sind komplexwertige Funktionen im Ortsraum. Der Quantenkalkül beruht auf einem Hermiteschen

Skalarprodukt $\langle \psi, \phi \rangle := \int \overline{\psi(x)} \phi(x) d^3x$.

Es ist physikalisch wünschenswert (wenn nicht überhaupt nötig), dass Cauchy-Folgen von Wellenfunktionen wieder Wellenfunktionen sind. In diesem Sinn taugen z.B. die stetigen Funktionen nicht als Funktionenraum für die Quantentheorie, denn:

Aufgabe. $f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}$ ist Cauchy-Folge bzgl. der Norm

$\|f_n - f_m\| = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x) - f_m(x)|^2 dx \right)^{1/2}$, aber die Grenzfunktion $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ ist nicht stetig.

Mitteilung/Vorschau. Die Integralbegriffe von Cauchy oder Riemann sind für den gewünschten Zweck (also: Ausdehnung auf vollständige Funktionenräume) ungeeignet.

Tatsächlich ist der Funktionenraum der Quantentheorie (in der Schrödinger-Darstellung) ein sogenannter **Hilbertraum** von Lebesgue-quadratintegrierbaren Funktionen: $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^d)$.

Aus mathematischer Sicht: Voraussetzung gleichmäßiger Konvergenz unerwünscht (da zu restriktiv).

1.2 Die Idee des Lebesgue-Integrals.

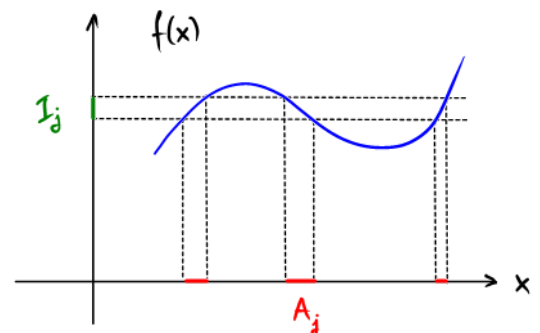
Betrachte den Spezialfall $n=1$ (also Funktionen auf \mathbb{R}).

Wie beim Cauchy- oder Riemann-Integral benütze Rechtecke, allerdings auf andere Weise:

Zerteile den Wertebereich der zu integrierenden Funktion f

in eine endliche Zahl von Intervallen \mathcal{I}_j und setze $A_j := f^{-1}(\mathcal{I}_j)$.

Wähle Werte $k_j \in \mathcal{I}_j$ (z.B. die Mittelwerte) und ordne jeder Menge A_j ein "Maß" $\mu(A_j)$ zu.



Sei f_n die Treppenfunktion mit Wert k_j für $x \in A_j$.

Wenn die Folge von approximierenden Treppenfunktionen f_n gegen f tendiert (Genaueres später), dann ist das Lebesgue-Integral der Grenzwert von $\sum_j k_j \mu(A_j)$ (falls dieser existiert).

1.3 Volumen offener Mengen per Quaderzerlegung.

Def. Ein n -dimensionaler Quader ist das kartesische Produkt $I = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$ von n beschränkten eindimensionalen Intervallen I_j (diese dürfen offen, abgeschlossen, halboffen, einpunktig sein). Das Volumen $V^n(I)$ eines Quaders ist das Produkt der Seitenlängen.

Satz (Existenz einer Quaderzerlegung). Zu jeder offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($\Omega \neq \emptyset$) gibt es eine Folge von kompakten Quadern I_1, I_2, \dots in \mathbb{R}^n mit paarweise disjunkten Inneren ($I_i \cap I_j = \emptyset$ für $i \neq j$), so dass (i) $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ und (ii) jede kompakte Teilmenge von Ω wird bereits durch endlich viele dieser Quader überdeckt.

Beweis (für $n=2$).

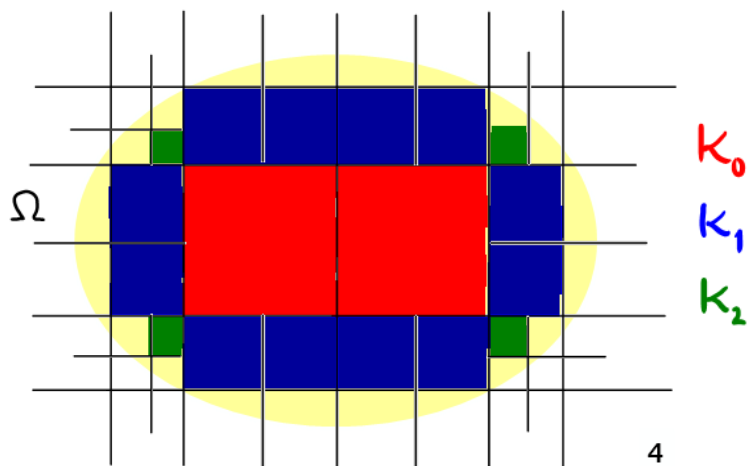
(i) Überziehe \mathbb{R}^2 mit dem Netz aller Geraden $x = k \in \mathbb{Z}$ und $y = l \in \mathbb{Z}$ (\approx kompakte Einheitsquadrate oder Quader "nullter Stufe"). Ziehe alle Halbierungslinien ein (\approx kompakte Quader erster Stufe) usw. usw.

Für $i = 0, 1, 2, \dots$ sei $K_i :=$ Vereinigung aller Quader i -ter Stufe, die innerhalb von Ω liegen, aber nicht in $K_{i-1}, K_{i-2}, \dots, K_0$. Offensichtlich gilt $\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i \subset \Omega$.

Zu zeigen ist $\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$. Sei $x \in \Omega$ und $B_r(x) \subset \Omega$ (Kugel um x mit Radius $r > 0$).

Für $i \in \mathbb{N}$ mit $2^{-i} \cdot \sqrt{2} < r$ liegt jeder x enthaltende Quader i -ter Stufe ganz in $B_r(x) \subset \Omega$,

Somit wird x spätestens durch K_i erfasst. Also gilt $x \in \bigcup_{j=1}^i K_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$ ■



(ii) Beweis als Aufgabe.

Def. Volumen einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:

$$V^n(\Omega) := \sum_{j=1}^{\infty} V^n(I_j) \quad (\text{Quaderzerlegung } \Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j),$$

falls die Summe konvergiert.

1.4. Lebesgue-messbare Mengen

Def. Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt (Lebesgue-)messbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine offene Menge Ω und eine abgeschlossene Menge A gibt mit

$$A \subset M \subset \Omega \quad \text{und} \quad V^n(\Omega \setminus A) < \varepsilon.$$

Für messbare Mengen M definieren wir das Volumen (synonym mit Lebesgue-Maß) durch

$$V^n(M) := \inf \left\{ V^n(\Omega) \mid \Omega \text{ offen, } M \subset \Omega, V^n(\Omega) < \infty \right\},$$

falls es eine offene Obermenge endlichen Maßes gibt; andernfalls $V^n(M) := \infty$.

Beispiel. Abgeschlossene Quader sind messbar.

Das System messbarer Mengen wird mit \mathcal{A} bezeichnet. Es gilt:

(i) $\emptyset, \mathbb{R}^n \in \mathcal{A}$

(ii) $N \subset M \in \mathcal{A} \Rightarrow M \setminus N \in \mathcal{A}$

(iii) $N, M \in \mathcal{A} \Rightarrow M \cap N \in \mathcal{A}$

(iv) $M_k \in \mathcal{A} \ (k=1,2,\dots) \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k \in \mathcal{A}$

(v) σ -Additivität: $V^n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} V^n(M_k)$ für paarweise disjunkte $M_k \in \mathcal{A}$.

Offensichtlich haben eipunktige Mengen das Maß Null. Wegen (iv) & (v) sind dann alle abzählbaren Punktengen Lebesgue-messbar mit Maß Null, so z.B. die Menge \mathbb{Q}^n aller Vektoren in \mathbb{R}^n mit rationalen Komponenten. Nach (ii) enthält \mathcal{A} alle abgeschlossenen Mengen.

Zusatz. Ein System \mathcal{A} mit den genannten Eigenschaften (i)–(v) heißt eine σ -Algebra.

Def. Eine Lebesgue-messbare Menge $N \subset \mathbb{R}^n$ mit $V^n(N) = 0$ heißt (V^n) -Nullmenge.

Äquivalent hierzu ist die folgende Bedingung: zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es endlich viele oder abzählbar viele Quader I_k mit $N \subset \bigcup_k I_k$ und $\sum_k V^n(I_k) < \varepsilon$.

Satz. (i) Jede Teilmenge einer Nullmenge ist eine Nullmenge.

(ii) Sind N_1, N_2, \dots Nullmengen, so auch $\bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$.

Beweis als Übungsaufgabe.

Beispiele von Nullmengen sind: **(i)** Achsenparallele Hyperebenen,

(ii) Graphen stetiger Funktionen $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ auf offenen Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$.

Def. Zwei Funktionen $u, v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer messbaren Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißen **fast überall gleich**, in Formeln: $u(x) = v(x)$ a.e., wenn $\{x \in \Omega \mid u(x) \neq v(x)\}$ eine Nullmenge ist.

Konvergenz fast überall einer Funktionenfolge (u_k) auf Ω bedeutet, dass

$N := \{x \in \Omega \mid (u_k(x)) \text{ konvergiert nicht}\}$ eine Nullmenge ist. In diesem Fall definieren wir

$$u = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k \text{ durch } u(x) := \begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x) & \text{für } x \in \Omega \setminus N, \\ 0 & \text{für } x \in N. \end{cases}$$

Entsprechend vereinbaren wir: bilden die Definitionslücken einer Funktion eine Nullmenge, so schließen wir diese (für die Zwecke der Integration) durch Zuweisung des Funktionswerts Null. In diesem Sinne sind $\frac{1}{u}$ bzw. $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ zu verstehen, falls $u \neq 0$ a.e. bzw. falls u fast überall partiell differenzierbar ist.

1.5 Lebesgue-messbare Funktionen

Die Definition des Lebesgue-Integrals erfolgt zunächst für **integrierbare Elementarfunktionen**,

d.h. für Funktionen $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, die sich in der Form $\varphi = \sum_{k=1}^N c_k \chi_{A_k}$ mit $c_k \in \mathbb{R}$ und $A_k \in \mathcal{A}$ darstellen lassen, wobei die A_k paarweis disjunkte Mengen endlichen Maßes sind.

Mitteilung. Für solche Elementarfunktionen ist das Lebesgue-Integral

$$\int \varphi \equiv \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) d^n x := \sum_{k=1}^N c_k V^n(A_k)$$

unabhängig von der Darstellung. Die charakteristische Funktion einer messbaren Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine integrierbare Elementarfunktion, wenn $V^n(A) < \infty$. Es gilt dann $\int \chi_A = V^n(A)$.

Bemerkung. Für die Dirichlet-Funktion $\chi_{\mathbb{Q}}$ (z.B. in 1 Dimension, $n=1$) hat man $\int \chi_{\mathbb{Q}} = V^1(\mathbb{Q}) = 0$. (Diese Funktion ist kein gleichmäßiger Limes von Treppenfunktionen, liegt also außerhalb der Klasse von Funktionen, die sich mit dem Cauchy'schen Integralbegriff sinnvoll integrieren lassen.)

Def. Eine auf einer messbaren Menge Ω definierte Funktion $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt (Lebesgue-) messbar, wenn für jedes Intervall I das Urbild $f^{-1}(I)$ eine messbare Menge ist.

Beispiele messbarer Funktionen: (i) Elementarfunktionen,
(ii) stetige Funktionen $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ auf messbaren Mengen Ω .

Mitteilung. Die Klasse messbarer Funktionen ist recht groß. (Tatsächlich erfordert der Beweis der Existenz nicht-messbarer Funktionen nicht-konstruktive Mittel.)

Satz. Jede positive messbare Funktion u auf Ω ist punktwiser Limes einer aufsteigenden Folge positiver integrierbarer Elementarfunktionen auf Ω , d.h. es existieren außerhalb von Ω verschwindende integrierbare Elementarfunktionen $\varphi_k \geq 0$ mit

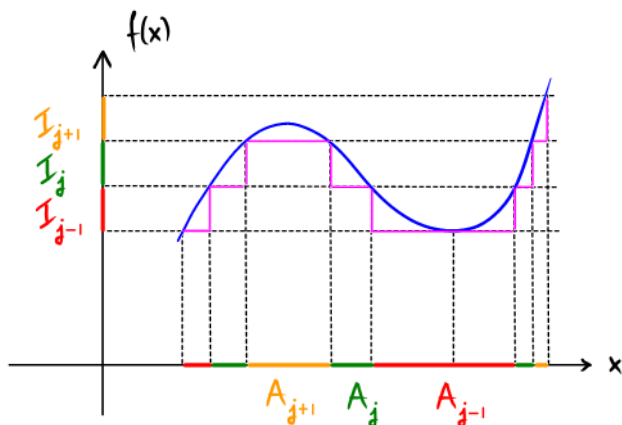
$$\varphi_k(x) \leq \varphi_{k+1}(x) \text{ für } k = 1, 2, \dots \text{ und } u(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(x) \text{ für alle } x \in \Omega.$$

Beweisidee. Unterteile $[0, N] \subset \mathbb{R}$ für $N = 2^m$ durch die äquidistanten Teilpunkte $a_k := \frac{k}{N}$ ($k = 0, 1, \dots, N^2$) in N^2 paarweise disjunkte Teilintervalle $I_0 = [a_0, a_1], \dots, I_k = [a_k, a_{k+1}], \dots$ ($k = 1, \dots, N^2 - 1$).

Da u messbar ist, sind $A_k := u^{-1}(I_k)$ zu A gehörige paarweise disjunkte Mengen.

Die Folge $\varphi_m := \sum_{k=0}^{N^2-1} a_k \chi_{A_k}$ ist eine Folge positiver integrierbarer Elementarfunktionen.

Offensichtlich gilt $\varphi_m \leq \varphi_{m+1}$. Mit den üblichen analytischen Werkzeugen zeigt man die Konvergenz $\varphi_m \rightarrow u$ punktwise auf Ω .



Satz/Def. Für die monoton wachsende Folge $(\int \varphi_k)$ gibt es 2 Fälle:

(i) $(\int \varphi_k)$ ist beschränkt. Dann heißt u über Ω (Lebesgue-) integrierbar und das

Lebesgue-Integral

$$\int_{\Omega} u = \int_{\Omega} u(x) dx := \lim_{k \rightarrow \infty} \int \varphi_k$$

ist unabhängig von der approximierenden Folge.

Beweisidee. Seien (φ_k) und (ψ_k) zwei approximierende Folgen. Dann gilt:

$$\varphi_k(x) \leq \lim_{\ell \rightarrow \infty} \psi_\ell(x) = u(x) \quad \text{und} \quad \psi_k(x) \leq \lim_{\ell \rightarrow \infty} \varphi_\ell(x) = u(x) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \text{ und } x \in \Omega.$$

Das Lebesgue-Integral für integrierbare Elementarfunktionen ist monoton (ohne Beweis, der aber recht leicht ist). Es folgt $\int \varphi_k \leq \lim_{\ell \rightarrow \infty} \int \psi_\ell$ und $\int \psi_k \leq \lim_{\ell \rightarrow \infty} \int \varphi_\ell$.

Aufgabe. Zeige, dass dies stimmt, obwohl der Limes i.a. nicht gleichmäßig ist.

Somit gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} \int \varphi_k \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int \psi_k$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} \int \psi_k \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int \varphi_k$ und die Grenzwerte stimmen überein.

(ii) Die andere Möglichkeit ist, dass die Folge $(\int \varphi_k)$ unbeschränkt ist. Dann gilt dies auch für jede andere gegen u aufsteigende Folge positiver integrierbarer Elementarfunktionen. In diesem Fall heißt die Funktion u nicht über Ω integrierbar ($\int_{\Omega} u = \infty$).

Definition. Eine messbare Funktion $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt (Lebesgue-)integrierbar, wenn die positiven messbaren Funktionen

$$u_+ := \frac{1}{2}(|u| + u), \quad u_- := \frac{1}{2}(|u| - u),$$

im obigen Sinn integrierbar sind. Wir setzen dann

$$\int_{\Omega} u := \int_{\Omega} u_+ - \int_{\Omega} u_-. \quad (\text{Lebesgue-Integral})$$

Für messbare Funktionen $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Integrierbarkeit also äquivalent zur Integrierbarkeit von $|u|$.

Bemerkung. Die Erweiterung zu komplexwertigen Funktionen erfolgt in der offensichtlichen Weise (zerlege nach Real- und Imaginärteil).

1.6 Eigenschaften des Lebesgue-Integrals

(i) **Linearität.** Die integrierbaren Funktionen $u: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ bilden einen \mathbb{K} -Vektorraum, der mit $\mathcal{L}^1(\Omega)$ bezeichnet wird.

(ii) $u \in \mathcal{L}^1(\Omega) \Rightarrow |u| \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ und $\left| \int_{\Omega} u \right| \leq \int_{\Omega} |u|$.

(iii) Für integrierbare Funktionen $u, v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gilt:

$$u \leq v \text{ a.e.} \Rightarrow \int_{\Omega} u \leq \int_{\Omega} v \quad (\text{Monotonie des Integrals}).$$

(iv) Alle im herkömmlichen Sinn (und zwar im **eigentlichen**, nicht etwa im uneigentlichen Sinn) integrierbaren Funktionen sind auch Lebesgue-integrierbar mit gleichem Integral.

„Gegenbeispiel“ zu (iv): $u(x) = \frac{\sin x}{x}$ ist nicht Lebesgue-integrierbar über \mathbb{R} ; also $u \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Hingegen existiert das uneigentliche Integral $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{\sin x}{x} dx$.

(v) Eine messbare Funktion $u: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ ist genau dann über Ω integrierbar, wenn sie eine integrierbare Majorante hat: $|u(x)| \leq f(x)$ a.e. mit $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$.

(vi) Sind die reellwertigen Funktionen u, v über Ω integrierbar, so auch sup $\{u, v\}: x \mapsto \max\{u(x), v(x)\}$ und inf $\{u, v\}: x \mapsto \min\{u(x), v(x)\}$.

(vii) Aus $u \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ und $u = v$ a.e. folgt $v \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ und $\int_{\Omega} v = \int_{\Omega} u$.

(viii) Ist u über Ω integrierbar und $\int_{\Omega} |u| = 0$, so folgt $u = 0$ a.e.

Satz (Lebesgue 1902; majorierte Konvergenz):

Konvergiert eine Folge von Funktionen (u_k) mit $u_k \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ fast überall in Ω und besitzen die u_k eine gemeinsame Majorante $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$, d.h.

$$|u_k(x)| \leq f(x) \quad \text{a.e.} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

so ist $u(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x)$ über Ω integrierbar, und es gilt

$$\int_{\Omega} u = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_k.$$

Bemerkung. Grenzwert und Integral dürfen also (unter der genannten Majorantenbedingung) schon bei punktweiser Konvergenz vertauscht werden! Mit dem herkömmlichen Integralbegriff gelingt der Beweis der Vertauschbarkeit nur unter der stärkeren Voraussetzung der gleichmäßigen Konvergenz. Auf die Majorante kann allerdings nicht verzichtet werden; siehe

Aufgabe. Betrachte die Halbkreisfunktion $\Lambda(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2} & 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$ und setze $f_n(x) := n \Lambda(nx)$. Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx = \frac{\pi}{8} \neq 0 = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$.

Satz (Beppo Levi; 1906). Bilden die Funktionen $u_k \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ eine monoton aufsteigende Folge, und ist die Folge der Integrale $\int_{\Omega} u_k$ nach oben beschränkt, so gibt es eine Funktion $u \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ mit $u(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x)$ a.e. und $\int_{\Omega} u = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_k$.

Mitteilung. Diese Konvergenzsätze erlauben den Beweis der Vollständigkeit geeignet konstruierter Funktionenräume.

1.7 Integrale mit Parameter

Satz (Parameterintegrale). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $\Lambda \subset \mathbb{R}^m$ ein Gebiet, und das Parameterintegral $v(x) = \int_{\Omega} u(x,y) d^n y$ existiere für alle $x \in \Lambda$. Dann gilt

(i) Ist $x \mapsto u(x,y)$ für fast alle $y \in \Omega$ stetig und existiert eine Majorante $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ mit $|u(x,y)| \leq f(y)$ für $(x,y) \in \Lambda \times \Omega$, so ist v stetig in $x \in \Lambda$.

(ii) Ist $x \mapsto u(x,y)$ für fast alle $y \in \Omega$ C^1 -differenzierbar und existieren Majoranten $f_i \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ mit $|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x,y)| \leq f_i(y)$ ($i=1, \dots, m$) für $(x,y) \in \Lambda \times \Omega$,

so folgt die C^1 -Differenzierbarkeit von v in Λ und

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}(x) = \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x,y) d^n y \quad (i=1, \dots, m).$$

Dabei wird der Integrand an den Nichtdifferenzierbarkeitstellen von u gleich Null gesetzt.

Beweis. (i) Für $x \in \Lambda$ sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in Λ mit $x_k \rightarrow x$ für $k \rightarrow \infty$.

Wir setzen $u_k(y) := u(x_k, y)$ und $u_{\infty}(y) := u(x, y)$.

Dann folgt $v(x_k) = \int_{\Omega} u_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_{\infty} = v(x)$ nach dem Satz von Lebesgue.

(ii) Sei $x \in \Lambda$ fest und $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge mit $t_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Wir setzen $w_k(y) := \frac{u(x+t_k e_i, y) - u(x, y)}{t_k}$, falls $x \mapsto u(x, y) \in C^1(\Lambda)$

und $w_k(y) := 0$ sonst. Nach dem Mittelwertsatz gilt $|w_k(y)| \leq f_i(y)$.

Ferner gilt $w_k(y) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x, y) = w(y)$ für alle $y \in \Omega$. Es folgt

$$\frac{v(x+t_k e_i) - v(x)}{t_k} = \frac{1}{t_k} \left(\int_{\Omega} u(x+t_k e_i, y) d^n y - \int_{\Omega} u(x, y) d^n y \right) = \int_{\Omega} w_k$$

$\xrightarrow{\text{Satz von Lebesgue}} \int_{\Omega} w = \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x, y) d^n y$. Also existiert $\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)$ für alle $x \in \Lambda$.

Die Stetigkeit von $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ folgt aus Teilaussage (i).

Beispiel. Für $Qf \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ gilt: $\frac{d}{dk} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ikx} dx = -i \int_{\mathbb{R}} x f(x) e^{-ikx} dx$,

d.h. das PQ-Gesetz $P \tilde{f} = -\tilde{Q} f$ ist gültig.

1.8 Vertauschung der Integrationsreihenfolge

Im Folgenden sei $n = p + q$ und \mathbb{R}^n werde als kartesisches Produkt

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q = \{ (x, y) \mid x \in \mathbb{R}^p, y \in \mathbb{R}^q \} \text{ aufgefasst.}$$

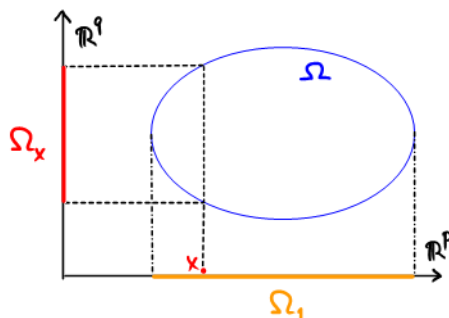
Für die messbare Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ betrachten wir die Mengen

$$\Omega_x := \{ y \in \mathbb{R}^q \mid (x, y) \in \Omega \},$$

$$\Omega_y := \{ x \in \mathbb{R}^p \mid (x, y) \in \Omega \},$$

$$\Omega_1 := \{ x \in \mathbb{R}^p \mid \Omega_x \neq \emptyset \},$$

$$\Omega_2 := \{ y \in \mathbb{R}^q \mid \Omega_y \neq \emptyset \}.$$



Diese Mengen $\Omega_x \subseteq \Omega_2$ und $\Omega_y \subseteq \Omega_1$ sind messbare Teilmengen von \mathbb{R}^q bzw. \mathbb{R}^p .

Satz von Fubini. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar und $u \in \mathcal{L}^1(\Omega)$.

Dann existiert $v(x) := \int_{\Omega_x} u(x, y) d^q y$ für $x \in \Omega_1$, mit eventueller Ausnahme einer Nullmenge $N \subset \Omega_1$.

Setzen wir $v(x) = 0$ für $x \in N$, so ist v über Ω_1 integrierbar, und es gilt

$$\int_{\Omega} u = \int_{\Omega_1} v = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_x} u(x, y) d^q y \right) d^p x.$$

Ganz entsprechend erhalten wir $\int_{\Omega} u = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_y} u(x, y) d^p x \right) d^q y$

und damit die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge.

Bemerkung. Wiederholte Anwendung dieses Satzes ermöglicht die Berechnung von mehrdimensionalen Integralen durch sukzessive eindimensionale Integration.

Satz von Tonelli. Ist $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ messbar und existieren die Integrale $\int_{\Omega_x} |u(x, y)| d^q y$ für fast alle x und existiert auch $\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_x} |u(x, y)| d^q y \right) d^p x$, so ist u über Ω integrierbar und die Integrationsreihenfolge ist nach dem Satz von Fubini vertauschbar.

Beispiel. Demnach ist $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto e^{-|x|(1+y^2)}$ über den \mathbb{R}^2 integrierbar

$$\text{mit Integral } 2\pi: \int_{\mathbb{R}^2} u = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-|x|(1+y^2)} dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{2 dy}{1+y^2} = 2\pi.$$

Das innere Integral $\int_{\mathbb{R}} u(x, y) dy$ existiert nur für $x \neq 0$. Trotzdem gilt

$$\int_{\mathbb{R}^2} u = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-|x|(1+y^2)} dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} \sqrt{\frac{\pi}{x}} dx = 2\sqrt{\pi} \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{\pi} \Gamma(1/2) = 2\pi.$$

Aufgabe. Für die Funktion $u: \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto e^{i\sqrt{|x|}y} \cdot \frac{\sin y}{y}$

gilt $\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} u(x, y) dy \right) dx := \lim_{B \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-B}^B u(x, y) dy \right) dx = 2\pi$.

Andererseits konvergiert das iterierte Integral $\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} u(x, y) dx \right) dy$ (geänderte Reihenfolge!)

nicht. Warum steht dieser Sachverhalt nicht im Widerspruch zum Satz von Lebesgue?

Anwendung: Volumen von Rotationskörpern im E_3

(Cavalieri'sches Prinzip).

Transformationsatz. Sei $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$ ein C^1 -Diffeomorphismus zwischen zwei Ω und Ω' des \mathbb{R}^n ,

ferner sei $A \subset \Omega$ messbar und u über $\varphi(A)$ integrierbar. Dann gilt:

$$\int_{\varphi(A)} u(y) d^n y = \int_A u(\varphi(x)) |\det(D_x \varphi)| d^n x. \quad (\text{Transformationsatz})$$

Konvergiert umgekehrt das rechte Integral, so ist u über $\varphi(A)$ integrierbar, und es gilt wieder der Transformationsatz.

Beweis als Übungsaufgabe.

Anwendungsbeispiel: Zeige $\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx = 1$.

1.9 Der Raum $L^2(\Omega)$

Für Anwendungen (nicht zuletzt in der Physik) ist neben $L^1(\Omega)$ der Raum

$$\mathcal{L}^2(\Omega) = \left\{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ messbar und } |f|^2 \in \mathcal{L}^1(\Omega) \right\}$$

relevant. Für $u, v \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ gilt

$$|\lambda u + \mu v|^2 \leq (|\lambda| |u| + |\mu| |v|)^2 \leq 2(|\lambda|^2 |u|^2 + |\mu|^2 |v|^2).$$

Folglich (Majorantenkriterium) ist $\mathcal{L}^2(\Omega)$ ein \mathbb{K} -Vektorraum.

Für $u, v \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ ist $\bar{u} \cdot v \in \mathcal{L}^1(\Omega)$, ebenfalls nach dem Majorantenkriterium:

$$|\bar{u} \cdot v| = |u| |v| \leq \frac{1}{2} (|u|^2 + |v|^2).$$

Da aus $\int_{\Omega} |f|^2 = 0$ nur folgt, dass f fast überall (statt überall) verschwindet,

ist das **Hermitesche Skalarprodukt** $\langle u, v \rangle := \int_{\Omega} \bar{u} \cdot v$ auf $\mathcal{L}^2(\Omega)$ leider

nicht positiv definit. Man erzwingt diese Eigenschaft durch die folgende

Konstruktion von $L^2(\Omega)$.

Äquivalenzrelation auf $\mathcal{L}^2(\Omega)$: $u \sim v \iff u-v=0$ a.e.

Äquivalenzklassen: $[u] := \{f \in \mathcal{L}^2(\Omega) \mid f \sim u\}$.

Def. Man erklärt $L^2(\Omega)$ als den vergrößerten Raum aller Äquivalenzklassen $[u]$ in $\mathcal{L}^2(\Omega)$.

Aufgabe. $L^2(\Omega)$ ist ein \mathbb{K} -Vektorraum mit Nullvektor $[0]$ und positiv definitem

Skalarprodukt $\langle [u], [v] \rangle := \int_{\Omega} \bar{u} \cdot v$.

Vereinfachte Sprechweise: L^2 -Funktion statt L^2 -Klasse.

L^2 -Norm: $\|u\| \equiv \|u\|_2 := \sqrt{\langle u, u \rangle}$.

Konvergenz bzgl. dieser Norm heißt L^2 -Konvergenz oder Konvergenz im Quadratmittel.

Aufgabe. Wie kommt es zur Dreiecksungleichung für die L^2 -Norm? (Hinweis: Cauchy-Schwarz Ungleichung)
 $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$

Satz (Fischer-Riesz, 1907): $L^2(\Omega)$ ist vollständig bzgl. der L^2 -Norm.

Bem. Vollständigkeit bedeutet: ist (f_k) eine Cauchy-Folge bzgl. der L^2 -Norm, dann existiert eine L^2 -Funktion f mit $\|f_k - f\| \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$.

Def. Ein \mathbb{K} -Vektorraum \mathcal{H} mit Skalarprodukt heißt Hilbertraum, wenn er bzgl. der Norm $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ vollständig ist.

Somit ist $L^2(\Omega)$ (für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) nach dem Satz v. Fischer-Riesz ein Hilbertraum.

Separabilität von $L^2(\Omega)$.

Satz. Für jedes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ liegen die Treppenfunktionen dicht in $L^2(\Omega)$, d.h. zu jedem $u \in L^2(\Omega)$ existiert eine Folge (φ_k) von Treppenfunktionen auf Ω mit $\|\varphi_k - u\| \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$.

Ergänzung. Für das folgende Kapitel benötigen wir den Begriff der lokalen Integrierbarkeit.

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Eine messbare Funktion $f: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ heißt lokalintegrierbar, wenn sie über jede kompakte Teilmenge K von Ω integrierbar ist, d.h. $f \cdot \chi_K \in L^1(\Omega)$.

Den Raum $L^1_{loc}(\Omega)$ erhält man wie oben durch Identifizieren von fast überall gleichen lokalintegrierbaren Funktionen.

Beispiel. Für die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ hat man bekanntlich $f \notin L^1(\mathbb{R})$. Jedoch ist $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

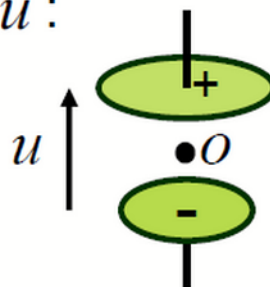
2.1 Motivation

In diesem Kapitel wollen wir die Mathematik zu einer elektrodynamischen Bildershow wie der folgenden entwickeln.

Discharge of a Capacitor (I)

Capacitor with electric dipole moment u :

is discharged instantaneously at time zero.



What's the electromagnetic **signal** emitted?

Charge density in dipole approximation: $\rho = \partial_t(u)\delta$

Total (time integrated) current pulse: $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} j dt = -u\delta$

Discharge of a Capacitor (II)

Wave equation for B : $\square B = \mu_0 \partial \ast j$

Initial value problem: $\square B = 0$ ($t > 0$), and

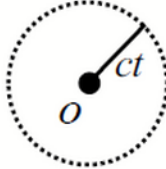
$$B|_{t=0+} = 0, \quad \dot{B}|_{t=0+} = \mu_0 c^2 \partial \ast \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} j dt = -\varepsilon_0^{-1} \partial \ast u\delta$$

Green's function of wave equation:

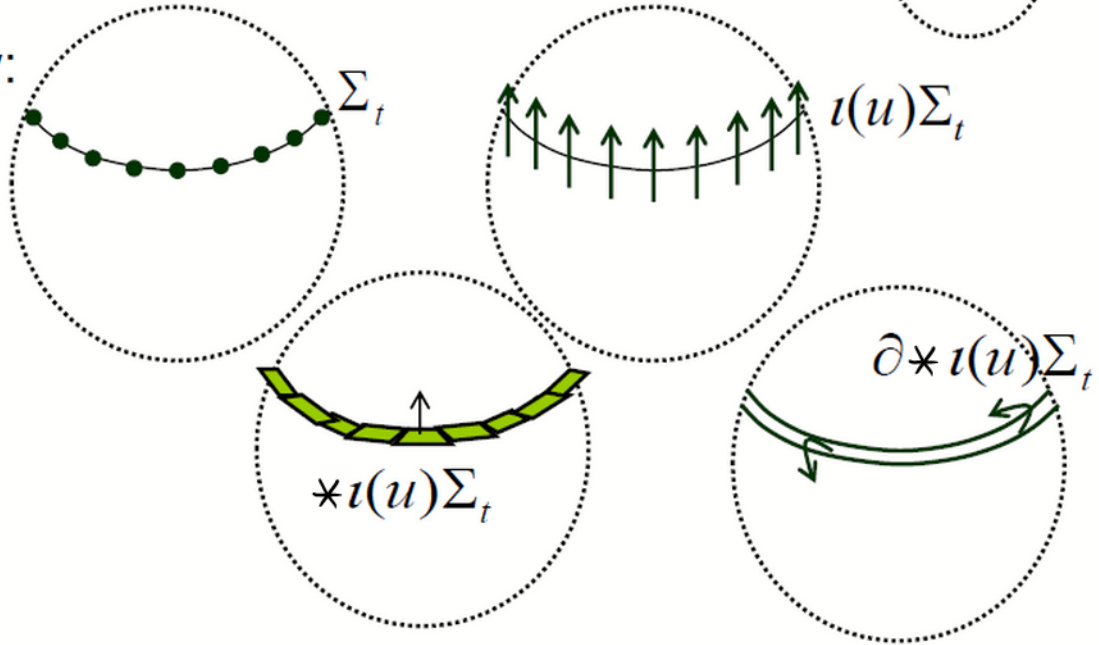
$$\Sigma_t = t \times \left(\text{circle with center } o \text{ and radius } ct \right) \quad (\text{0-chain with total mass } t)$$

$$\text{satisfies } \square \Sigma_t = 0 \quad (t > 0), \quad \Sigma_{t=0+} = 0, \quad \dot{\Sigma}_{t=0+} = \delta$$

Discharge of a Capacitor (III)

Solution: $B|_t = -\epsilon_0^{-1} \partial \times i(u) \Sigma_t$ with $\Sigma_t = t \times$ 

Pictorially:



In formulas:

$$B_{\text{azimut}} = \frac{|\mu| \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\delta(r-ct)}{r} \right)$$

2.2 Testfunktionen

Literatur: Fischer & Kaul, Bd. 2, §10

Die Erweiterung zu verallgemeinerten Funktionen (s. Distributionen) wird dadurch möglich, dass man sie mit sehr gutartigen Funktionen (sog. Testfunktionen) per Integration paart.

Def. Der Träger (engl. support) einer Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C}) ist definiert als

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}} \quad (\text{Abschluss}).$$

für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nichtleer und offen setzt man für $k = 0, 1, 2, \dots, \infty$

$$C_c^k(\Omega) := \{f \in C^k(\Omega) \mid \text{supp } f \text{ ist kompakte Teilmenge von } \Omega\}.$$

$C_c^k(\Omega)$ besteht also aus den C^k -Funktionen mit kompaktem Träger in Ω .

Def. Die Funktionen aus dem Raum $C_c^\infty(\Omega)$ heißen Testfunktionen auf Ω .

Alternative Notation (L. Schwartz): $C_c^\infty(\Omega) \equiv \mathcal{D}(\Omega)$.

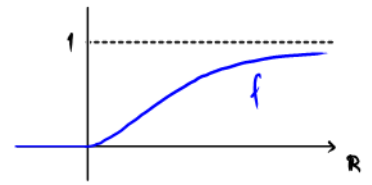
Satz. Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es eine Testfunktion $j_\epsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit

$$j_\epsilon \geq 0, \quad \text{supp } j_\epsilon = \overline{B_\epsilon(0)}, \quad \int j_\epsilon = 1.$$

Beweis (konstruktiv).

$$\text{Die Funktion } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, t \mapsto \begin{cases} e^{-1/t} & t > 0, \\ 0 & t \leq 0, \end{cases}$$

ist auf ganz \mathbb{R} beliebig oft differenzierbar (**Übungsaufgabe**), also $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.



$$\text{Wir definieren } \psi_\varepsilon: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ durch } \psi_\varepsilon(x) := \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-\|x\|^2/\varepsilon^2}\right) & \|x\| < \varepsilon, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für diese Funktion gilt $\psi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\psi_\varepsilon(x) > 0$ für $\|x\| < \varepsilon$ und $\psi_\varepsilon(x) = 0$ sonst.

Die normierte Funktion $j_\varepsilon(x) := \frac{\psi_\varepsilon(x)}{\int_{\mathbb{R}^n} \psi_\varepsilon}$ hat dann die gewünschten Eigenschaften ■

Bemerkung. j_ε heißt **Standardbuckel**. Es gilt $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} j_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0, \\ \infty & x = 0. \end{cases}$

Aus den Standardbuckeln lassen sich durch Translation ($\varphi(x) = j_\varepsilon(x-x_0)$), Multiplikation mit C^∞ -Funktionen, Differentiation und Faltung neue Testfunktionen gewinnen.

Erinnerung an Faltungsintegral: $(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y) v(y) d^n y$.

Aufgabe. (i) Für $u \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$ und $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ existiert das Faltungsintegral $(u * v)(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, und es gilt $u * v = v * u$. (ii) Für $u, v \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ existiert $u * v$ fast überall, und es gilt $u * v = v * u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

Satz. Für $u \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$ und $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ gilt:

(i) $u * v \in C^k(\mathbb{R}^n)$.

(ii) $\frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} (u * v) = \frac{\partial^n u}{\partial x_1 \dots \partial x_n} * v$ für $n \leq k$,

Ableitungen dürfen also bis zu k mal unter Integral gezogen werden.

(iii) $\text{supp}(u * v) \subset \text{supp } u + \text{supp } v = \{x + y \mid x \in \text{supp } u, y \in \text{supp } v\}$.

(iv) Es gilt $j_\varepsilon * v \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Mit $A = \text{supp } v$ gilt insbesondere

$$\text{supp}(j_\varepsilon * v) \subset A_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{dist}(x, A) \leq \varepsilon\} = \bigcup_{a \in A} \overline{B_\varepsilon(a)}.$$

Def. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ lokalintegrierbar. Für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ setze $f(x) = 0$.

Die Schar von Funktionen

$$f_\varepsilon = f * j_\varepsilon, \quad f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) j_\varepsilon(y) d^n y$$

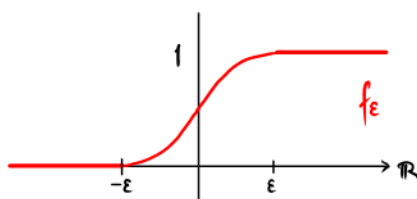
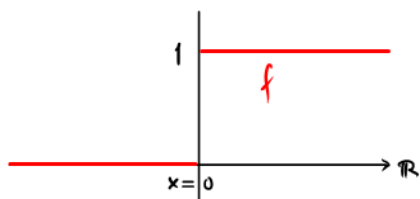
heißt eine Glättung oder **Regularisierung** von f .

Nach obigem Satz gilt $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Beispiel. Für die Heaviside-Funktion $f = \chi_{\mathbb{R}_+}$ ist $f_\varepsilon(x) = 0$ für $x \leq -\varepsilon$ und $f_\varepsilon(x) = 1$ für $x \geq \varepsilon$. Ferner ist f_ε streng monoton wachsend in $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Diese Aussagen folgen unmittelbar

aus der Darstellung

$$f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) j_\varepsilon(y) dy = \int_{-\infty}^x j_\varepsilon(y) dy = \int_{-\varepsilon}^x j_\varepsilon(y) dy.$$



Satz. (i) Sei $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ und $f_\varepsilon = f * j_\varepsilon$.

Für jede kompakte Teilmenge $A \subset \Omega$ gilt dann $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_A |f - f_\varepsilon| = 0$.

(ii) Ist Ω offen und $f \in C^0(\Omega)$ mit $\text{supp } f \subset \Omega$, dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass

$f_r := f * j_r \in C_c^\infty(\Omega)$ für $r < \varepsilon$, und es gilt $f_r \xrightarrow{r \rightarrow 0} f$ gleichmäßig auf Ω .

Korollar. (i) Die Testfunktionen liegen dicht in $L^1_{loc}(\Omega)$ bzgl. der L^1 -Norm.

(ii) Die Testfunktionen liegen dicht in $C_c^0(\Omega)$ bzgl. der Supremumsnorm.

Grundlegend für die Theorie der Distributionen ist der folgende Satz:

Fundamentallemma der Variationsrechnung. Sei $f \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Gilt $\int_{\Omega} f \cdot \varphi = 0$ für alle Testfunktionen $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, so ist $f = 0$ a.e.

Im Spezialfall von $f \in C^0(\Omega)$ gilt die stärkere Aussage (duBois-Reymond) $f \equiv 0$.

2.3 Schwache Lösungen

Literatur: Fischer & Kaul, Bd. 2, §13, no.1

Das Ziel hier ist, einen erweiterten Lösungsbegriff für Differentialgleichungen festzulegen, womit Funktionen auch dann noch Lösungen genannt werden können, wenn sie die von der Differentialgleichung unterstellte Differenzierbarkeitstufe nicht haben (Beispiele folgen).

Notation. Multi-Index $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ mit $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$. $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Zu Koordinatenfunktionen x_1, \dots, x_n des \mathbb{R}^n und Multi-Index α definiere den

Differentialoperator $\partial^\alpha := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$.

Definition. Gegeben sei ein Differentialoperator $L = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \partial^\alpha$ der Ordnung m auf \mathbb{R}^n mit glatten Koeffizienten c_α .

Der zu L **formal adjungierte** Differentialoperator L^* ist erklärt durch

$$L^* = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha c_\alpha.$$

Eine lokalintegrierbare Funktion $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ heißt eine **schwache Lösung** der Differentialgleichung

$Lu = f$ mit Inhomogenität $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, wenn gilt

$$\int_{\Omega} u \cdot L^* \varphi = \int_{\Omega} f \cdot \varphi \quad \text{für alle Testfunktionen } \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Im Unterschied hierzu heißt eine Lösung $u \in C^m(\Omega)$ von $Lu = f$ zu $f \in C^0(\Omega)$ eine **klassische Lösung**.

Aufgabe. Für $f \in C^0(\Omega)$ ist $u \in C^m(\Omega)$ eine schwache Lösung von $Lu = f$ dann und nur dann, wenn u eine klassische Lösung ist.

Beispiel. Sei $v \in C^0(\mathbb{R})$ und $u(x, t) := \frac{1}{2} v(x-ct) + \frac{1}{2} v(x+ct)$.

Dann ist u eine schwache Lösung der eindimensionalen Wellengleichung $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u = 0$

mit $u(x, 0) = v(x)$ und $\dot{u}(x, 0) = 0$ in allen Differenzierbarkeitsternen von v .

Zum **Beweis** verwenden wir **Lichtkegelkoordinaten** $x_{\pm} = x \pm ct$.

Dann lautet die homogene Wellengleichung $Lu = \frac{\partial^2}{\partial x_+ \partial x_-} u = 0$.

Wir setzen $\tilde{u}(x_+, x_-) = u(x, t) = \frac{1}{2} v(x_+) + \frac{1}{2} v(x_-)$. Beachte $L^* = L$.

Integration von \tilde{u} gegen eine beliebige Testfunktion $\varphi(x_+, x_-)$ ergibt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{u} L^* \varphi &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{2} v(x_+) + \frac{1}{2} v(x_-) \right) \frac{\partial^2}{\partial x_+ \partial x_-} \varphi(x_+, x_-) dx_+ dx_- / 2c \\ &= \frac{1}{4c} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{\partial}{\partial x_-} v(x_+) \frac{\partial}{\partial x_+} \varphi(x_+, x_-) + \frac{\partial}{\partial x_+} v(x_-) \frac{\partial}{\partial x_-} \varphi(x_+, x_-) \right) dx_+ dx_- = 0. \end{aligned}$$

Dass die Anfangsbedingungen erfüllt sind, prüft man leicht nach.

2.4 Distributionen Literatur: Fischer & Kaul, Bd. 2, §13, no. 2-3

Dirac (1926) erklärte eine "uneigentliche" Funktion δ durch

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-y) \varphi(y) dy = \varphi(x).$$

Eine solche Funktion kann es im üblichen Sinn nicht geben, denn sie müsste fast überall verschwinden und gleichzeitig Masse $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$ haben, was ein Widerspruch ist.

Die mathematisch korrekte Sichtweise (Schwartz, 1945) ist es, δ als ein stetiges lineares Funktional auf dem Raum der Testfunktionen zu definieren: $\delta_x : \varphi \mapsto \varphi(x)$.

Definition. Auf dem Raum $\mathcal{D} = C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ der komplexwertigen Testfunktionen definieren wir den folgenden **Konvergenzbegriff**:

$$\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \text{ für } k \rightarrow \infty \text{ soll heißen:}$$

Es gibt eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ mit $\text{supp } \varphi_k \subset K$ für $k = 1, 2, \dots$

und für jeden Multi-Index α gilt: $\partial^\alpha \varphi_k \rightarrow \partial^\alpha \varphi$ gleichmäßig für $k \rightarrow \infty$.

Aufgrund dieser Definition ist jeder Differentialoperator $\varphi \mapsto \partial^\beta \varphi$ (Multi-Index β)

ein stetiger Operator auf \mathcal{D} : $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \Rightarrow \partial^\beta \varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \partial^\beta \varphi$ für jedes β .

Eine **Distribution** (oder: verallgemeinerte Funktion) auf \mathbb{R}^n ist eine stetige Linearform

$U : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$, d.h. es gilt: (i) $U(a\varphi + b\psi) = aU\varphi + bU\psi$ für alle $a, b \in \mathbb{C}$ und $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$;

(ii) $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \Rightarrow U\varphi_k \rightarrow U\varphi$ für $k \rightarrow \infty$.

Der Vektorraum der Distributionen wird mit \mathcal{D}' bezeichnet.

Beispiele. (i) Die **Dirac-Distribution** δ_x mit Pol x ist definiert durch $\delta_x \varphi := \varphi(x)$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}$.

Linearität und Stetigkeit sind hier offensichtlich. Statt δ_0 schreiben wir einfach δ .

(ii) Für jeden Multi-Index α ist $\varphi \mapsto (\partial^\alpha \varphi)(x)$ eine Distribution (nämlich, wie wir sehen werden, die Ableitung $(-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \delta_x$ der Dirac-Distribution).

Satz. (i) Jeder lokalintegrierbaren Funktion $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ wird durch $\{u\} \varphi := \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot \varphi$

für alle $\varphi \in \mathcal{D}$ eine Distribution zugeordnet. (Distributionen dieser Form heißen **regulär**.)

(ii) Aus $\{u\} = \{v\}$ folgt $u = v$ a.e.

Bemerkung. Aussage (ii) folgt direkt aus dem Fundamentallemma der Variationsrechnung und besagt, dass

bei der Uminterpretation von Funktionen(klassen) $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ zu Distributionen keine Information verloren geht.

Beweis von (i). Es gelte $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ für $k \rightarrow \infty$. Per Definition des verwendeten Konvergenz-
begriffs existiert dann eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ mit $\text{supp } \varphi_k \subset K$ für alle $k=1,2,\dots$

und man hat gleichmäßige Konvergenz $\varphi_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \varphi$ auf K . Es folgt

$$|\{u\} \varphi_k - \{u\} \varphi| = \left| \int_K u (\varphi_k - \varphi) \right| \leq \max_{x \in K} |\varphi_k(x) - \varphi(x)| \cdot \int_K |u| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Somit ist das lineare Funktional $\{u\} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig.

Beispiele. (i) Für die charakteristische Funktion von \mathbb{R}_+ , $H = \chi_{\mathbb{R}_+}$, ist durch

$$\{u\} \varphi = \int_{\mathbb{R}} H(x) \varphi(x) dx = \int_0^{\infty} \varphi(x) dx \text{ eine reguläre Distribution auf } \mathbb{R} \text{ gegeben (Heaviside-Distribution).}$$

(ii) Für einen Differentialoperator $L = \sum_{|\alpha| \leq m} c_{\alpha} \delta^{\alpha}$ mit C^{∞} -Koeffizienten c_{α} liefert $Lu : \varphi \mapsto \int u \cdot L^* \varphi$
für jede lokalintegrierbare Funktion u eine Distribution. Ist u eine schwache Lösung von $Lu = f$,
so ist die Distribution Lu regulär mit $Lu = \{f\}$.

Def. Jede Distribution, die nicht regulär ist, wird **singulär** genannt.

Aufgabe. Die Dirac-Distribution δ_x ist singulär.

Definition. Die Konvergenz einer Folge $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Distributionen U definieren wir durch

$$U_k \xrightarrow{\mathcal{D}'} U \iff \lim_{k \rightarrow \infty} U_k \varphi = U \varphi \text{ für jede Testfunktion } \varphi \in \mathcal{D}.$$

Beispiele. (i) Sei $U_k = \{f_k\}$ die Folge regulärer Distributionen zu $f_k(x) = \sin(kx)$ ($x \in \mathbb{R}$).

$$\text{Wir haben } \{f_k\} \varphi = \int_{\mathbb{R}} \sin(kx) \varphi(x) dx \stackrel{k > 0}{=} -\frac{1}{k} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \frac{d}{dx} \cos(kx) dx = \frac{1}{k} \int_{\mathbb{R}} \cos(kx) \varphi'(x) dx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Also gilt $U_k \xrightarrow{\mathcal{D}'} 0$ (**Null-Distribution**).

(ii) Für $U_k = \{f_k\}$ mit $f_k(x) = \sin^2(kx)$ folgt (nach $\sin^2(kx) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2kx))$): $U_k \xrightarrow{\mathcal{D}'} \frac{1}{2}$.

Aufgabe. Jede der Funktionenfolgen

$$f_k(x) = j_{1/k}(x) \text{ (Standardbuckel), } f_k(x) = \frac{1}{\pi x} \sin(kx), f_k(x) = \sqrt{\frac{k}{\pi}} e^{-kx^2}, f_k(x) = \frac{k}{2} e^{-k|x|},$$

konvergiert im Distributionensinn gegen die Dirac-Distribution $\delta_0 \equiv \delta$: $\{f_k\} \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta$ für $k \rightarrow \infty$.

2.5 Operationen auf Distributionen. **Literatur:** Fischer & Kaul, Bd.2, §13, no.4

Für eine stetig differenzierbare Funktion $u \in C^1(\mathbb{R})$ gilt

$$\{u'\} \varphi = \int_{\mathbb{R}} u'(x) \varphi(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} u(x) \varphi'(x) dx.$$

Dieser Umstand motiviert die folgende Definition.

Definition. Für eine Distribution $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ und einen Multi-Index α erklären wir die Ableitung $\partial^\alpha U \in \mathcal{D}'$ durch

$$(\partial^\alpha U) \varphi := (-1)^{|\alpha|} U(\partial^\alpha \varphi).$$

Mit dieser Definition können Distributionen beliebig oft differenziert werden.

Differentiation in \mathcal{D}' ist eine stetige Operation – man zeigt leicht:

Aus $U_k \xrightarrow{\mathcal{D}'} U$ für $k \rightarrow \infty$ folgt $\partial^\alpha U_k \xrightarrow{\mathcal{D}'} \partial^\alpha U$ für $k \rightarrow \infty$.

Beispiele. (i) Für die Heaviside-Funktion $H = \chi_{\mathbb{R}_+}$ gilt $\{H\}' = \delta$, denn

$$\{H\}' \varphi = - \{H\} \varphi' = - \int_0^\infty \varphi'(x) dx = \varphi(0) = \delta_0 \varphi \equiv \delta \varphi.$$

(ii) Sei $L = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \partial^\alpha$ ein Differentialoperator mit C^∞ -Koeffizienten und $L^* = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \cdot c_\alpha$

der zu L formal adjungierte Operator. Für jede lokalintegrierbare Funktion $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$

gilt dann $(L\{u\}) \varphi = \{u\} (L^* \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} u L^* \varphi.$

Ist u eine schwache Lösung der Differentialgleichung $Lu = f$, so haben wir $L\{u\} = f$.

(iii) Ein Dipol (mathematisch idealisiert) am Ort x mit Dipolmoment $v = |v|e$ ($\|v\| = 1$)

ist eine Distribution $\rho_{dip} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|v\|}{t} (\delta_{x+te} - \delta_x) = \mathcal{L}_v \delta_x$ (Richtungsableitung $\mathcal{L}_v = v(\cdot) \cdot d$).

Aufgabe. Wie lässt sich im selben mathematischen Rahmen ein Quadrupol modellieren?

Weitere Operationen. (i) Für jede C^∞ -Funktion a auf \mathbb{R}^n und jede Distribution $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

ist durch

$$(a \cdot U) \varphi := U(a \cdot \varphi) \quad \text{eine Distribution } a \cdot U \text{ definiert.}$$

(ii) Für das so erklärte Produkt und einen Differentialoperator L erster Ordnung gilt die Produktregel

$$L(a \cdot U) = (La) \cdot U + a \cdot (LU).$$

Beispiele. (i) $a \cdot \delta_x = a(x) \delta_x.$

(ii) Aus $(a \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} \delta_0) \varphi = (\frac{\partial}{\partial x_k} \delta_0)(a \varphi) = -\frac{\partial}{\partial x_k}(a \varphi)(0) = -\frac{\partial a}{\partial x_k}(0) \varphi(0) - a(0) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(0)$

folgt $a \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} \delta_0 = -\frac{\partial a}{\partial x_k}(0) \delta_0 + a(0) \frac{\partial}{\partial x_k} \delta_0.$

ACHTUNG! Multiplikation einer Distribution mit einer Distribution ist nicht definiert.

Aufgabe. Die Gruppe der Diffeomorphismen $\tau: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ wirkt auf \mathcal{D} durch $(\tau \varphi)(x) := \varphi(\tau^{-1}(x)).$

Wir verlangen, dass die Paarung $\mathcal{D}' \otimes \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}, U \otimes \varphi \mapsto U \varphi,$ zwischen Distributionen und Testfunktionen

unter Diffeomorphismen invariant ist. Wie wirkt dann τ auf $\{\varphi\} \in \mathcal{D}'$ für $\varphi \in \mathcal{D}$?

2.6 Fundamentallösungen. Literatur: Fischer & Kaul, Bd. 2, §13, no. 5

Differentialgleichungen für Distributionen. Sei wieder $L = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \partial^\alpha$ und $L^* = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \cdot c_\alpha$.

Anstelle von schwachen Lösungen von $Lu = f$ ($f \in C^0$) können wir nun distributionswertige Lösungen betrachten: zu vorgegebener Distribution f suchen wir eine Distribution u , so dass

$$Lu = f$$

erfüllt ist. Für u, f regulär gelangen wir zurück zum Begriff der schwachen Lösung, denn

$$L\{u\} = \{f\} \text{ ist (siehe oben) äquivalent zu } \int u \cdot L^* \varphi = \int f \cdot \varphi.$$

Definition. Eine Distribution u heißt **Fundamentallösung** für L an der Stelle $x \in \mathbb{R}^n$

(oder mit **Pol** $x \in \mathbb{R}^n$), wenn $Lu = \delta_x$.

Eine Vereinfachung ergibt sich im Fall von L mit konstanten Koeffizienten:

Ist dann u Fundamentallösung mit Pol x , so ist die translatierte Distribution $\tau_x u$

Fundamentallösung mit Pol 0. [Hierbei ist $(\tau_x u) \varphi = u(\tau_x \varphi)$ und $(\tau_x \varphi)(y) = \varphi(y-x)$.]

Bemerkung. Fundamentallösungen sind nicht eindeutig bestimmt. Ist u Fundamentallösung für L mit Pol x und ist v Lösung der homogenen Differentialgleichung $Lv = 0$, so ist auch $u+v$ Fundamentallösung für L mit Pol x .

Aufgabe ($n=1$). $L = \frac{d^2}{dx^2}$. Eine Fundamentallösung für L mit Pol $a \in \mathbb{R}$ ist $u = \{u\}$ mit

$$u(x) = \frac{1}{2} |x-a|.$$

Beispiel ($n=3$). $L = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ (Laplace-Operator in kartesischen Koordinaten).

Eine FL für $-\Delta$ mit Pol $a \in \mathbb{R}^3$ ist das Newton/Coulomb-Potential $u(x) = \frac{1}{4\pi|x-a|}$ umgedeutet als

Distribution $u = \{u\}$.

Beweis. $(-\Delta \{u\}) \varphi = -\{u\}(\Delta \varphi) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_\varepsilon(a)} u * \Delta \varphi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_\varepsilon(a)} (\varphi * \Delta u - u * \Delta \varphi)$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_\varepsilon(a)} d(\varphi * du - u * d\varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(a)} (u * d\varphi - \varphi * du) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(a)} (-\varphi * d \frac{1}{4\pi r_a})$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B_\varepsilon(a)} \varphi \tau_a = \varphi(a) = \delta_a \varphi \quad \blacksquare$$

Aufgabe ($n=3+1$, Raum-Zeit). Es bezeichne $(x,t) \mapsto \varphi(x,t)$ eine Testfunktion auf $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$.

Die Distribution $u: \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(\cdot, -\frac{1}{c}r(\cdot))}{4\pi r(\cdot)} dvol_3$ ist eine Fundamentallösung für den Wellenoperator

$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ mit Pol $(0,0)$.

Lösung. Zu zeigen ist $(\square U) \varphi \equiv \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\square \varphi(\cdot, -\frac{1}{c}r(\cdot))}{4\pi r(\cdot)} d^3x = \varphi(0,0)$.

Wir benutzen, dass der Wellenoperator \square , die Abstandsfunktion r und das Lebesgue-Maß d^3x alle unter Drehungen des Ortsraums \mathbb{R}^3 invariant sind. Nach Polarzerlegung $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\} = \mathbb{R}_+ \times S^2$,

$d^3x = r^2 dr \wedge \tau$, lässt uns diese Invarianz die Testfunktion $\varphi(\cdot, t): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ durch ihre sphärischen

Mittelwerte $\hat{\varphi}(s, t) := \frac{1}{4\pi} \int_{r(\cdot)=s} \varphi(\cdot, t) \tau$ ersetzen. Unter dieser Mittelung bleibt vom

Wellenoperator \square nur der Radialteil $\square_{r,t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r$ übrig.

Es folgt $(\square U) \varphi = \int_0^\infty \frac{1}{r} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r \right) \hat{\varphi}(r, -r/c) r^2 dr$.

Nun ist es zweckmäßig, das Integral über \mathbb{R}_+ als Parametrisierung eines Integrals über den (Mantel des) rückwärts gerichteten Lichtkegels $C^-: t = -r/c$ mit Kegelspitze in $(0,0)$ zu erkennen. Hiermit ergibt sich

$$(\square U) \varphi = \int_{C^-} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) (r \hat{\varphi}) dr.$$

Ähnlich wie im eindimensionalen Fall gehen wir jetzt zu Lichtkegelkoordinaten über:

$$r_{\pm} = r \pm ct \rightsquigarrow \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} = -4 \frac{\partial^2}{\partial r_- \partial r_+}.$$

Da C^- als Lösungsmenge von $r_+ = 0$ und $r_- > 0$ gegeben ist, dürfen wir das Differential dr_+

in $dr = \frac{1}{2}(dr_+ + dr_-)$ unterm Integral streichen und erhalten

$$\begin{aligned} (\square U) \varphi &= \int_{C^-} \left(-4 \frac{\partial^2}{\partial r_- \partial r_+} \right) (r \hat{\varphi}) \frac{dr_-}{2} = -2 \int_{C^-} dr_- \frac{\partial}{\partial r_-} \left(\frac{\partial}{\partial r_+} r \hat{\varphi} \right) = -2 \int_{C^-} d \left(\frac{\partial}{\partial r_+} r \hat{\varphi} \right) \\ &= 2 \left(\frac{\partial}{\partial r_+} r \hat{\varphi} \right) (0,0) = \hat{\varphi}(0,0) = \varphi(0,0). \quad \text{Q.E.D.} \end{aligned}$$

Satz. Sei $\Gamma: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ eine lokalintegrierbare Fundamentallösung für $L = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \partial^\alpha$ mit Pol $0 \in \mathbb{R}^n$ und konstanten Koeffizienten c_α , und sei $f \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$. Dann ist durch das Faltungsintegral

$$u(x) := (\Gamma * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y) f(y) d^n y$$

eine schwache Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $Lu = f$ gegeben.

Bemerkung. Diese Aussage ist sofort plausibel aufgrund des Superpositionsprinzips für lineare Differentialoperatoren.

Beweis. Wir setzen $\Gamma_x(y) := \Gamma(y-x)$. Wegen der Konstanz der Koeffizienten in L (\wedge Translationsinvarianz) gilt $L\{\Gamma_x\} = \delta_x$, d.h.

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y-x) (L^* \varphi)(y) d^n y \quad \text{für alle Testfunktionen } \varphi \in \mathcal{D}.$$

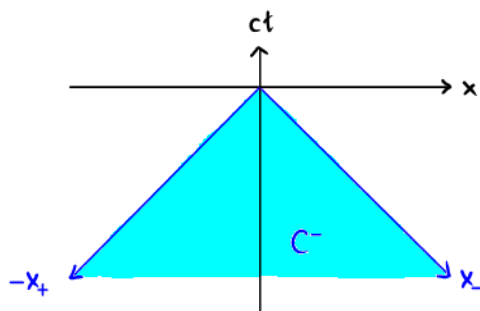
Es folgt

$$\begin{aligned} \{f\} \varphi &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y-x) (L^* \varphi)(y) d^n y \right) f(x) d^n x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y-x) f(x) d^n x \right) (L^* \varphi)(y) d^n y = \int_{\mathbb{R}^n} u(y) (L^* \varphi)(y) d^n y = L\{u\} \varphi. \end{aligned}$$

Beispiel ($n=1$). Wir kennen $\Gamma(x) = \frac{1}{2}|x|$ als Fundamentallösung für $L = \frac{d^2}{dx^2}$ mit Pol 0 .

Nach obigem Satz ist dann $u(x) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |x-y| g(y) dy$ für $g \in C_c^0(\mathbb{R})$ eine schwache Lösung von $\frac{d^2 u}{dx^2} = g$.

Beispiel ($n=1+1$). Sei $\Gamma := \frac{c}{2} \chi_{C^-}: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, wobei C^- der rückwärts gerichtete Lichtkegel (mit Spitze in Null) ist:



Dann ist $(\Gamma * g)(x, t) = \iint_{\mathbb{R}^2} \Gamma(x-x', t-t') g(x', t') dx' dt'$ eine schwache Lösung der inhomogenen Wellengleichung $(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}) f = g$. Hierfür genügt es nach dem obigen Satz zu zeigen, dass $\Gamma = \frac{c}{2} \chi_{C^-}$ eine Fundamentallösung für $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ mit Pol $x=0, t=0$ ist. Den Nachweis führen wir wie folgt.

$$\square \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) = -4 \frac{\partial^2}{\partial x_- \partial x_+}; \quad x_\pm = x \pm ct, \quad dx dt = \frac{1}{2c} dx_+ dx_-.$$

$$\square \{ \Gamma \} \varphi = \iint_{\mathbb{R}^2} \Gamma \square^* \varphi dx dt = \frac{1}{4} \iint_{C^-} \square \varphi dx_+ dx_- = - \iint_{C^-} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_- \partial x_+} dx_+ dx_- = - \int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_- \partial x_+} dx_+ \right) dx_-$$

$$= - \int_0^\infty \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_-} \Big|_{x_+ = 0} \right) dx_- = \varphi(0,0) = \delta_{(0,0)} \varphi, \quad \text{also } \square \{ \Gamma \} = \delta_{(0,0)}.$$

2.7 DeRham-Ströme

Sei M ein Raum (Mannigfaltigkeit) der Dimension n (also $M \stackrel{\text{lokal}}{=} \mathbb{R}^n$).

Mit $\mathcal{A}_c^k(M)$ bezeichnen wir den Vektorraum der Differentialformen vom Grad k auf M , mit kompaktem Träger und von der Differenzierbarkeitsklasse C^∞ . Die Elemente von $\mathcal{A}_c^k(M)$ heißen **Test- k -Formen**.

Wir versehen $\mathcal{A}_c^k(M)$ mit der zu Beginn von Abschnitt 2.4 eingeführten Topologie, d.h. eine Folge von Test- k -Formen konvergiert, wenn jeder ihrer Koeffizienten im Testfunktionensinn konvergiert.

Als Kurznotation verwenden wir $\mathcal{A} := \bigoplus_{k=0}^n \mathcal{A}_c^k(M)$.

Der Dualraum \mathcal{A}' besteht aus den stetigen linearen Funktionalen $T: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$, $\omega \mapsto T[\omega]$.

Er besitzt eine Graduierung $\mathcal{A}' = \bigoplus_{k=0}^n \mathcal{A}'_k$, wobei \mathcal{A}'_k der Dualraum zu $\mathcal{A}_c^k(M) \subset \mathcal{A}$ ist.

Definition (de Rham). Eine stetige lineare Abbildung $\mathcal{A}'_k(M) \ni T: \mathcal{A}_c^k(M) \rightarrow \mathbb{C}$ heißt ein **k -Strom**.

Beispiel 1. Eine k -Kette c in M bestimmt einen k -Strom $T \in \mathcal{A}'_k(M)$ durch $T[\omega] = \int_c \omega$.

Insbesondere bestimmt ein System von Punktladungen q_j an den Orten $p_j \in M$ einen 0-Strom ρ durch

$$\rho[\phi] = \sum_j q_j \phi(p_j) = \text{Energie der Ladungsverteilung } \rho \text{ im elektrischen Skalarpotential } \phi.$$

(Damit dieses Beispiel genau „passt“, ist durch die physikalischen Randbedingungen für $\phi \in C_c^\infty(M)$ zu sorgen.)

Desweiteren bestimmt eine Linie γ , die den elektrischen Strom \mathcal{I} trägt, eine Kette \mathcal{I}_γ und somit einen

1-Strom $j: E \mapsto \mathcal{I} \int_\gamma E = \text{Leistung des elektrischen Feldes } E \in \mathcal{A}'_1(E_3) \text{ an der Stromlinie } j = \mathcal{I}_\gamma$.

Bemerkung. Letzteres Beispiel motiviert die Namensgebung „Strom“.

Beispiel 2. Eine lokalintegrierbare $(n-k)$ -Form η vom ungeraden Typ bestimmt einen k -Strom $T \in \mathcal{A}'_k(M)$ durch

$$T[\omega] = \int_M \eta \wedge \omega. \quad \text{z.B. entspricht einer Dichte } \mu = \chi \cdot \text{dvol} \in \tilde{\Omega}^n(M) \text{ ein 0-Strom } \mu[f] = \int_U f \text{dvol}.$$

Definition. Die Cartan-Ableitung $d: \mathcal{A}'_k(M) \rightarrow \mathcal{A}'_{k-1}(M)$, $T \mapsto dT$ eines k -Stroms T

ist erklärt durch

$$dT[\omega] := (-1)^{n-k+1} T[d\omega].$$

Im Fall, dass der k -Strom T von einer (ungeraden) $(n-k)$ -Form η herrührt (siehe Bsp.2), wirkt die

Cartan-Ableitung wie gewohnt:

$$dT[\omega] = (-1)^{n-k+1} T[d\omega] = (-1)^{\deg(\eta)+1} \int_M \eta \wedge d\omega = \int_M d\eta \wedge \omega.$$

Im Fall $T[\omega] = \int_c \omega$ einer Kette c ist die Cartan-Ableitung gleich dem Randoperator ∂ (mal einem

Vorzeichen): $(-1)^{n-k+1} dT[\omega] = T[d\omega] = \int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega$. Dementsprechend definieren wir $\partial: \mathcal{A}'_k(M) \rightarrow \mathcal{A}'_{k-1}(M)$

durch $\partial T[\omega] := T[d\omega]$. Offenbar gilt dann $\partial = (-1)^{n-k+1} d$ auf $\mathcal{A}'_k(M)$ für $\dim M = n$.

Beispiel. Die Raumwinkelform $\tau^{(a)}$ bzgl. des Punktes $a \in E_3$ ist in a nicht differenzierbar.

Als 1-Form $\tau^{(a)} \in \mathcal{A}_1(E_3)$ aufgefasst kann $\tau^{(a)}$ jedoch sehr wohl differenziert werden.

Aufgabe. $d\tau^{(a)} = 4\pi \delta^{(a)} = -d\tau^{(a)}$ mit $\delta^{(a)} \in \mathcal{A}_0(E_3)$, $\delta^{(a)}[f] = f(a)$.

Resümee. Der Raum $\mathcal{A}_k(M)$ der k -Ströme auf M ist dual zum Raum $\mathcal{A}_c^k(M)$ der Test- k -Formen (vom geraden Typ).

Er umfasst $C_k(M)$ (die k -Ketten mit innerer Orientierung in M)

und $\tilde{\Omega}^{n-k}(M)$ (die $(n-k)$ -Formen vom ungeraden Typ).

Erweiterung. Der Raum $\tilde{\mathcal{A}}_k(M)$ der ungeraden k -Ströme auf M ist dual zum Raum $\tilde{\mathcal{A}}_c^k(M)$ der Test- k -Formen vom ungeraden Typ.

Er umfasst $\tilde{C}_k(M)$ (die k -Ketten mit äußerer Orientierung in M) und $\Omega^{n-k}(M)$ (die $(n-k)$ -Formen vom geraden Typ). Z.B. liegt eine aus Flusslinien $\tilde{\gamma}_i$ bestehende magnetische Feldstärke

$$B = \sum_i \phi_i \tilde{\gamma}_i \text{ in } \tilde{\mathcal{A}}_1(E_3).$$

2.8 Operationen auf deRham-Strömen

Wie zuvor sei M ein Raum der Dimension n .

Wir übertragen jetzt einige Operationen auf Differentialformen in den Raum der deRham-Ströme.

Sternoperator. Mit Bezug auf $*$: $\mathcal{A}_c^k(M) \subset \Omega^k(M) \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}_c^{n-k}(M) \subset \tilde{\Omega}^{n-k}(M)$

definieren wir $*$: $\mathcal{A}_k(M) \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}_{n-k}(M)$ durch $*\tau[\omega] = (-1)^{k(n-k)} \tau[*\omega]$.

Die Wahl des Vorzeichens ist motiviert durch den Spezialfall $\tau[\omega] = \int_M \gamma \wedge \omega$. In diesem Fall ergibt sich

$$*\tau[\omega] = (-1)^{k(n-k)} \int_M \gamma \wedge *\omega = (-1)^{k(n-k)} \int_M \omega \wedge *\gamma = \int_M (*\gamma) \wedge \omega; \quad *\tau \text{ entspricht also } *\gamma.$$

Aufgabe. Betrachte für $M = E_3$ den 1-Ström $\mathcal{A}_1(E_3) \ni \tau: \omega \mapsto \int_\gamma \omega$ zu einem Geradenstück $\gamma \in C_1(E_3)$.

Wie lässt sich $*\tau \in \tilde{\mathcal{A}}_2(E_3)$ als Limes einer Folge von 2-Ketten darstellen? Und wie als Limes einer Folge von Test-1-Formen?

Kontraktion mit Vektorfeld. Mit Verweis auf $\iota(v): \mathcal{A}_c^k(M) \subset \Omega^k(M) \rightarrow \mathcal{A}_c^{k-1}(M) \subset \Omega^{k-1}(M)$

definieren wir $\iota(v): \mathcal{A}_k(M) \rightarrow \mathcal{A}_{k-1}(M)$ durch $\iota(v)\tau[\omega] = (-1)^{n-k+1} \tau[\iota(v)\omega]$. Die Wahl

des Vorzeichens ist wieder motiviert durch den Spezialfall $\tau[\omega] = \int_M \gamma \wedge \omega$. Hier ergibt sich

$$\iota(v)\tau[\omega] = (-1)^{n-k+1} \int_M \gamma \wedge \iota(v)\omega = \int_M (\iota(v)\gamma) \wedge \omega; \quad \iota(v)\tau \text{ entspricht also } \iota(v)\gamma.$$

Aufgabe. Die Bewegung von magnetischem Fluss B mit Geschwindigkeit v induziert bekanntlich eine elektrische Feldstärke $E = \iota(v)B$. Für $B = \sum_i \phi_i \tilde{\gamma}_i \in \tilde{\mathcal{A}}_1(E_3)$ haben wir $E = \iota(v)B \in \tilde{\mathcal{A}}_2(E_3)$.

Wie wird ein solches E als Limes einer Folge von 2-Ketten visualisiert?

Lie-Ableitung. Vektorfeld v \rightsquigarrow Lie-Ableitung $\mathcal{L}_v = v(\cdot)d + d \cdot v(\cdot) : \mathcal{A}_c^k(M) \rightarrow \mathcal{A}_c^k(M)$.

Der entsprechende Operator $\mathcal{L}_v : \mathcal{A}_k(M) \rightarrow \mathcal{A}_k(M)$ auf k -Strömen wird erklärt durch

$$\mathcal{L}_v \tau[\omega] := -\tau[\mathcal{L}_v \omega].$$

Aufgabe. In welchem Sinn passt diese Definition zu der von d und $v(\cdot)$?

Beispiel. Dirac-Distribution $\delta^{(a)} \in \mathcal{A}_0(E_3)$, $\delta^{(a)}[f] = f(a)$.

$$\mathcal{L}_v \delta^{(a)} = d \cdot v(\cdot) \delta^{(a)} = -\partial v(\cdot) \delta^{(a)} = \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1} (\delta^{(a)} - \delta^{(a+tv)}).$$

Äußeres Produkt mit Testform. Für einen k -Strom $\tau \in \mathcal{A}_k(M)$ und eine Test- l -Form $\alpha \in \mathcal{A}_c^l(M)$

definieren wir $\tau \wedge \alpha \in \mathcal{A}_{k+l}(M)$ durch $(\tau \wedge \alpha)[\omega] = \tau[\alpha \wedge \omega]$.

Bemerkung. Wie im Fall von Distributionen ist Multiplikation eines deRham-Stroms τ mit einem zweiten deRham-Strom S nicht definiert. Allerdings kann man z.B. S als Limes einer Folge von Testformen σ_i betrachten und nach der anschaulichen Bedeutung von $\tau \wedge \sigma_i$ fragen. Die nachfolgende Aufgabe illustriert, dass die Folge $\tau \wedge \sigma_i$ unter günstigen Umständen gegen einen deRham-Strom (sagen wir $\tau \wedge S$) konvergieren kann.

Aufgabe. Im E_3 betrachten wir zwei Flächen S und T (mit innerer bzw. äußerer Orientierung), die sich in einer Kurve γ transversal schneiden. Wir deuten T als 2-Strom ($T \in \tilde{\mathcal{A}}_2(E_3)$) und glätten S zu einer Test-1-Form $\sigma_\varepsilon \in \tilde{\mathcal{A}}_c^1(E_3)$ mit Regularisierungsparameter ε , also $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma_\varepsilon = S \in \mathcal{A}_2(E_3)$.

Wie kann man dann in Formeln und Bildern den Limes $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T \wedge \sigma_\varepsilon = \gamma \in \mathcal{A}_1(E_3)$ verstehen?

Laplace-Operator. Wir erinnern an den Laplace-Operator auf k -Formen:

$$\Delta = \delta d + d \delta = (-1)^k (*^{-1} d * d - d *^{-1} d *).$$

Die Übertragung auf deRham-Ströme erfolgt nach dem mittlerweile selbstverständlichen Prinzip, also

$$\Delta \tau[\omega] = \tau[\Delta \omega].$$

Beispiel. Nochmal Dirac-Distribution $\delta^{(a)} \in \mathcal{A}_0(E_3)$. $\Delta \delta^{(a)} = d * d * \delta^{(a)} = \partial * \partial * \delta^{(a)}$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} t^{-2} \sum_{i=1}^3 (\delta^{(a+te_i)} + \delta^{(a-te_i)} - 2\delta^{(a)}).$$

das richtige Vorzeichen $(-1)^k$ ergibt sich aus der Korrespondenz des 0-Stroms $\delta^{(a)}$ zu einer Differentialform vom Grad $k=3$.

Aufgabe. Was ist $\Delta \tau$ (in Formeln und Bildern) für $\tau = v(\cdot) \delta^{(a)} \in \mathcal{A}_1(E_3)$?

Verhalten unter Diffeomorphismen. Alle bisherigen Operationen auf deRham-Strömen waren dem Spezialfall einer

Differentialform ($\tau = \gamma$) nachgebildet. Wir kommen jetzt zu einer Operation, wo es (ausnahmsweise) anders ist:

die Wirkung eines Diffeomorphismus $\psi : M \rightarrow M$ auf deRham-Ströme ist der natürlichen Wirkung einer

Abbildung auf Ketten nachempfunden. Im Spezialfall einer Kette ($\tau = c$) hat man $\tau[\omega] = \int_c \omega$ und

somit $\psi(\tau)[\omega] = \int_{\psi(c)} \omega = \int_c \psi^* \omega = \tau[\psi^* \omega]$. Für einen allgemeinen deRham-Strom τ (nicht notwendig

eine Kette) definiert man dann

$$\psi(T)[\omega] := T[\psi^*\omega].$$

Im Spezialfall einer Differentialform ($T=y$) ergibt sich $\psi(T)[\omega] = T[\psi^*\omega] = \int_M y \wedge \psi^*\omega = \int_M (\psi^{-1})^* y \wedge \omega$, also $\psi: y \mapsto (\psi^{-1})^* y$ (Rückzug mit der inversen Abbildung). Beachte auch, dass die Paarung zwischen k -Strömen T und Test- k -Formen ω unter Diffeomorphismen erhalten bleibt, wenn letztere gleichermaßen transformiert werden: $T[\omega] = \psi(T)[(\psi^{-1})^*\omega]$.

Bemerkung. In diesem Kontext sei auf Folgendes hingewiesen. Die Umdeutung einer lokalintegrierbaren Funktion u auf \mathbb{R}^n als Distribution $\{u\}f = \int_{\mathbb{R}^n} u f d^nx$ geht mit einer Änderung des Verhaltens unter Transformationen einher. [Grund: das Lebesgue-Maß d^nx steckt in $\{u\} \in \mathcal{D}'$, nicht aber in $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.] Hingegen macht es in der vorliegenden Situation für das Transformationsverhalten keinen Unterschied, ob ein deRham-Strom als Limes einer Folge von Testformen oder einer Folge von Ketten gesehen wird — es ist das gleiche. [Grund: die Identifikation $y \leftrightarrow c$ durch $\int_M y \wedge \omega \stackrel{!}{=} \int_c \omega$ ist vollkommen kanonisch; insbesondere bedarf sie keiner Wahl von Lebesgue-Maß oder Orientierung von M .]

Aufgabe. Eine Funktion $f \in \mathcal{D} = \mathcal{A}_c^0(M) \subset \tilde{\mathcal{A}}_n(M)$ lässt sich durch eine Folge von Treppenfunktionen $\sum_i c_i \chi_{V_i}$ und somit durch eine Folge von n -Ketten $\sum_i c_i V_i$ approximieren. Diskutiere das Transformationsverhalten in beiden Fällen (Funktion vs. Kette) und demonstriere die Übereinstimmung.

Dynamik. Wir erinnern an: Vektorfeld $v: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ bestimmt lokalen Fluss $\psi: M \times [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow M$
 $(p, t) \mapsto \psi_t(p)$
 \wedge bestimmt Lie-Ableitung $\mathcal{L}_v = \left. \frac{d}{dt} \psi_t^* \right|_{t=0}$.

Zu einer Differentialform y auf M definieren wir die zeitabhängige Form $y_t := (\psi_t^{-1})^* y$ (Rückzug mit der inversen Flussabbildung). Für die Zeitableitung $\dot{y} \equiv \left. \frac{d}{dt} y_t \right|_{t=0}$ folgt

$$\dot{y} = -\mathcal{L}_v y.$$

Im Fall einer Kette c (oder eines ganz allgemeinen deRham-Stroms T) definiert man natürlich $T_t = \psi_t(T)$, und es folgt dieselbe Gesetzmäßigkeit $\dot{T} = -\mathcal{L}_v T$. **Nachweis** für eine Kette $T=c$:

$$c_t[\omega] = \psi_t(c)[\omega] = \int_{\psi_t(c)} \omega = \int_c \psi_t^* \omega \quad \wedge \quad \dot{c}[\omega] = \left. \frac{d}{dt} \int_c \psi_t^* \omega \right|_{t=0} = \int_c \mathcal{L}_v \omega = c[\mathcal{L}_v \omega] = -\mathcal{L}_v c[\omega].$$

Visualisierung im Fall $T = \delta^{(a)}$: $\dot{T} = -\mathcal{L}_v T = -d_1(v) \delta^{(a)} = d_1(v) \delta^{(a)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} d \left(\overset{vt}{\bullet} \begin{matrix} a \\ \rightarrow \\ a+vt \end{matrix} \right)$.

Beispiele. Wir illustrieren einige der oben eingeführten Operation am Szenario von K1P2 – Abschnitt 7.6.

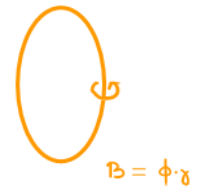
2.8.1 Spule in Ruhe

Sei $\gamma: S^1 \rightarrow E_3$ irgendeine geschlossene Kurve mit äußerer Orientierung.



Wir betrachten die idealisierte Situation einer magnetischen Feldstärke B , die aus

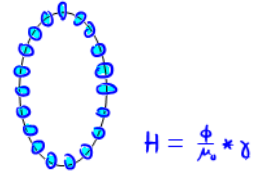
einer einzigen magnetischen Flusslinie längs γ mit Fluss ϕ besteht: $B = \phi \cdot \gamma \in \tilde{\mathcal{A}}_1(E_3)$.



Gemäß Materialgesetz $B = \mu_0 * H$ gehört hierzu eine magnetische Erregung $H = \frac{\phi}{\mu_0} * \gamma \in \mathcal{A}_2(E_3)$.

Dieser deRham-Strom H lässt sich sichtbar machen als Limes einer

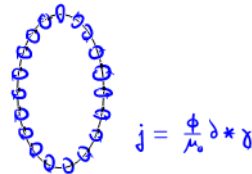
(Folge von) Kette(n), die aus zu γ senkrecht stehenden Flächenstücken besteht.



Alle Flächenstücke bekommen den Zirkulationssinn von γ als innere Orientierung.

Nach dem Ampère-Gesetz $j = dH = \partial H$ der Magnetostatik wird unser H durch die elektrische Stromdichte

$j = \frac{\phi}{\mu_0} \partial * \gamma \in \mathcal{A}_1(E_3)$ verursacht.



2.8.2 Spule in Bewegung

Wir stellen uns jetzt vor, dass unsere Anordnung in Bewegung ist, und zwar gemäß einem

Geschwindigkeitsfeld v . Wir haben dann $\dot{B} = -\mathcal{L}_v B = -d\iota(v)B$. (Hier ist zu betonen, dass dieser Ausdruck für \dot{B} auch im Grenzfall relativistischer Geschwindigkeiten seine Gültigkeit behält, denn magnetischer

Fluss ist eine relativistische Invariante – während der Spulenquerschnitt Lorentz-kontrahiert wird, transformiert sich die magnetische Feldstärke zu einem größeren Wert, so dass der magnetische Fluss ungeändert bleibt).

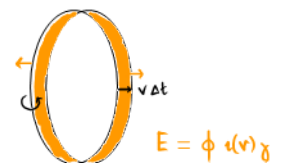
Gemäß Induktionsgesetz $dE = -\dot{B}$ (in Verbindung mit Lokalität) liegt jetzt die elektrische Feldstärke

$E = \phi \iota(v) \gamma = \iota(v) B \in \tilde{\mathcal{A}}_2(E_3)$ vor. Gleichzeitig haben wir nach Materialgesetz

$D = \epsilon_0 * E$ die elektrische Erregung $D = \epsilon_0 \phi * \iota(v) \gamma \in \mathcal{A}_1(E_3)$. Schließlich

folgt aus dem Gaußschen Gesetz $\rho = dD = -\partial D$ die Anwesenheit einer

elektrischen Ladungsdichte $\rho = -\epsilon_0 \phi \partial * \iota(v) \gamma \in \mathcal{A}_0(E_3)$.



Aufgabe. 1. Visualisieren Sie für die bewegte Spule die deRham-Strome $D \in \mathcal{A}_1(E_3)$ und $\rho \in \mathcal{A}_0(E_3)$.

2. Argumentieren Sie auf der Basis der obigen Gleichungen, dass ein magnetisches Dipolmoment μ_m in

Bewegung mit Geschwindigkeit v ein elektrisches Dipolmoment $\mu_e = -\iota(v) \mu_m / c^2$ mit sich zieht.

Ausblick. Spin-Bahn-Kopplung (z.B. Neutronen)... .. Aharonov-Casher-Effekt.

Kapitel 3: Maxwell in Ketten

3.1 Multipolentwicklung

Elektrostatik. Ausgangspunkt: Lösung der Poisson-Gleichung für das elektrische Skalarpotential ϕ :

$$\phi(\rho) = \int_{E_3} \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0 r_p} \quad (\text{supp}(\rho) \text{ kompakt, Eichung } \phi(\infty) = 0) \text{ oder}$$

$$4\pi\epsilon_0 \phi(\rho) = \rho \left[\frac{1}{r_p} \right] \quad (\text{deute die elektrische Ladungsdichte } \rho \text{ als 0-Strom mit kompaktem Träger}).$$

Monopol. $\rho_{(0)} = q \delta^{(a)} \rightsquigarrow 4\pi\epsilon_0 \phi(\rho) = \rho_{(0)} \left[\frac{1}{r_p} \right] = \frac{q}{|p-a|}$.

Dipol. $\rho_{(1)} = -q \mathcal{L}_u \delta^{(a)}$ mit Dipolmoment $q u \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} 4\pi\epsilon_0 \phi(\rho) &= \rho_{(1)} \left[\frac{1}{r_p} \right] = -q \mathcal{L}_u \delta^{(a)} \left[\frac{1}{r_p} \right] = q \delta^{(a)} \left[\mathcal{L}_u \frac{1}{r_p} \right] = -q \delta^{(a)} \left[u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{r_p} \right] \\ &= -q \frac{\sum u^i (a-p)^i}{|a-p|^3} = q \frac{\langle u, p-a \rangle}{|p-a|^3}. \end{aligned}$$

Aufgabe. Quadrupol $\rho_{(2)} = \left((q_u + \frac{1}{2}q_v) \mathcal{L}_{e_u}^2 + (q_v + \frac{1}{2}q_u) \mathcal{L}_{e_v}^2 \right) \delta^{(a)}$

gibt (Haupt-)Quadrupolmomente $(q_u, q_v, -q_u - q_v)$ zu den Hauptachsen $e_u, e_v, e_u \times e_v$:

$$\rho_{(2)} \left[\frac{1}{r_p} \right] = \frac{3}{2} |p-a|^{-5} \left(q_u \langle e_u, p-a \rangle^2 + q_v \langle e_v, p-a \rangle^2 - (q_u + q_v) \langle e_u \times e_v, p-a \rangle^2 \right).$$

Magnetostatik. $B = dA$ ^{Ampère-G.} Poisson-Gleichung für A in Coulomb-Eichung ($d * A = 0$): $-\Delta A = \mu_0 * j$.

Lösung: $A_k(\rho) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{E_3} \frac{(*j)_k}{r_p} d^3x = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{E_3} \frac{j \wedge dx_k}{r_p}$. kein Monopolterm, da $\int_{E_3} j \wedge dx_k = 0$

$$\frac{1}{r_p(\cdot)} = \frac{1}{r(\rho)} + \sum_{\ell} \frac{x_\ell(\rho)}{r^3(\rho)} x_\ell(\cdot) + \dots \rightsquigarrow A_k(\rho) = 0 + \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{\ell} \frac{x_\ell(\rho)}{r^3(\rho)} \int_{E_3} j \wedge x_\ell dx_k + \dots$$

Es folgt $A = \sum_k A_k dx_k = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{\ell} m_{\ell k} \frac{x_\ell}{r^3} dx_k + \dots$ mit $m_{\ell k} = \int_{E_3} j \wedge x_\ell dx_k = -m_{k\ell}$
(magnetisches Dipolmoment: schief-symmetrischer Tensor 2. Stufe).

Idealer magnetischer Dipol. $j = d * u \delta^{(0)}$ (axialer Vektor $u = [\sum_i u_i e_i; \mathbb{R}] = -[\sum_i u_i e_i; \mathbb{L}]$).

Aufgabe. $m_{k\ell} = j [x_k dx_\ell] = \sum_i u_i \epsilon_{ik\ell}$ (epsilon-Tensor).

Multipolentwicklung bis zu allen Ordnungen.

$$e_u = u/|u|, \quad e_v = v/|v|, \quad t = |v|/|u|$$

$$r_p^{-1}(a) = |p-a|^{-1} = |(p-0) - (a-0)|^{-1} \equiv |u-v|^{-1} = (|u|^2 + |v|^2 - 2\langle u, v \rangle)^{-1/2} = |u|^{-1} (1 - 2t \langle e_u, e_v \rangle + t^2)^{-1/2}.$$

Legendre (1782): $(1 - 2t \cos \theta + t^2)^{-1/2} = \sum_{\ell=0}^{\infty} t^\ell P_\ell(\cos \theta)$ Legendre-Polynome P_ℓ ($|t| < 1$).

Additionstheorem: $P_\ell(\langle e_u, e_v \rangle) = \frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}(e_u) \overline{Y_{\ell m}(e_v)}$ Kugelflächenfunktionen $Y_{\ell m}$ (siehe Abschnitt 3.2).

$$\rightsquigarrow r_p^{-1}(a) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{|v|^\ell}{|u|^{\ell+1}} P_\ell(\langle e_u, e_v \rangle) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{|a-0|^\ell}{|p-0|^{\ell+1}} \cdot \frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m} \left(\frac{p-0}{|p-0|} \right) \overline{Y_{\ell m} \left(\frac{a-0}{|a-0|} \right)}.$$

$$\rightsquigarrow \phi(\cdot) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} r^{-\ell-1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m} Q_{\ell m}, \quad Q_{\ell m} = \frac{1}{2\ell+1} \rho \left[r^\ell \overline{Y_{\ell m}} \right] \quad (\text{Multipolmomente } Q_{\ell m}).$$

3.2 Kugelflächenfunktionen (Crashkurs als Service für QM).

engl.: spherical harmonics.

Unser Startpunkt: auf $E_3 \setminus \{0\}$ gilt: $\Delta \frac{1}{r} = 0$.

Laplace-Operator in Kugelkoordinaten:
$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^2},$$

$$\Delta_{S^2} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}.$$

Sei nun \mathcal{L}_ℓ ein Differentialoperator ℓ -ter Ordnung mit den Eigenschaften

- (i) \mathcal{L}_ℓ vertauscht mit dem Laplace-Operator, $\mathcal{L}_\ell \Delta = \Delta \mathcal{L}_\ell$;
- (ii) $\mathcal{L}_\ell \frac{1}{r} = r^{-\ell-1} f_\ell(x/r, y/r, z/r)$ (f_ℓ Polynom ℓ -ten Grades).

Bemerkung. Solche \mathcal{L}_ℓ existieren (siehe unten).

Lemma. f_ℓ ist Eigenfunktion von $-\Delta_{S^2}$ zum Eigenwert $\ell(\ell+1)$.

Beweis. $0 = \Delta \frac{1}{r} = \mathcal{L}_\ell \Delta \frac{1}{r} = \Delta \mathcal{L}_\ell \frac{1}{r} = \Delta \frac{f_\ell}{r^{\ell+1}} = \ell(\ell+1) \frac{f_\ell}{r^{\ell+3}} + \frac{\Delta_{S^2} f_\ell}{r^{\ell+3}}.$

Aufgabe. Seien $u, v \in \mathbb{R}^3$ zwei Einheitsvektoren mit $\langle u, v \rangle = 0$.

Dann hat $\mathcal{L}_\ell = \mathcal{L}_{u+iv}^\ell$ die genannten Eigenschaften (i) & (ii).

Beispiel. Wähle $u = e_z, v = e_x$. Dann gilt $\mathcal{L}_{u+iv} = \frac{\partial}{\partial z} + i \frac{\partial}{\partial x}$ (auf Funktionen),

und man hat $\mathcal{L}_{e_z+ie_x} \frac{1}{r} = -\frac{z+ix}{r^3}$. Mit $\mathcal{L}_{e_z+ie_x}^2 (z+ix) = \left(\frac{\partial}{\partial z} + i \frac{\partial}{\partial x}\right)(z+ix) = 0$ folgt $\mathcal{L}_{e_z+ie_x}^2 \frac{1}{r} = +3 \frac{(z+ix)^2}{r^5}$, und Iteration ergibt $\mathcal{L}_\ell \frac{1}{r} = \mathcal{L}_{e_z+ie_x}^\ell \frac{1}{r} = (-1)(-3)\dots(-2\ell+1) \frac{(z+ix)^\ell}{r^{2\ell+1}}.$

Hiermit erhalten wir $f_\ell(a, b, c) = \text{const} \cdot (c+ia)^\ell$.

Korollar. Die Funktion $f_\ell = (\cos \theta + i \sin \theta \cos \phi)^\ell$ ist Eigenfunktion von $-\Delta_{S^2}$ zum Eigenwert $\ell(\ell+1)$.

Kugelflächenfunktionen $Y_{\ell m}$ erhält man durch Entwicklung: $f_\ell = \sum_{m=-\ell}^{+\ell} c_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ mit $Y_{\ell m}(\theta, \phi + \alpha) = e^{im\alpha} Y_{\ell m}(\theta, \phi)$.

Also $Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \text{const} \cdot \int_0^{2\pi} d\alpha e^{-im\alpha} f_\ell(\theta, \phi + \alpha)$. Normierung: $\int_{S^2} |Y_{\ell m}(\theta, \phi)|^2 \sin \theta d\theta d\phi = 1$.

Beispiele. $Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, Y_{1\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\phi}, Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1), \dots$

Eigenschaften. $L^2 Y_{\ell m} = \hbar^2 \ell(\ell+1) Y_{\ell m}, L^2 = -\hbar^2 \Delta_{S^2}$ (Operator des Drehimpulsquadrats),

$$L_z Y_{\ell m} = \hbar m Y_{\ell m}, L_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (z\text{-Komponente des Drehimpulses),}$$

$$\int_{S^2} \overline{Y_{\ell m}(\theta, \phi)} Y_{\ell' m'}(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}. \quad (\text{Orthonormalsystem}).$$

Die Kugelflächenfunktionen bilden ein vollständiges System für $L^2(S^2)$.

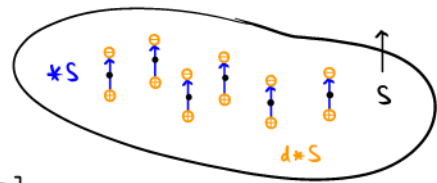
Vorzeichenkonvention: $\overline{Y_{\ell m}} = (-1)^m Y_{\ell, -m}$. Condon-Shortley-Phase?

Aufgabe. Beweise $L^2 Y_{\ell m} = \hbar^2 \ell(\ell+1) Y_{\ell m}$. Bestimme den Ausdruck für Y_{21} .

3.3 E.M. Statik mit dR-Strömen

Elektrische Dipolschicht. Sei S eine Fläche im E_3 mit äußerer Orientierung.

Deute S als dR-Strom $S \in \tilde{\mathcal{A}}_2(E_3)$. Dann ist $\rho = \nu d*S \in \mathcal{A}_0(E_3)$ die elektrische Ladungsdichte einer (idealen) Dipolschicht mit $\nu = \text{Dipolmoment/Fläche}$.



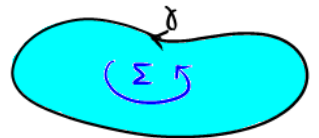
Potential der Dipolschicht (Eichung $\phi(\infty) = 0$):

$$4\pi\epsilon_0 \phi(p) = \rho \left[\frac{1}{r_p} \right] = \nu d*S \left[\frac{1}{r_p} \right] = \nu *S \left[-d \frac{1}{r_p} \right] = \nu S \left[* \frac{dr_p}{r_p^2} \right]$$

↳ $\phi(p) = \frac{\nu}{4\pi\epsilon_0} \int_S \tau_p$. Das elektrische Skalarpotential $\phi(p)$ der Dipolschicht ist also gleich $\nu/4\pi\epsilon_0$ mal dem Raumwinkel, unter dem die Fläche S vom Punkt p aus gesehen wird.

Aufgabe. Im Fall einer geschlossenen Fläche ($\partial S = 0$) gilt $\phi(p) = 0$ für p außerhalb von S und $\phi(p) = \nu/\epsilon_0 = \text{const}$ für p innerhalb von S . In diesem Fall hat man $E = \nu S/\epsilon_0$ und $D = \nu *S$.

Stromschleife. Sei γ eine orientierte Kurve im E_3 . Wir deuten γ als dR-Strom $\gamma \in \mathcal{A}_1(E_3)$ und fabrizieren hiermit eine elektrische Stromdichte $j = \mathcal{I}\gamma \in \mathcal{A}_1(E_3)$ mit elektrischem Strom \mathcal{I} .



Zu lösen ist die magnetostatische Aufgabe $dH = j$, $B = \mu_0 *H$, $dB = 0$.

Unser Lösungsverfahren beginnt hier mit der Wahl einer orientierten Fläche Σ , die von γ berandet wird ($\partial\Sigma = \gamma$).

Damit machen wir für die magnetische Erregung den Ansatz $H = \mathcal{I}\Sigma + d\psi$, wodurch das Ampère-Gesetz bereits erfüllt ist: $dH = d(\mathcal{I}\Sigma + d\psi) = \mathcal{I}\partial\Sigma = \mathcal{I}\gamma = j$. Dieser Ansatz für H führt das magnetische Skalarpotential ψ ein. (Achtung: ψ ist nur auf $E_3 \setminus \Sigma$ definiert.)

Eine Bestimmungsgleichung für ψ erhalten wir durch Einsetzen des Ansatzes in $dB = 0$:

$$0 = \mu_0^{-1} dB = d *H = d *(\mathcal{I}\Sigma + d\psi) = \mathcal{I} d*\Sigma + d*d\psi. \text{ Es folgt, dass } \psi \text{ der}$$

Poisson-Gleichung $-\Delta\psi = \mathcal{I} *d*\Sigma$ genügt.

Aufgabe. Berechne ψ in Analogie zum Fall der elektrischen Dipolschicht. Worin besteht der Unterschied zur Dipolschicht?

Bemerkung. Ein in der älteren Literatur übliches Verfahren schneidet aus dem nicht einfach zusammenhängenden Gebiet $E_3 \setminus \gamma$ eine Fläche Σ (mit $\partial\Sigma = \gamma$) heraus und betrachtet das resultierende Gebiet $E_3 \setminus \Sigma$

(das einfach zusammenhängend ist). Auf $E_3 \setminus \Sigma$ darf man (nach Poincaré-Lemma) ansetzen: $H = d\psi$.

(Hingegen bekäme man auf $E_3 \setminus \gamma$ sofort einen Widerspruch: $\mathcal{I} = \int j = \int H = \int d\psi = 0$?) Die Lösung für ψ ist dann über Σ unstetig mit Sprung \mathcal{I} (Stromstärke). Unsere Gesamtlösung $H = \mathcal{I}\Sigma + d\psi$ ist dagegen glatt auf ganz $E_3 \setminus \gamma$: der singuläre Teil des 2-Stroms $d\psi$ wird durch $\mathcal{I}\Sigma$ genau kompensiert.

Zusatz. Demonstriere rechnerisch die Regularität von $H = \mathcal{I}\Sigma + d\psi$. Was ist folglich die genaue geometrische Bedeutung der ungeraden 1-Form $H = \mathcal{I}\Sigma + d\psi$?

Aufgabe. Das Magnetfeld im Außenraum einer dünnen stromtragenden Spule ($j = m d*\gamma$) ist wie das Feld zweier magnetischer Monopole (mit verschiedenen Händigkeiten), die an den Spulenden sitzen.

Lösungsstrategien (Zusammenfassung).

Strategie 1. Löse die homogene Gleichung durch Einführung eines Potentials. Bestimme das Potential so (nach Verwendung des Materialgesetzes), dass auch die inhomogene Gleichung erfüllt ist.

(i) Elektrostatik. Löse $dE = 0$ durch Potentialansatz $E = -d\phi$. Setze $D = \epsilon_0 * E = -\epsilon_0 * d\phi$ in das Gaußsche Gesetz ein: $\rho = dD = -\epsilon_0 d*d\phi$. Löse diese Poisson-Gleichung für ϕ .

(ii) Magnetostatik. Löse $dB = 0$ durch den Potentialansatz $B = dA$. Setze $H = \mu_0^{-1} * B = \mu_0^{-1} * dA$ in das Ampère'sche Gesetz ein: $j = dH = \mu_0^{-1} d*dA$. Mit Wahl der Coulomb-Eichung $d*A = 0$ folgt wieder eine Poisson-Gleichung: $-\Delta A = \mu_0 * j$.

Strategie 2. Löse die inhomogene Gleichung durch einen singulären Ansatz (evtl. mit fiktiver Singularität) plus eine geschlossene Form. Bestimme letztere mittels Materialgesetz und Einsetzen in die homogene Gleichung.

(i) Magnetostatik. Löse $j = dH$ durch einen Ansatz $H = H_s + d\psi$ mit $dH_s = j$. Einsetzen von $B = \mu_0 * H = \mu_0 * (H_s + d\psi)$ in $dB = 0$ führt auf die Poisson-Gleichung $-d*d\psi = d*H_s$.

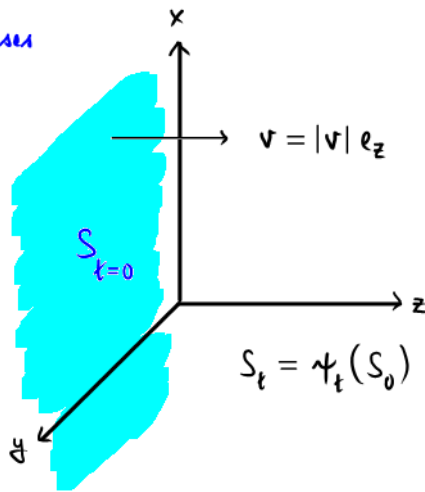
(ii) Elektrostatik. Löse $\rho = dD$ durch einen Ansatz $D = D_s + d\psi$ mit $dD_s = \rho$ und einer zu bestimmenden 1-Form ψ vom ungeraden Typ. ...

Aufgabe. Welche Bestimmungsgleichung folgt aus $dE = 0$ für ψ nach Wahl der Eichung $d*\psi = 0$?

Wie ist ψ zu interpretieren?

3.4 Propagation eines ebenen Lichtpulses

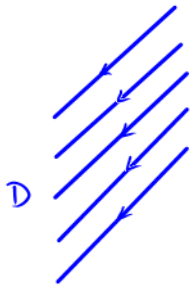
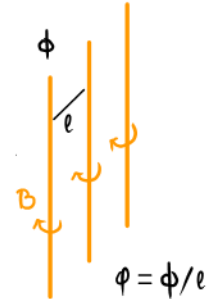
$S_{t=0} = xy$ -Ebene
(mit "äußerer Orientierung durch e_z ")



$S_t = \psi_t(S_0)$ (ψ_t Fluss von v).

Ansatz für die magnetische Feldstärke: $B = \varphi S_t \wedge dy$ (φ Magnetfluss/Länge)

$\dot{B} = -\mathcal{L}_v B$ \wedge induzierte elektrische Feldstärke $E = \iota(v) B$



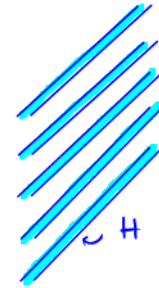
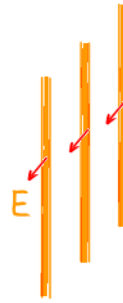
Materialgleichung \wedge
elektrische Erregung $D = \epsilon_0 * E$

Ampère-Maxwell

$\dot{D} = -\mathcal{L}_v D = -d\iota(v) D = dH$

$\wedge H = -\iota(v) D = \varphi \epsilon_0 |v|^2 (-\iota(e_z) * \iota(e_z)) (S_t \wedge dy)$

Aufgabe = $\varphi \epsilon_0 |v|^2 * (S_t \wedge dy)$



Also (Selbstkonsistenz)

$\varphi S_t \wedge dy = B = \mu_0 * H = \varphi \epsilon_0 \mu_0 |v|^2 S_t \wedge dy$

$\wedge \epsilon_0 \mu_0 |v|^2 = 1$ oder $|v| = c$.

Aufgabe. Warum ist ein solches elektromagnetisches Signal (s.o.) im Labor schwer zu erzeugen?

Wie kann man das Signal modifizieren, um näher an die experimentelle Realisierbarkeit zu kommen?

3.5 Das Feynman'sche Paradoxon

Siehe ED-Skript von 1998, Seite 174.

3.5 Symmetrien & Erhaltungssätze (ED).

Ist T eine geschlossene 3-Form in der vierdimensionalen Raum-Zeit (gilt also $dT=0$ für $T = \sum T_{\mu\nu\lambda} dx_\mu \wedge dx_\nu \wedge dx_\lambda$), so folgt ein Erhaltungssatz: in einer Raum-Zeit-Zerlegung $d = d + dt \wedge \frac{\partial}{\partial t}$ mit $T = u - s \wedge dt$ nimmt $dT=0$ die Form einer Kontinuitätsgleichung an, $i + ds = 0$, und es folgt $\frac{\partial}{\partial t} \int_{E_3} u = - \int_{E_3} ds = 0$ (falls $\text{supp}(s)$ kompakt).

Um Erhaltungssätze für die Elektrodynamik zu gewinnen, suchen wir jetzt nach geschlossenen 3-Formen T auf M_4 .

Erhaltene Ströme aus Poincaré-Symmetrien.

Für ein (zunächst) beliebiges Vektorfeld $\xi: M_4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ betrachte die 3-Form

$$T_\xi := \frac{1}{2} F \wedge i(\xi) G - \frac{1}{2} G \wedge i(\xi) F.$$

Hierbei ist $F = B + E \wedge dt \in \Omega^2(M_4)$ die Faraday-Form und $G = D - H \wedge dt \in \tilde{\Omega}^2(M_4)$ die Maxwell-Form.

Nun berechnen wir $2 dT_\xi = F \wedge d i(\xi) G - G \wedge d i(\xi) F - d G \wedge i(\xi) F$

$$= F \wedge \mathcal{L}_\xi G - G \wedge \mathcal{L}_\xi F - F \wedge i(\xi) J - J \wedge i(\xi) F.$$

Mit $G = -\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} * F$ und $\alpha \wedge * \beta = \beta \wedge * \alpha$ hat man

$$F \wedge \mathcal{L}_\xi G - G \wedge \mathcal{L}_\xi F = -\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} (F \wedge \mathcal{L}_\xi * F - F \wedge * \mathcal{L}_\xi F).$$

Hiermit folgt $dT_\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} F \wedge (* \mathcal{L}_\xi - \mathcal{L}_\xi *) F - F \wedge i(\xi) J.$

Nehmen wir jetzt ξ als das erzeugende Vektorfeld einer 1-Parametergruppe von Poincaré-Transformationen, dann gilt $* \mathcal{L}_\xi - \mathcal{L}_\xi * = 0$, und wir erhalten

$$dT_\xi = -F \wedge i(\xi) J.$$

In Abwesenheit von Materie ($J=0$) ergeben sich Erhaltungssätze:

1. **Energie.** $\xi = \frac{\partial}{\partial t} \wedge T_\xi = u - s \wedge dt$, $u = \frac{1}{2} (E \wedge D + B \wedge H)$, $s = E \wedge H.$

2. **Impuls.** (z.B. x-Komponente) $\xi = \frac{\partial}{\partial x} \wedge$ x-Impulsdichte = $B \wedge i(\partial_x) D$,
 x-Impulsstromdichte = $\frac{1}{2} (B \wedge i(\partial_x) H + D \wedge i(\partial_x) E + H \wedge i(\partial_x) B + E \wedge i(\partial_x) D).$

Aufgabe. Ermittle die Ausdrücke für die z-Drehimpulsdichte und die z-Drehimpulsstromdichte des elektromagnetischen Feldes. Diskutiere (auf der Basis von $dT_\xi = -F \wedge i(\xi) J$) den Drehimpulssatz in Anwesenheit geladener Materie ($J \neq 0$).

3.6 Strahlung einer monochromatischen Quelle

Ziel: Berechne das Strahlungsfeld einer oszillierenden Ladungs-/Stromverteilung (z.B. Radio-Antenne oder klassisches Elektron auf einer atomaren Keplerbahn).

3.6.1 Elektrische Dipolstrahlung

$\rho^{(0)}$ = zeitunabhängige Ladungsdichte, $\text{supp } \rho^{(0)} \subset U$ (kompakt und zusammenhängend).

Sei $\int_U \rho^{(0)} = 0$. Dann existiert $P \in \tilde{\Omega}^2(U)$ mit $-dP = \rho^{(0)}$.

Betrachte zeitabhängige Situation $\rho = -\dot{f}(t) dP$, $j = \dot{f}(t) P$, $f(t) = \cos(\omega t)$.
(harmonisch)

Zw (direkten und einfachen) Berechnung des Strahlungsfeldes verwenden wir eine spezielle Lösung der Wellengleichung, nämlich den zeitabhängigen 0-Strom $\psi_t \in \mathcal{A}_0(E_3)$,

$$\psi_t := * \frac{\cos(kr - \omega t)}{4\pi r} \text{ für } k = \omega/c.$$

Aufgabe. $\square \psi_t = \cos(\omega t) \delta^{(0)}$ (Wellenoperator \square , Koordinatenursprung o).

Annahme: lineare Ausdehnung L der Strahlungsquelle viel kleiner als r (Abstand zum Beobachter) und $\lambda = c/\omega$ (Wellenlänge der Strahlung).

Betrachte Limes $L \rightarrow 0$ als idealer Dipol $P = \iota(u) \delta^{(0)}$ (Dipolmoment u).

Ladungsdichte $\rho = -\cos(\omega t) d\iota(u) \delta^{(0)}$, Stromdichte $j = -\omega \sin(\omega t) \iota(u) \delta^{(0)}$.

Elektrische Erregung D genügt der Wellengleichung $\square D = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial j}{\partial t} - \delta \rho$ ($\delta = *d*$).

Inhomogenität: $-\frac{1}{c^2} \frac{\partial j}{\partial t} - \delta \rho = \cos(\omega t) (k^2 + \delta d) \iota(u) \delta^{(0)}$.

als Lösung für D : $D = (k^2 + \delta d) \iota(u) \psi_t$.

Durch nochmalige Verwendung von $\square \psi_t = \cos(\omega t) \delta^{(0)}$ folgt

$$D = (k^2 + \Delta - d\delta) \iota(u) \psi_t = -d\delta \iota(u) \psi_t \text{ (auf } E_3 \setminus \{o\} \text{)}.$$

Expliziter Ausdruck im Fall von $u = |u| e_z$:

$$D = d*d*\iota(u)* \frac{\cos(kr - \omega t)}{4\pi r} = |u| d*d \left(\frac{\cos(kr - \omega t)}{4\pi r} dz \right)$$

$$= -|u| d* \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{\cos(kr - \omega t)}{4\pi r} dr \wedge r \sin\theta d\theta \right)$$

$$* (dr \wedge r d\theta) = r \sin\theta d\tilde{\phi}, \quad = -|u| d \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{\cos(kr - \omega t)}{4\pi r} \cdot r \sin^2\theta d\tilde{\phi} \right)$$

$$d\tilde{\phi} = [d\phi, R]$$

$$\text{Elektrische Feldstärke: } E = \frac{1}{\epsilon_0} *D = \frac{|u|}{\epsilon_0} \left(\sin\theta d\theta \frac{\partial}{\partial r} \circ r - \frac{2}{r} \cos\theta dr \right) \frac{\partial}{\partial r} \frac{\cos(kr - \omega t)}{4\pi r}.$$

Magnetische Erregung. $\square H = -\delta j = -\omega \sin(\omega t) * d * \epsilon(u) \delta^{(0)}$.

Vergleiche mit $\square \psi_t = \cos(\omega t) \delta^{(0)} \rightsquigarrow H = \frac{\partial}{\partial t} * d * \epsilon(u) \psi_t$.

Aufgabe. $H = -|u| \omega \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\sin(kr - \omega t)}{4\pi r} \right) r \sin^2 \theta d\tilde{\phi}$.

Bemerkung. Unsere Ausdrücke für E und H sind exakt (im Limes $L \rightarrow 0$ einer kleinen Quelle). Insbesondere erfüllen sie die Maxwell-Gleichungen.

Fernzone. Spezialisieren jetzt zu $kr \gg 1$ (Abstand viel größer als Wellenlänge).

Dann resultiert

$$E \approx -\frac{|u| k^2}{4\pi \epsilon_0} \cos(kr - \omega t) \sin \theta d\theta,$$

$$H \approx -\frac{|u| k \omega}{4\pi} \cos(kr - \omega t) \sin^2 \theta d\tilde{\phi}.$$

Verhalten als Funktion von Abstand und Winkel: $|E| \sim |H| \sim \frac{\sin \theta}{r}$ (Dipol!).

Energiestromdichte im Zeitmittel ($\langle \cos^2 \rangle = \frac{1}{2}$): $\langle s \rangle = \langle E \wedge H \rangle = \frac{|u|^2 k^3 \omega}{32\pi^2 \epsilon_0} \sin^2 \theta$. ↙ Raumwinkelform

Beachte die starke Frequenzabhängigkeit $\langle s \rangle \sim \omega^4$. Sie gilt nicht nur für die hier berechnete Emissionsrate sondern auch für die Absorptionsrate und erklärt somit, "warum der Himmel blau ist".

Aufgabe. Wie groß ist die Gesamtrate abgestrahlter Energie?

3.6.2 Magnetische Dipolstrahlung

Stromdichte eines idealen magnetischen Dipols am Ort o mit Dipolmoment m : $j^{(0)} = d * \epsilon(m) \delta^{(0)}$.

Oszillierender Dipol: $j = \cos(\omega t) d * \epsilon(m) \delta^{(0)}$, $g \equiv 0$.

Wellengleichung für B: $\square B = \mu_0 d * j = \mu_0 \cos(\omega t) d * d * \epsilon(m) \delta^{(0)}$.

Aus dem Vergleich mit $\square \psi_t = \cos(\omega t) \delta^{(0)}$ deduzieren wir wieder die Lösung: $B = -\mu_0 d \delta \epsilon(m) \psi_t$.

Das ist im Wesentlichen der gleiche Ausdruck wie der für D im elektrischen Dipolfall. Folglich gilt

$$\boxed{\frac{1}{|u|} D^{(E1)} = \frac{1}{\mu_0 |m|} [B^{(M1)}; Or]}$$

Das Superkript E1 (M1) steht für elektrische (magnetische) Dipolstrahlung.

Die Orientierung ($Or = R$ oder L) wird durch den polaren Vektor des elektrischen Dipolmoments in Kombination mit dem axialen Vektor des magnetischen Dipolmoments bestimmt.

Aufgabe. $\frac{1}{|u|} H^{(E1)} = -\frac{1}{\mu_0 |m|} [E^{(M1)}; Or]$.

Es folgt $\langle E^{(M1)} \wedge H^{(M1)} \rangle = \frac{|m|^2}{c^2 |u|^2} \langle E^{(E1)} \wedge H^{(E1)} \rangle$. Kreisbewegung mit Radius R , Frequenz ω

$$\rightsquigarrow \text{Reduktionsfaktor } \frac{M1}{E1} = \frac{|m|^2}{c^2 |u|^2} \approx \frac{R^2 \omega^2}{c^2}$$

3.7 Homogene Wellengleichung (3D): schwache Lösung Σ_t

Betrachte den 0-Strom $\Sigma_t \in \mathcal{A}_0(E_3)$,

$$\Sigma_t[f] = t \int_{S_{ct}(0)} \tau f, \quad \tau \in \tilde{\Omega}^2(E_3 \setminus \{0\}) \text{ Raumwinkelform}$$

mit Gesamtmasse $\Sigma_t[1] = 4\pi t$.

Aufgaben. (i) $\Sigma_t = \frac{1}{c} \frac{dt}{t} \wedge * S_{ct}(0)$. (ii) Deute Σ_t im Kettenbild.

(iii) Wie hängt Σ_t mit der Fundamentallösung von Abschnitt 2.6 (Ende) zusammen?

Satz. Σ_t ist (schwache) Lösung der homogenen Wellengleichung $\square \Sigma_t = 0$ für $t > 0$

zu den Anfangsbedingungen $\Sigma_{t=0+} = 0$ und $\dot{\Sigma}_{t=0+} = 4\pi \delta^{(0)}$.

Lemma. Für $S_R(p) \subset E_n$ gilt $\frac{d}{dR} \int_{S_R(p)} \tau^{(p)} f = \frac{1}{R^{n-1}} \int_{S_R(p)} *df$ (Beweis als **ÜA**).

Beweis des Satzes:

Kurzzeit-Asymptotik $\lim_{t \rightarrow 0+} \Sigma_t[f] = \lim_{t \rightarrow 0+} t \int_{S_{ct}(0)} \tau f = 0$ (klar).

$$\frac{\partial}{\partial t} \Sigma_t[f] = \int_{S_{ct}(0)} \tau f + t \frac{\partial}{\partial t} \int_{S_{ct}(0)} \tau f.$$

Nun gilt nach obigem Lemma $t \frac{\partial}{\partial t} \int_{S_{ct}(0)} \tau f = \frac{1}{ct} \int_{S_{ct}(0)} *df \sim O(t)$ für $t \rightarrow 0+$.

Es folgt $\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\partial}{\partial t} \Sigma_t[f] = \lim_{t \rightarrow 0+} \int_{S_{ct}(0)} \tau f = 4\pi f(0)$, also $\dot{\Sigma}_{t=0+} = 4\pi \delta^{(0)}$.

Zum Nachweis der schwachen Lösungseigenschaft differenziere $\frac{\partial}{\partial t} \Sigma_t[f] = \int_{S_{ct}(0)} \tau f + \frac{1}{ct} \int_{S_{ct}(0)} *df$ nochmal

$$\text{nach } t: \ddot{\Sigma}_t[f] = \frac{\partial}{\partial t} \int_{S_{ct}(0)} \tau f - \frac{1}{ct^2} \int_{S_{ct}(0)} *df + \frac{1}{ct} \frac{\partial}{\partial t} \int_{S_{ct}(0)} *df.$$

Hier ergibt sich die drastische Vereinfachung (eine Spezialität von 3D), dass sich die ersten zwei Terme

(nach Lemma) gegenseitig aufheben! Es verbleibt $\ddot{\Sigma}_t[f] = \frac{1}{ct} \frac{\partial}{\partial t} \int_{S_{ct}(0)} *df \stackrel{\text{ÜA}}{=} \frac{1}{ct^2} \int_{S_{ct}(0)} \mathcal{L}_v *df$, $v = r \frac{\partial}{\partial r}$.

Mit Cartan-Formel für die Lie-Ableitung, Satz von Stokes und $\partial S_{ct}(0) = 0$ folgt

$$\ddot{\Sigma}_t[f] = \frac{1}{ct^2} \int_{S_{ct}(0)} \iota(r \partial_r) * \Delta f. \text{ Nun hat man in Kugelkoordinaten } *1 = r^2 dr \wedge \tau \text{ und } \iota(r \partial_r) *1 = r^3 \tau$$

$$\text{und somit } \ddot{\Sigma}_t[f] = \frac{1}{ct^2} \int_{S_{ct}(0)} \Delta f \iota(r \partial_r) *1 = \frac{(ct)^3}{ct^2} \int_{S_{ct}(0)} \tau \Delta f.$$

Insgesamt folgt $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Sigma_t[f] = t \int_{S_{ct}(0)} \tau \Delta f = \Sigma_t[\Delta f] = \Delta \Sigma_t[f]$ q.e.d.

Lösung der Aufgabe (Beweis v. Lemma).

Betrachte die Einparametergruppe von Abbildungen $\psi_s: E_n \rightarrow E_n$, $a \mapsto p + e^s(a-p)$ ($s \in \mathbb{R}$).

ψ_s ist der Fluss zum Vektorfeld $v: E_n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $a \mapsto a-p$, oder (in Polarkoordinaten bzgl. p) $v = r \frac{\partial}{\partial r}$.

Wir haben $\psi_S(S_R(p)) = S_{e^S R}(p)$. Differenzieren von $\int_{S_{e^S R}(p)} \tau^{(p)} f = \int_{\psi_S(S_R(p))} \tau^{(p)} f = \int_{S_R(p)} \psi_S^*(\tau^{(p)} f)$

ergibt $\frac{d}{d\ln R} \int_{S_R(p)} \tau^{(p)} f = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \int_{S_{e^s R}(p)} \tau^{(p)} f = \int_{S_R(p)} \mathcal{L}_V(\tau^{(p)} f)$.

Nun gilt $*1 = r_p^{n-1} dr_p \wedge \tau^{(p)}$, $\tau^{(p)} = \frac{*dr_p}{r_p^{n-1}}$, $d\tau^{(p)} = 0$, $\iota(V)\tau^{(p)} = 0$, somit auch $\mathcal{L}_V \tau^{(p)} = 0$.

Es folgt $\mathcal{L}_V(\tau^{(p)} f) = \tau^{(p)} \mathcal{L}_V f = \tau^{(p)} r_p \frac{\partial}{\partial r_p} f = \frac{*dr_p}{r_p^{n-2}} \cdot \frac{\partial}{\partial r_p} f$ und

$\mathbb{R} \frac{d}{dR} \int_{S_R(p)} \tau^{(p)} f = \int_{S_R(p)} \frac{1}{r_p^{n-2}} * \frac{\partial f}{\partial r_p} dr_p = \frac{1}{R^{n-2}} \int *df$.

Ganz ähnlich zeigt man $\mathbb{R} \frac{d}{dR} \int *df = \int_{S_R(p)} \mathcal{L}_V(*df) = \int_{S_R(p)} \iota(V)*df = \mathbb{R}^n \int_{S_R(p)} \tau^{(p)} \Delta f$.

Zusammengefasst gilt $\mathbb{R}^{-n+1} \frac{d}{dR} \mathbb{R}^{n-1} \frac{d}{dR} \int_{S_R(p)} \tau^{(p)} f = \int_{S_R(p)} \tau^{(p)} \Delta f$.

3.8 Entladung eines Kondensators

Betrachte die idealisierte Situation von Abschnitt 2.1:

$\rho = -d\iota(u)\delta^{(0)} = -\mathcal{L}_u \delta^{(0)}$ Ladungsdichte vor Entladung ($t < 0$) und

$\rho = 0$ Ladungsdichte nach Entladung ($t > 0$).

Stromstop: $\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} j dt = -\iota(u)\delta^{(0)}$ (erfüllt die Kontinuitätsgleichung $\dot{j} + dj = 0$).

Wellengleichung für die magnetische Feldstärke: $\square B = \mu_0 d*j$.

Umwandlung in eine Anfangswertaufgabe: $B|_{t < 0} = 0 \rightsquigarrow B|_{t \rightarrow 0+} = 0$ (Stetigkeit).

$\dot{B}|_{t \rightarrow 0+} = \int_{0-}^{0+} \ddot{B} dt = c^2 \int_{0-}^{0+} \square B dt = c^2 \mu_0 d* \int_{0-}^{0+} j dt = -\frac{1}{\varepsilon_0} d*\iota(u)\delta^{(0)}$.

Aufgabenstellung: $\square B = 0$ für $t > 0$ mit $B|_{t \rightarrow 0+} = 0$ und $\dot{B}|_{t \rightarrow 0+} = -\frac{1}{\varepsilon_0} d*\iota(u)\delta^{(0)}$.

Durch Vergleich mit den Eigenschaften von Σ_t erkennt man sofort die

Lösung: $B|_{t > 0} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} d*\iota(u)\Sigma_t$.

Versanschaulichung im Kettenbild und expliziter Ausdruck in Koordinaten: siehe Abschnitt 2.1.

Jetzt Wellengleichung für die elektrische Erregung: $\square D = -*d*j - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} j$.

Nach der Entladung ($t > 0$) gilt wieder die homogene Wellengleichung $\square D = 0$.

Vor der Entladung haben wir $D|_{t < 0} = D^{(dipol)} = -\mathcal{L}_u \tau^{(0)}/4\pi$ und $\dot{D}|_{t < 0} = 0$.

Die Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0+$ erhält man am schnellsten aus dem Ampère-Maxwell-Gesetz

$dH = j + \dot{D}$: $H|_{t \rightarrow 0+} = 0 = j|_{t \rightarrow 0+} \rightsquigarrow \dot{D}|_{t \rightarrow 0+} = 0$ und $\int_{0-}^{0+} j dt = -\iota(u)\delta^{(0)} \rightsquigarrow D|_{t \rightarrow 0+} - D^{(dipol)} = \iota(u)\delta^{(0)}$.

Also **Aufgabenstellung**: $\square D = 0$ für $t > 0$ mit $D|_{t \rightarrow 0^+} = D^{(\text{dipol})} + \iota(u)\delta^{(0)}$ und $\dot{D}|_{t \rightarrow 0^+} = 0$.

Aus KIP-2 (Abschnitt 7.13) kennen wir die Lösung der homogenen Wellengleichung $\square f = 0$ ($t > 0$) zu glatten Anfangsbedingungen $f(p, t=0) = u(p)$ und $\dot{f}(p, t=0) = v(p)$. Sie lautet

$$f(p, t) = \mathcal{M}_{p,t}[v] + \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{M}_{p,t}[u] \quad \text{mit} \quad \mathcal{M}_{p,t}[f] = \frac{t}{4\pi} \int_{S_{ct}(p)} \tau^{(p)} f.$$

Definieren deshalb D^{reg} als die zeitabhängige 2-Form mit Komponenten $D_{ij}^{reg}(p, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{M}_{p,t}[D_{ij}^{(\text{dipol})}]$.

Dann wird die gestellte Aufgabe durch den folgenden Ausdruck gelöst:

$$\boxed{D|_t = D^{reg}|_t + \frac{\iota(u)}{4\pi} \dot{\Sigma}_t}.$$

In der Tat erfüllt die rechte Seite die homogene Wellengleichung und genügt den Anfangsbedingungen

$$D|_{t \rightarrow 0^+} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(D^{reg}|_t + \frac{\iota(u)}{4\pi} \dot{\Sigma}_t \right) = D^{(\text{dipol})} + \iota(u)\delta^{(0)} \quad \text{und} \quad \dot{D}|_{t \rightarrow 0^+} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\dot{D}^{reg}|_t + \frac{\iota(u)}{4\pi} \ddot{\Sigma}_t \right) = 0.$$

Das letzte Gleichheitszeichen folgt mit $\lim_{t \rightarrow 0^+} \iota(u) \ddot{\Sigma}_t[f] = c^2 \lim_{t \rightarrow 0^+} \iota(u) \Delta \Sigma_t[f] = c^2 \lim_{t \rightarrow 0^+} \Sigma_t[\Delta \iota(u) f] = 0$.

Regulärer Teil. Um die Lösung anschaulich zu deuten, schreiben wir den regulären Teil um, wobei wir im Wesentlichen die Idee des Mittelwertsatzes für harmonische Funktion benutzen. Nach dem obigen Lemma gilt

$$\frac{d}{dR} \int_{S_R(p)} \tau^{(p)} f = \frac{1}{R^2} \int_{S_R(p)} *df.$$

Nun sind alle Komponenten $f = D_{ij}^{(\text{dipol})}$ harmonisch auf $E_3 \setminus \{0\}$, denn das statische Dipolfeld erfüllt die Poisson-Gleichung $\Delta D^{(\text{dipol})} = \delta d D^{(\text{dipol})} = \delta \rho = -\delta d \iota(u) \delta^{(0)}$. Außerdem verschwinden alle Komponenten im Unendlichen wie die 3. Potenz des Abstands vom Ursprung 0 . Mit dieser Information berechnen wir:

$$(i) \quad |p-0| > R: \quad R^2 \frac{d}{dR} \int_{S_R(p)} \tau^{(p)} D_{ij}^{(\text{dipol})} = \int_{\partial B_R(p)} *d D_{ij}^{(\text{dipol})} = \int_{B_R(p)} d *d D_{ij}^{(\text{dipol})} = \int_{B_R(p)} * \Delta D_{ij}^{(\text{dipol})} = 0;$$

$$(ii) \quad |p-0| < R: \quad R^2 \frac{d}{dR} \int_{S_R(p)} \tau^{(p)} D_{ij}^{(\text{dipol})} = - \int_{\partial(E_3 \setminus B_R(p))} *d D_{ij}^{(\text{dipol})} = - \int_{E_3 \setminus B_R(p)} * \Delta D_{ij}^{(\text{dipol})} = 0.$$

In beiden Fällen verschwindet also die Ableitung: $\frac{d}{dR} \int_{S_R(p)} \tau^{(p)} D_{ij}^{(\text{dipol})} = 0$. Im ersten Fall kann man den Limes $R \rightarrow 0$ nehmen, im zweiten Fall $R \rightarrow \infty$. So erhält man

$$(i) \quad |p-0| > R: \quad \int_{S_R(p)} \tau^{(p)} D_{ij}^{(\text{dipol})} \stackrel{R \rightarrow 0}{=} 4\pi D_{ij}^{(\text{dipol})}(p);$$

$$(ii) \quad |p-0| < R: \quad \int_{S_R(p)} \tau^{(p)} D_{ij}^{(\text{dipol})} \stackrel{R \rightarrow \infty}{=} 0.$$

Insgesamt folgt $D_{ij}^{reg}(p, t) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{t}{4\pi} \int_{S_{ct}(p)} \tau^{(p)} D_{ij}^{(\text{dipol})} = \frac{\partial}{\partial t} t D_{ij}^{(\text{dipol})}(p) \chi_{E_3 \setminus B_{ct}(0)}(p)$ für $|p-0| \neq R$

oder $D^{reg} = \frac{\partial}{\partial t} t D^{(\text{dipol})} \chi_{E_3 \setminus B_{ct}(0)} = D^{(\text{dipol})} \chi_{E_3 \setminus B_{ct}(0)}$ auf $E_3 \setminus S_{ct}(0)$.

Interpretation. Nach der Entladung des Kondensators bricht das statische Dipolfeld zusammen und zwar in besonders einfacher Weise: zur Zeit $t > 0$ ist D innerhalb des Kausalitätsradius ($r < ct$) bereits vollständig ausgelöscht, außerhalb ($r > ct$) noch gänzlich unverändert. Auf dem trennenden Lichtkegel $r = ct$ propagiert ein singuläres Signal.

Singulärer Teil. Wie steht es nun mit dem singulären Teil der Lösung auf $S_{ct}(0)$, $t > 0$ (Lichtkegel)?

Von oben kennen wir schon das Glied $\frac{1(u)}{4\pi} \dot{\Sigma}_+$, aber auch der sog. "reguläre" Teil $D^{reg} = \frac{\partial}{\partial t} t D^{(dipol)} \chi_{E_3 \setminus B_{ct}(0)}$ enthält einen singulären Term $t D^{(dipol)} \frac{\partial}{\partial t} \chi_{E_3 \setminus B_{ct}(0)} = -t D^{(dipol)} \wedge S_{ct}(0)$. Außerdem ist für $p \in S_{ct}(0)$ die Verwendung der Lösungsformel $D_{ij}^{reg}(p, t) = \frac{\partial}{\partial t} M_{p,t}[D_{ij}^{(dipol)}]$ fragwürdig, wenn nicht überhaupt mathematisch illegal.

Jetzt könnte man (wie anfangs auch der Autor) auf die Idee kommen, den auf $E_3 \setminus S_{ct}(0)$ (und nur dort!) etablierten Ausdruck $D^{reg} = \frac{\partial}{\partial t} t D^{(dipol)} \chi_{E_3 \setminus B_{ct}(0)}$ in der naheliegenden Weise als 0-Strom $D^{reg} \in \mathcal{A}_0(E_3)$ zu deuten:

$$D^{reg}[\alpha] \stackrel{?}{=} \frac{\partial}{\partial t} t \int_{E_3 \setminus B_{ct}(0)} D^{(dipol)} \wedge \alpha = - \frac{\partial}{\partial t} \frac{t}{4\pi} \int_{E_3 \setminus B_{ct}(0)} \alpha \wedge \mathcal{L}_u \tau^{(0)}.$$

Eine sorgfältige Betrachtung fördert zu Tage, dass diese Deutung nicht stimmt. Richtig ist vielmehr

$$D^{reg}[\alpha] = \frac{\partial}{\partial t} \frac{t}{4\pi} \int_{E_3 \setminus B_{ct}(0)} \tau^{(0)} \wedge \mathcal{L}_u \alpha.$$

Aufgabe 1. Verifiziere $dD = d(D^{reg} + D^{sing}) = 0$ für $D^{sing} = \frac{1(u)}{4\pi} \dot{\Sigma}_+$ und D^{reg} wie angegeben.

(Das Zusammenspiel der regulären und singulären Teile sorgt also insbesondere für die Quellenfreiheit von D .)

**** Aufgabe 2.** Verifiziere das Ampère-Maxwell-Gesetz $\dot{D} = dH$ mit (s.o.) $H = \frac{1}{\mu_0} *B = \frac{c^2}{4\pi} \delta \iota(u) \Sigma_+$.

Hinweis. Zeige $\dot{D}^{sing} - dH = \frac{c^2}{4\pi} \delta \mathcal{L}_u \Sigma_+ = \dot{D}^{reg}$. Für das linke Gleichheitszeichen benütze

$\Delta = \delta d + d\delta$ und $\Delta \iota(u) = \iota(u) \Delta$ zusammen mit hier entwickelten Identitäten. Für das rechte

Gleichheitszeichen zeige zunächst $\dot{D}^{reg}[\alpha] = \frac{1}{4\pi ct} \frac{\partial}{\partial t} \int_{E_3 \setminus B_{ct}(0)} *d\tau \wedge \mathcal{L}_u \mathcal{L}_u \alpha$.

Im weiteren Verlauf der Berechnung von $\dot{D}^{reg}[\alpha]$ benütze $\Sigma_+[\delta\omega] = \Sigma_+[\frac{\partial}{\partial t} \iota(\partial_t) \omega]$.

Folgere diese Identität aus der Rotationsinvarianz der Raumwinkelform $\tau^{(0)}$ und der Formel

$\delta = \sum_{j,k} \frac{\partial}{\partial \xi^j} g^{jk} \iota(\partial_{\xi^k})$, $g^{jk} = g(d\xi^j, d\xi^k)$ (Skalarprodukt) in beliebigen Koordinaten ξ^j und auf 1-Formen.

3.9 Liénard-Wiechert-Potentiale

Es sei ϕ eine zeitabhängige Funktion (elektrisches Skalarpotential) und A eine zeitabhängige 1-Form (magnetisches Vektorpotential). Postuliere die Wellengleichungen

$$\begin{cases} \square \phi = *g/\epsilon_0 \\ \square A = \mu_0 *j \end{cases}$$

Für die Feldstärken $E = -d\phi - \dot{A}$ und $B = dA$ resultieren dann die bekannten Wellengleichungen

$$\square E = -d*g/\epsilon_0 - \mu_0 * \frac{\partial j}{\partial t} \quad \text{und} \quad \square B = \mu_0 d*j.$$

Passend zur Kontinuitätsgleichung $j + dj = 0$ verlangt man die Konsistenzbedingung

$$\frac{1}{c^2} \dot{\phi} + \delta A = 0 \quad (\text{Lorentz-Eichung}).$$

Gelöst werden sollen jetzt die Wellengleichungen für ϕ, A für den singulären Fall einer beschleunigten Punktladung der Ladungsdichte $g = q \delta_{\gamma(t)}$ zu einer Bahnkurve $t \mapsto \gamma(t) \in E_3$. Für diesen Zweck erinnern wir an die aus KIP-2 bekannte Lösungsformel für die inhomogene Gleichung $\square f = g$:

$$f(p, t) = \int_{E_3} \frac{g(\cdot, t - \frac{1}{c} r_p(\cdot))}{4\pi r_p(\cdot)} d\text{vol}.$$

Diese für eine reguläre Inhomogenität g gedachte Formel wollen wir nun auf den Fall von singulärem g ummünzen.

3.9.1 Kalkül mit der Delta-Funktion

In den meisten Physik-Lehrbüchern/Vorlesungen wird die Delta-Distribution $\delta^{(0)}$ als **Delta-Funktion** $\delta(x)$ aufgefasst; also $\delta^{(0)} = \delta(\cdot) d^n x$ mit $\delta(x) \equiv \delta_0(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} j_\epsilon(x)$ und j_ϵ dem Standardbuckel (o.ä.). Wie in Abschnitt 2.8 (zweite Bemerkung) angesprochen, verhält sich die Delta-Funktion unter einem C^∞ -Diffeomorphismus $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ nicht wie eine Funktion.

Aus $\psi^{-1} \delta^{(0)} = \delta^{(\psi^{-1}(0))}$ folgt vielmehr

$$\delta_{\psi^{-1}(0)} d^n x = \psi^{-1}(\delta_0(\cdot) d^n x) = \psi^*(\delta_0(\cdot) d^n x) = \psi^* \delta_0 \cdot \psi^* d^n x = (\delta_0 \circ \psi) |\text{Det } D_\psi| d^n x$$

und somit die Beziehung

$$\delta_0 \circ \psi = \frac{\delta_{\psi^{-1}(0)}}{|\text{Det } D_\psi|} \quad (\text{Verhalten der Delta-Funktion unter einer Abbildung } \psi).$$

Anders gerechnet hat man
$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta_0(\psi(x)) f(x) d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} \delta_0(y) f(\psi^{-1}(y)) \frac{d^n y}{|\text{Det } D_\psi|} = \frac{f(\psi^{-1}(0))}{|\text{Det } D_\psi|}.$$

In Dimension $n = 1$:
$$\delta_0(\psi(x)) = \frac{\delta_{\psi^{-1}(0)}(x)}{|\psi'(\psi^{-1}(0))|}.$$

Mit diesem Kalkül berechnen wir nun ϕ gemäß Lösungsformel für $\square \phi = *g/\epsilon_0$:

$$\phi(p, t) = \int_{E_3} \frac{q \delta_{\gamma(t - r_{p(\cdot)}/c)(\cdot)}(\cdot)}{4\pi \epsilon_0 r_{p(\cdot)}} d\text{vol}.$$

Hierbei ist zu beachten, dass die Inhomogenität $*g/\epsilon_0 = \frac{q}{\epsilon_0} * \delta_{\gamma(t)} \in \mathcal{A}_3(E_3)$ tatsächlich ein 3-Strom ist, somit vergleichbar zu einer Funktion. Zusammen mit dem Volumenelement ergibt sich aber doch wieder eine Distribution $\delta_{\gamma(t - r_{p(\cdot)}/c)(\cdot)} d\text{vol}$. Nun ist es zweckmäßig, (für festes p, t) die **Retardierungs-Abbildung**

$$\psi: E_3 \rightarrow E_3, \quad a \mapsto a - \gamma\left(t - \frac{1}{c}|p-a|\right) + \sigma,$$

einzuführen. Hiermit gilt

$$\delta_{\gamma(t - r_{p(\cdot)}/c)(\cdot)} = \delta_{\sigma} \circ \psi$$

und nach der oben diskutierten Formel erhält man

$$\phi(p, t) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{|p-a|} \frac{1}{|\text{Det } D_a \psi|} \quad \text{mit } a = \psi^{-1}(\sigma).$$

Aufgabe. $|\text{Det } D_a \psi| = 1 - \frac{1}{c} \langle \dot{\gamma}(t_a), \frac{p-a}{|p-a|} \rangle =: 1 - \frac{1}{c} \dot{\gamma}_{||}(t_a), \quad t_a = t - \frac{1}{c}|p-a|.$
(retardierte Zeit)

Für $\square A = \mu_0 *j$ zerlegt man nach kartesischen Komponenten und geht dann völlig analog vor.

Endergebnis:

$$\phi(p, t) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 |p-a|} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{c} \dot{\gamma}_{||}(t_a)}$$

$$A_R(p, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi |p-a|} \cdot \frac{\dot{\gamma}_R(t_a)}{1 - \frac{1}{c} \dot{\gamma}_{||}(t_a)}$$

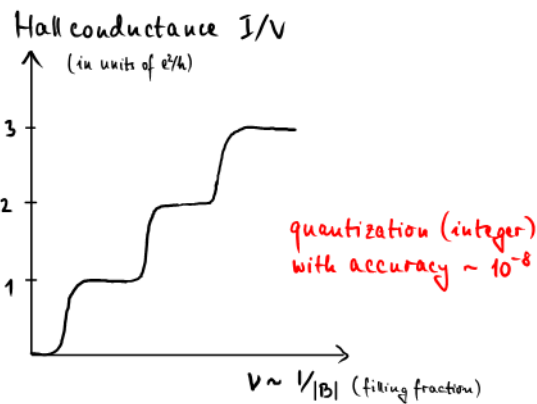
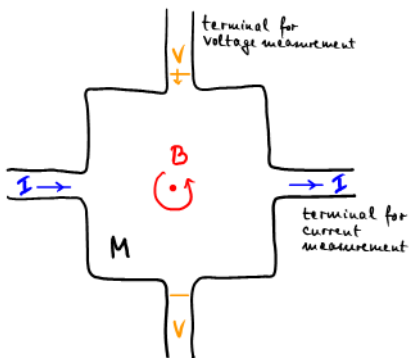
(Lienard-Wiechert-Potentiale).

Diskussion. Für $\dot{\gamma}_{||}(t_a) = 0$ (Ladung ruht oder bewegt sich senkrecht zum Beobachter) sind die Lienard-Wiechert-Potentiale offenbar nichts anderes als die bekannten Coulomb-Potentiale für eine Ladung/Strom am Ort $a = \gamma(t_a)$ zur retardierten Zeit t_a . Für relativistische Geschwindigkeiten $\dot{\gamma}_{||}(t_a) \approx +c$, die zum Beobachter hin gerichtet sind, kommt es zu einer großen Verstärkung der Potentiale. Im beobachter-abgewandten Fall, $\dot{\gamma}_{||}(t_a) \approx -c$, hat man (maximal) eine Reduktion um den Faktor 2. Die Feldstärken E und B erhält man natürlich durch Differenzieren. Im Fall einer beschleunigten Bewegung ergibt sich die für Strahlungsfelder typische Abstandsabhängigkeit $E \sim |p-a|^{-1}$ und $B \sim |p-a|^{-1}$ wegen der (p) -Ortsabhängigkeit von $\dot{\gamma}_{||}(t_a) = \dot{\gamma}_{||}(1 - \frac{1}{c}|p-a|)$ unter der Voraussetzung $\ddot{\gamma} \neq 0$.

Appendix 4.1: (Integer) Quantum Hall Effect

Experimental setting.

two-dimensional electron gas (at a semiconductor-insulator interface: MOSFETs; GaAs heterostructure)
 strong magnetic field ($|B| \geq 10$ Tesla), low temperature ($T \leq 1$ K), strong disorder.



A remark on units/dimensions.

Constitutive laws: $D = \epsilon_0 * E$, $B = \mu_0 * H$. (Hodge-Operator $*$ defined by $\alpha \wedge * \beta = (\alpha, \beta) \text{dvol}_n$)

physical dimensions/units: $[\epsilon_0] = \frac{\text{charge}^2}{\text{energy} \cdot \text{length}}$, $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Jm}}$,

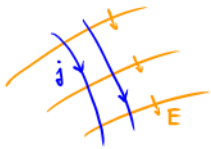
$[\mu_0] = \frac{\text{energy}}{\text{current}^2 \cdot \text{length}}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{J}}{\text{A}^2\text{m}}$.

$(\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2} = c = 2,998 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (speed of light).

$(\frac{\epsilon_0}{\mu_0})^{1/2} = \frac{e^2}{h} \cdot \frac{1}{2\alpha}$ where e = charge of electron, h = Planck's constant, $\alpha \approx \frac{1}{137}$ fine structure constant.

Quantum Hall-Ohm Law

Ohm's law for a metal (Ohm, 1827; Kirchhoff): $j = \sigma * E$ (σ electrical conductivity; $B=0$)

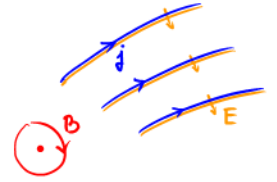


$$\text{power dissipated} = \int E \wedge j = \sigma \int E \wedge * E > 0.$$

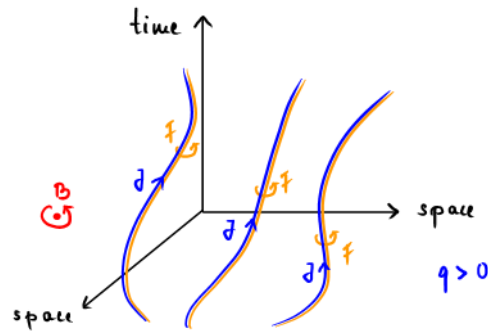
Quantum Hall system (strong magnetic field B): $j = \sigma_H E$ (dissipationless response).

σ_H Hall conductivity (pseudoscalar vs parity, time reversal symmetry broken).

$$\dot{j} = -dj = -\sigma_H dE = \sigma_H \dot{B} \quad \leadsto \quad \rho = \sigma_H B \quad (\text{subtract background charge/field}).$$



space-time formulation: $J = \sigma_H F$
(J. Fröhlich)



Problem. What changes (if any) occur in this picture when the sign of the charge carriers is reversed?

Boundary anomaly: edge states

An inconsistency arises if σ_H fails to be constant:

$$dJ = d\sigma_H \wedge F \neq 0 \quad (\text{"anomaly"}).$$

Gapless surface modes (known to exist for QHE and, more generally, for topological insulators) are described by some low-energy effective theory (QHE: chiral Luttinger liquid).

Principle: surface theory (anomalous \Rightarrow charge not conserved) must match bulk theory (also anomalous) to cancel the anomaly.

Chern-Simons Theory (bulk)

How to get the Quantum Hall-Ohm law from a variational principle?

$$J = db \quad (b \text{ 1-form of odd type})$$

$$F = da \quad (a \text{ 1-form of even type})$$

$$S_{CS}^{(math)} = \frac{1}{4\pi\sigma_H} \int_{M \times \mathbb{R}} b \wedge db - \frac{1}{2\pi} \int a \wedge db \quad (\text{needs space-time } M \times \mathbb{R} \text{ to be oriented}).$$

$$\frac{\delta S_{CS}}{\delta b} = 0 \rightsquigarrow 0 = \frac{1}{\sigma_H} db - da \quad \text{or} \quad J = \sigma_H F.$$

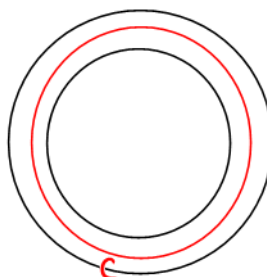
$$S_{CS}^{(math)} \leftrightarrow S_{CS}^{(e.m.)} = -\frac{\sigma_H}{4\pi} \int a \wedge da \quad (\text{fails to be gauge invariant for a system with boundary}).$$

(dominates the electromagnetic response due to the Maxwell Lagrangian $\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \int da \wedge *da$)

Laughlin Argument.

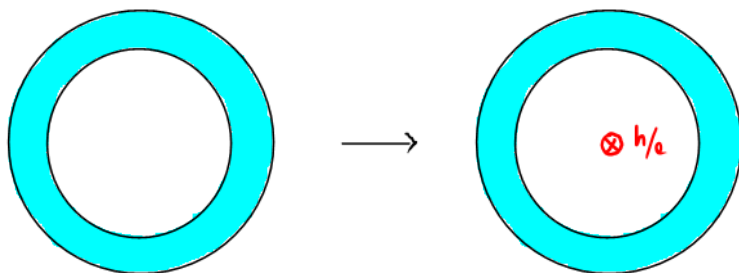
Consider the geometry of an annulus.

$$j = \sigma_H E \rightsquigarrow \text{current } \mathcal{I} := \oint_C j = \sigma_H \oint_C E = \sigma_H V \quad (V \text{ voltage})$$



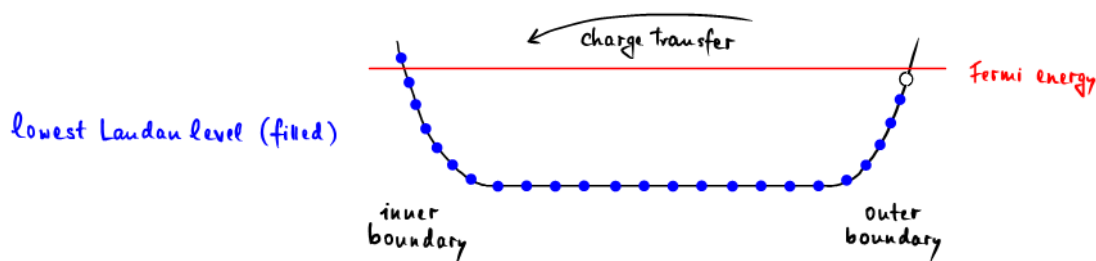
Insert a magnetic flux quantum h/e adiabatically, into the hole of the annulus:

$$\int V dt = \int dt \oint_{C=\partial D} E = \int dt \int_D dE = - \int dt \int_D \dot{B} = -\frac{h}{e} \quad (\text{by the law of induction, } \dot{B} = -dE).$$



On the other hand, by the quantum Hall-Ohm law, $-\frac{h}{e} \sigma_H = \sigma_H \int V dt = \int \mathcal{I} dt = Q$ (charge transferred)

By the process of (cyclic) spectral flow due to adiabatic flux insertion, the transferred charge must be an integer multiple of the elementary charge(s) e' of the surface theory $\rightsquigarrow \sigma_H \in \frac{ee'}{h} \mathbb{Z}$.



4.1.1 Excursion: charged quantum particles in an E.M. field

Needed: Hilbert space

momentum operator $p = mv$

($p_j = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x^j}$ is correct answer only for neutral particles)

Experimental observation: electric charge is always found to be

an integer multiple ne of a fundamental charge, e . \leadsto Interpret $n \in \mathbb{Z}$

as defining an (irreducible, hence one-dimensional) representation of $U(1)$.

\leadsto Mathematical model: principal $U(1)$ bundle $\mathcal{P} \xrightarrow{\pi} M \times \mathbb{R}$

with connection 1-form A and curvature 2-form $\sqrt{-1} F = dA$.
(electromagnetic field strength F)

Using the $U(1)$ -representation given by the electric charge $q = ne$,

form the associated complex line bundle $\mathcal{P} \times_{U(1)} \mathbb{C} \equiv L$

Wave functions of charged particles (with charge ne) are sections of this line bundle.

Momentum operator $p = \frac{\hbar}{i} \nabla$ (∇ covariant derivative)

$\nabla = d - \frac{ine}{\hbar} A$ (expression w.r.t. a choice of local section
or choice of "gauge")

Single-particle Hamiltonian $= \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^* \nabla$.

Comments/explanations (for the students).

The mathematical model alluded to above becomes imperative if there exist magnetic monopoles.

Indeed, for a surface Σ enclosing a magnetic monopole one has $\iint_{\Sigma} B \neq 0$, which is an obstruction to finding a vector potential A , as $B = dA$ would lead to a contradiction with Stokes' Theorem:

$0 \neq \iint_{\Sigma} B = \iint_{\Sigma} dA = \int_{\partial \Sigma} A = 0$ (since $\partial \Sigma = \emptyset$). Thus, A can only be defined locally (and acquires Dirac-string singularities if one adopts Dirac's method to avoid the contradiction).

Nevertheless, the momentum p is globally defined (as the covariant derivative ∇ for a complex line bundle). In other words, although A (and also d) have singularities, the local coordinate expression $p = \frac{\hbar}{i} d - neA$ does extend to an object which is well-defined everywhere.

Example. Consider the special case of a quantum particle of electric charge e moving in the magnetic field of a magnetic monopole of magnetic charge $2h/e$, and assume for simplicity that the charge is constrained to move on a surface S^2 (two-sphere) centered around the monopole. In this situation the complex line bundle $P_{x_{U(1)}} \mathbb{C}$ is the same as the tangent bundle TS^2 . Thus we may think of wave functions as being (tangent) vector fields on S^2 .

Let us explain the correspondence $TS^2 \cong P_{x_{U(1)}} \mathbb{C}$ in more detail. For this, we fix some reference point $o \in S^2$ (say, the north pole). Then any tangent vector $v(x) \in T_x S^2$ at $x \in S^2$ can be written as a rotation $R \in SO(3)$ applied to a suitable $u \in T_o S^2$. This representation $v(x) = R \cdot u$ is not unique. In fact, if $v(x) = R \cdot u$ then $v(x) = Rk^{-1} \cdot ku$ where $k \in SO(2)$ and $SO(2) \subset SO(3)$ is the subgroup of rotations fixing o . Thus the tangent vector $v(x)$ can be described as an equivalence class of pairs $[R, u] = [Rk^{-1}, ku]$. Using this description for all points/values of a vector field $x \mapsto v(x)$ one gets the isomorphism $TS^2 = SO(3) \times_{SO(2)} \mathbb{R}^2$ where $\mathbb{R}^2 \cong T_o S^2$. The promised correspondence follows on making the identifications $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, $SO(2) \cong U(1)$ and $SO(3) = P$.

Problem. To write the Schrödinger equation $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = H\psi$ one needs $i = \sqrt{-1}$. How is multiplication by i implemented in the present picture with TS^2 ?

Further remarks.

- (i) Tangent vector fields on S^2 are known to have at least 2 zeroes (counted with multiplicity). More generally, for a monopole with magnetic charge $m h/e$ the wave functions must have at least m zeroes.
- (ii) In the case of $m=2$ the momentum operator p is defined by parallel transport using the so-called Levi-Civita connection (i.e., lengths and angles are preserved by parallel transport).

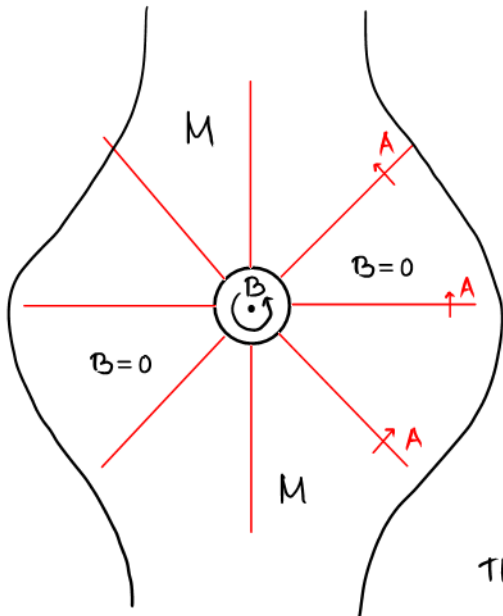
Problem. Show that $[p_j, p_e] = i\hbar e B_{je}$.

(iii) The Gauss-Bonnet Theorem (a special case of the Atiyah-Singer index theorem for Dirac-type operators) for a compact two-dimensional manifold M states that there is a relation between the integral of the curvature two-form R and the Euler number $\chi(M) := \sum_{i=0}^2 (-1)^i \dim H^i(M)$: $\int_M R = 2\pi \chi(M)$.

For $M = S^2$ one has $\chi(S^2) = 1 - 0 + 1 = 2$. Our interpretation of the wave function bundle $P_{x_{U(1)}} \mathbb{C}$ as TS^2 requires that $\frac{e}{\hbar} B = R$ and hence (using Gauss-Bonnet) $m = \frac{e}{\hbar} \int_{S^2} B = \frac{1}{2\pi} \int_{S^2} R = 2$.

(For $m = -2$ the wave functions can be interpreted as one-forms or sections of the cotangent bundle T^*S^2 .)

Aharonov-Bohm effect.



$$\oint A = \iint \mathcal{B} = \Phi,$$

$$A = \frac{\Phi}{2\pi} d\theta \quad (\text{polar angle } \theta),$$

$$\mathcal{B} = dA \Big|_{\mu} = 0.$$

$$\text{Momentum operator } p = \frac{\hbar}{i} d - eA,$$

$[p_x, p_y] = 0 \wedge$ the line bundle $P_{u(1)} \times \mathbb{C}$ for wave functions is "flat" (zero curvature).

The line bundle is trivial ($P_{u(1)} \times \mathbb{C} = M \times \mathbb{C}$) if $\oint A = \Phi \in \frac{h}{e} \mathbb{Z}$ or $\exp(i \frac{e}{\hbar} \oint A) = 1$ (trivial holonomy).

Important consequence: if the line bundle is non-trivial (i.e., if $\frac{e}{\hbar} \Phi \notin \mathbb{Z}$), then there exist no stationary wave functions with zero eigenvalue for the angular momentum $L = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{e\Phi}{2\pi}$.

In other words, although A does not appear in the (Heisenberg) equations of motion, the presence of A for $\frac{e}{\hbar} \Phi \notin \mathbb{Z}$ (or rather, its presence in the gauge-invariant momentum operator p) does modify the eigenvalue spectrum of (some) operators of the quantum theory, by the principle of single-valuedness of q.m. wave functions.

Aharonov-Casher effect.

This is a variant of the Aharonov-Bohm effect, with charge replaced by spin and the complex line bundle $P_{u(1)} \times \mathbb{C}$ for wave functions replaced by a complex vector bundle $P'_{\text{SU}(2)} \times \mathbb{C}^2$. The role of A (magnetic vector potential) in the AB effect is taken by the electric field for the AC effect. In short, particles carrying no electric charge but a spin-magnetic moment (e.g. neutrons) exhibit an AB-like interference pattern when a beam of such particles is first split and then recombined after passage through an electric field. This happens because the Hamiltonian for a particle with a spin-magnetic moment contains a term $\sqrt{-1} \sum_{ij} E_i p_j [\sigma_i, \sigma_j]$ (Pauli matrices σ_i) called spin-orbit coupling.

For more information, see Wikipedia: Aharonov-Casher Effect and J. Fröhlich's Les Houches Lectures (arXiv: cond-mat/9508062).

4.1.2 Homology and Cohomology

By the standard k -simplex in \mathbb{R}^k with Cartesian coordinates x_1, \dots, x_k one means the solution set, Δ^k , of $x_i \geq 0$ ($i=1, \dots, k$) and $x_1 + x_2 + \dots + x_k \leq 1$.

Definition. Let M be a topological space. A (singular) k -simplex is a continuous mapping $\sigma_k: \Delta^k \rightarrow M$. A singular k -chain is a formal linear combination of k -simplices with coefficients (for our purposes) in \mathbb{R} . The vector space of singular k -chains is denoted by $C_k(M)$.

The boundary operator $\partial: C_k(M) \rightarrow C_{k-1}(M)$ is defined as usual.

$Z_k(M) := \{c \in C_k(M) \mid \partial c = 0\}$ is called the (vector) space of (singular) k -cycles.

The elements of $B_k(M) := \{b \in Z_k(M) \mid \exists a \in C_{k+1}(M): \partial a = b\}$ are called (singular) k -boundaries.

The k -th homology group of M is the quotient of vector spaces $H_k(M) := Z_k(M)/B_k(M)$.

Its elements are equivalence classes $[c] = [c + \partial a]$ ($\partial c = 0$).

Examples. $\dim H_0(M) =$ number of connected components of M .

$$H_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = \mathbb{R}; \quad H_1(S^2) = 0; \quad H_1(S^1 \times S^1) = \mathbb{R}^2; \quad H_2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) = \mathbb{R}.$$

Problems. $H_1(\mathbb{R}^3 \setminus \{z\text{-axis}\})$; $H_2(\mathbb{R}^3 \setminus (\{p\} \cup \{q\}))$ for $p \neq q$; $H_k(\underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{l \text{ times}})$.

Cohomology (deRham).

$\Omega^k(M)$ differential forms of degree k .

Exterior derivative $d: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$.

Closed k -forms: $Z^k(M) = \ker(d: \Omega^k \rightarrow \Omega^{k+1})$.

Exact k -forms: $B^k(M) = \text{im}(d: \Omega^{k-1} \rightarrow \Omega^k)$.

k -th deRham cohomology group $H^k(M) = Z^k(M)/B^k(M)$.

Theorem (deRham). If M is a differentiable manifold, then $H^k(M) = H_k(M)$.

Comment. In comparison with homology, cohomology has the advantage of carrying the additional structure of an algebra (with the product given by the exterior product).

Problem. The exterior product of two cohomology classes $[\omega]$ and $[\omega']$ is taken to be $[\omega] \wedge [\omega'] := [\omega \wedge \omega']$. Show that this is well-defined.

4.1.3 Cohomology of conductance (space dimension n).

What is current \mathcal{J} ? Electric current density $j \in \tilde{\Omega}^{n-1}(M)$.

de Rham cohomology

static limit ($dj = -\dot{p} = 0$): $j \in \tilde{Z}^{n-1}(M) \sim$ current $\mathcal{J} = [j] = [j+dw] \in \tilde{Z}^{n-1}(M)/\tilde{B}^{n-1}(M) =: \tilde{H}^{n-1}(M)$.

What is voltage V ? Electric field strength $E \in \Omega_c^1(M)$ (on physical grounds, E vanishes far from the quantum Hall "bar"; $\sim E$ compactly supported)

static limit ($dE = -\dot{B} = 0$): $E \in Z_c^1(M)$. Line integrals $\int_{\gamma} E$ for $\partial\gamma = 0$ do not change under

$E \rightarrow E+df$ with $f \in \Omega_c^0(M) \sim$ voltage $V = [E] = [E+df] \in Z_c^1(M)/B_c^1(M) = H_c^1(M)$.

Problem. Compute $H_c^1(M)$ and $\tilde{H}^1(M)$ for the quantum Hall geometry M depicted at the beginning of this Appendix.

What is conductance? Conductivity (static limit) $\sigma: Z_c^1(M) \rightarrow \tilde{Z}^{n-1}(M)$, $E \mapsto j$, descends to a map in cohomology, $g: H_c^1(M) \rightarrow \tilde{H}^{n-1}(M)$, $V \mapsto \mathcal{J}$ (conductance).

By Poincaré (or Serre) duality, $\tilde{H}^{n-1}(M) \cong H_c^1(M)^*$, conductance may be viewed as a map

$$g: H_c^1(M) \rightarrow H_c^1(M)^*$$

Ousager relation: $g^*|_{\mathcal{B}} = g|_{-\mathcal{B}}$. Special cases:

1. $\mathcal{B} = 0$: $g^* = g$ (conductance is a symmetric isomorphism).

2. Quantum Hall regime (\mathcal{B} large): $g|_{-\mathcal{B}} = -g|_{\mathcal{B}}$.

Hence (by Ousager) $g^* = -g$ (conductance is a skew-symmetric isomorphism).

Dissipated power = $\int_M E \wedge j = \mathcal{I}(V) = g(V)(V)$ (vanishes for QHE).

pairing $H^{n-1}(M; \mathbb{R}) \otimes H_c^1(M) \rightarrow \mathbb{R}$ by integration

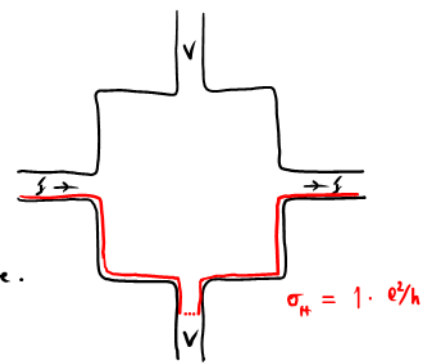
Remark. If internal voltages & currents exist, then one takes

a quotient by relative cohomology groups, $\tilde{H}_{rel}^{n-1}(M, \partial M)$.

Q: How should one picture what goes on in the experiment above?

A: The electrical current density j is as indicated by the red line in the figure.

The line of j is accompanied by a bump in E along the same line.



Appendix 4.2: Residuenkalkül

Literatur: Fischer & Kaul, Bd. 1, § 27-28

4.2.1 Holomorphe Funktionen

Betrachte Funktionen $f: \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C} \supset \Omega \rightarrow \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$,

$$x+iy = z \mapsto f(z) = u(x,y) + iv(x,y).$$

Definition. $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **holomorph**, wenn die Ableitung $z \mapsto f'(z) := \lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$ auf ganz Ω existiert und stetig ist.

Aufgabe. Als Differential der Abbildung $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ im Punkt z ist die Ableitung $f'(z)$ eine lineare Abbildung. So betrachtet vertauscht $f'(z)$ mit Multiplikation mit $i = e^{i\pi/2}$:
 $f'(z) \circ i = i \circ f'(z)$ (was übrigens die Namensgebung "holomorph" motiviert).

Satz. $f = u+iv: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph \iff

$$u, v \in C^1(\Omega) \text{ und es gelten die } \text{Cauchy-Riemann DGLn: } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Beispiel. $x+iy = z \mapsto e^z = e^x \cos y + i e^x \sin y = u+iv.$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Bemerkung. Die Cauchy-Riemann DGLn sind äquivalent zur Geschlossenheit der beiden 1-Formen

$\alpha := u dx - v dy$ und $\beta := u dy + v dx$. Diese ergeben sich als Real- und Imaginärteile:

$$f(z) dz = \operatorname{Re} f(z) dz + i \operatorname{Im} f(z) dz = \alpha + i\beta.$$

4.2.2 Komplexe Kurvenintegrale

Für eine C^1 -Kurve $\gamma: [0,1] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{C}$ und eine komplexwertige Funktion f auf Ω definiert man

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_0^1 f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt.$$

Hauptsatz. Ist f holomorph mit komplexer Ableitung f' , so gilt: $\int_{\gamma} f'(z) dz = \int_{\gamma} d f(z) = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)).$

Tatsächlich hat man eine stärkere Aussage:

Satz (Cauchy). Für $\gamma = \partial \Sigma$ mit orientiertem Gebiet $\Sigma \subset \Omega$ (dem Definitionsbereich der holomorphen

$$\text{Funktion } f) \text{ gilt: } \boxed{\oint_{\gamma} f(z) dz = 0}.$$

Korollar. Für Ω einfach zusammenhängend ist $\int_a^b f(z) dz$ wegunabhängig.

Grundformeln. Sei $S_r(z_0)$ die positiv orientierte Kreislinie mit Radius $r > 0$ und Zentrum z_0 .

Für $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\oint_{S_r(z_0)} \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq 1, \\ 2\pi i & \text{für } n = 1. \end{cases}$$

Nachweis. Mit der Parametrisierung $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto z_0 + re^{2\pi i t}$ für $S_r(z_0)$ ergibt sich $\dot{\gamma}(t) = 2\pi i r e^{2\pi i t}$ und $\oint_{S_r(z_0)} (z-z_0)^{-n} dz = 2\pi i \int_0^1 (re^{2\pi i t})^{1-n} dt$, und die Behauptung folgt sofort durch elementare Integration.

Integralformeln (Cauchy). Sei $\gamma: S^1 \rightarrow \Omega$ eine positiv orientierte, geschlossene und kontrahierbare Kurve im Holomorphiegebiet Ω von f . Umläuft γ den Punkt $w \in \Omega$ genau einmal, so gilt

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z-w} dz.$$

Durch mehrmaliges Differenzieren dieser Formel erhält man für die n -te Ableitung

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z-w)^{n+1}}.$$

4.2.3 Analytische Funktionen

Definition. $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ heißt (komplex-) analytisch

$$\Leftrightarrow \forall z_0 \in \Omega: \exists R > 0: f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k, \text{ konvergent auf } \mathcal{B}_R(z_0).$$

Satz (Identitätsprinzip). Zwei auf Ω analytische Funktionen f, g stimmen (auf Ω) bereits überein, wenn sie nur auf irgendeiner konvergenten Folge $z_n \rightarrow z_0 \in \Omega$ ($z_n \neq z_0$) übereinstimmen.

Korollar. Soweit eine reell-analytische Funktion sich komplex-analytisch fortsetzen lässt, ist diese Fortsetzung eindeutig.

Satz. $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph $\Leftrightarrow f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch.

4.2.4 Isolierte Singularitäten

Definition. Sei $z_0 \in \Omega \subset \mathbb{C}$ ein Punkt. Ist $f: U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph für eine offene Umgebung $U \subset \Omega$ von z_0 , so heißt z_0 eine **isolierte Singularität** von f . Gilt $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{|f(z)|} = 0$, dann nennt man z_0 eine **Polstelle** von f . Ist z_0 weder eine Polstelle noch hebbar, so heißt z_0 eine **wesentliche Singularität**.

Beispiele. Die isolierte Singularität $z=0$ ist hebbar für $f(z) = \frac{\sin z}{z}$, ist eine Polstelle von $f(z) = \frac{1}{z}$ oder $f(z) = \cot z$, und ist eine wesentliche Singularität von $f(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right)$.

Laurent-Reihe. Sei z_0 isolierte Singularität der holomorphen Funktion f .

Gilt $f(z) = f_+(z) + f_-(z)$ mit Potenzreihen $f_+(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$, konvergent für $|z-z_0| < R$, und $f_-(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} (z-z_0)^{-k}$, konvergent für $|z-z_0| > r$, dann heißt $f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k (z-z_0)^k$ (konvergent für $r < |z-z_0| < R$) die **Laurent-Reihe** von f bzgl. z_0 . (Diese ist eindeutig bestimmt.)

Satz. Ist f holomorph auf $0 < |z-z_0| < R$, dann gilt die folgende Äquivalenz:

z_0 ist Polstelle von $f \iff$ die Laurent-Reihe von f bzgl. z_0 enthält nur endlich viele negative Potenzen von $z-z_0$: $f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ ($m < \infty$ heißt **Ordnung** des Pols).

Aufgabe. Ermittle die Laurent-Reihe von $f(z) = \frac{1}{z^2+a^2}$ bzgl. $z = ia$.

4.2.5 Residuensatz

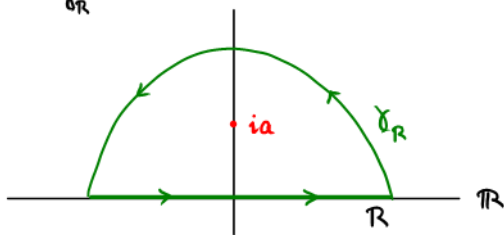
Definition. Sei z_0 Polstelle der holomorphen Funktion f . Unter dem **Residuum** von f in z_0 versteht man die Zahl $\text{Res}(f, z_0) := a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{S_r(z_0)} f(z) dz$, also den Koeffizienten von $(z-z_0)^{-1}$ in der Laurent-Reihe von f bzgl. z_0 . Der zweite Ausdruck als Integral stimmt für r hinreichend klein, so dass f holomorph auf $U \setminus \{z_0\} \supset S_r(z_0)$.

Residuensatz. Sei f holomorph auf dem gelochten Gebiet $\Omega' = \Omega \setminus (\{z_1\} \cup \{z_2\} \cup \dots \cup \{z_N\})$ mit Polstellen z_1, \dots, z_N . Ist $\gamma: S^1 \rightarrow \Omega'$ eine (stückweis) stetig differenzierbare und in Ω kontrahierbare Kurve, so gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^N m_j \text{Res}(f, z_j)$$

mit m_j der (algebraischen) Zahl von Umläufen von γ um z_j .

Beispiel. $\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ikx}}{x^2+a^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{ikz}}{z^2+a^2} dz = 2\pi i \text{Res}\left(z \mapsto \frac{e^{ikz}}{z^2+a^2}, z=ia\right) = \frac{\pi}{a} e^{-ka}$.



Aufgabe. Berechne die Fourier-Transformierte der Fermi-Dirac Verteilung, $\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\epsilon t/\hbar}}{1 + e^{\beta(\epsilon - \mu)}} d\epsilon$.

Appendix 4.3: Fourier-Transformation temperierter Distributionen

Literatur: Fischer & Kaul, Bd. 2, § 13, no. 6

Motivation. Physik-Lehrbücher/Vorlesungen:

$$\delta(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ik(x-x')} d^n k.$$

Wie ist diese Formel zu verstehen?

4.3.1 Temperierte Distributionen

Aus K1P2 (Abschnitt 7.13) bekannt: Schwartz-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ schnell fallender glatter Funktionen, und: Fourier-Transformation ist Bijektion $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in Folge der PD-Regeln.

Versehe nun $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit dem folgenden Konvergenzbegriff:

$$\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi \text{ für } k \rightarrow \infty \iff x^\alpha \partial^\beta \varphi_k \rightarrow x^\alpha \partial^\beta \varphi \text{ auf } \mathbb{R}^n \text{ für jedes Paar von Multi-Indizes } \alpha, \beta.$$

Definition. Eine **temperierte Distribution** T auf \mathbb{R}^n ist eine stetige lineare Abbildung $T: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$.

Der Vektorraum der temperierten Distributionen auf \mathbb{R}^n wird mit $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet. Er ist per Definition der Dualraum zu $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

$$\text{Testfunktionen: } C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \equiv \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{T}(\mathbb{R}^n) \equiv C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Panorama.

$$\text{Distributionen: } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \supset \underbrace{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)}_{\text{temperiert}} \supset \underbrace{\mathcal{T}'(\mathbb{R}^n)}_{\text{mit kompaktem Träger}}$$

Beispiele. (i) Jede Distribution mit kompaktem Träger (wie z.B. die Delta-Distribution δ_a) ist temperiert.

(ii) Für jedes Polynom u ist die zugehörige Distribution $\{u\}$ temperiert.

(iii) **Gegenbeispiel:** der lokal-integrierbaren Funktion $u(x) = e^{ax}$ ($a \neq 0$) entspricht eine Distribution $\{u\} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, die allerdings nicht temperiert ist.

Operationen auf temperierten Distributionen T werden genauso erklärt wie zuvor für $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$,

dazu gehört Differentiation, Zurückziehen mittels C^∞ -Diffeomorphismen und Multiplikation mit

C^∞ -Funktionen, die jetzt allerdings polynomiell beschränkt (also nicht exponentiell wachsend) sein müssen.

4.3.2 Fourier-Transformation auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Durch die Erweiterung des Raums der Testfunktionen $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und die entsprechende Einschränkung des Raums der Distributionen $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \supset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ gewinnt man die Möglichkeit für eine zusätzliche (auf $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ nicht erklärte) Operation: Fourier-Transformation.

Definition. Die Fourier-Transformierte FT einer temperierten Distribution T wird erklärt durch $\mathcal{F}T[\varphi] := T[\mathcal{F}\varphi]$.

Satz. (i) Die Fourier-Transformierte einer temperierten Distribution ist wieder temperiert.

(ii) Die Fourier-Transformation $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $T \mapsto \mathcal{F}T$ ist eine Bijektion.

(iii) Es gelten die PQ-Regeln $\mathcal{F}PT = Q\mathcal{F}T$ und $\mathcal{F}QT = -P\mathcal{F}T$.

Notation/Konvention. $(\mathcal{F}\varphi)(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ikx} f(x) d^n x$.
 $e_k(x) = e^{ikx}$.

Aufgabe. (i) $\mathcal{F}\delta_a = (2\pi)^{-n/2} \{e_{-a}\}$.

(ii) $\mathcal{F}\{e_a\} = (2\pi)^{n/2} \delta_a$.

(iii) $\mathcal{F}\{x^\alpha\} = (2\pi)^{n/2} i^{|\alpha|} \partial^\alpha \delta$.