

# 7 Elektrodynamik: Grundgesetze

## 7.1 Induktionsgesetz


Magnetische Feldstärke  $B \in \Omega^2(E_3)$ ,  $dB = 0$ ,  $[B] = \frac{\text{Energie}}{\text{Strom}}$ .

Elektrische Feldstärke  $E \in \Omega^1(E_3)$  (Statik:  $dE = 0$ ),  $[E] = \frac{\text{Energie}}{\text{Ladung}}$ .

Induktionsgesetz (differenzielle Form):  $dE = -\dot{B}$  (Faraday, 1831).  
 $\text{rot } \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$

In beliebigen Koordinaten  $\xi_i$ :

$$\left. \begin{aligned} B &= \sum_{i < j} B_{ij} d\xi_i \wedge d\xi_j \\ E &= \sum_i E_i d\xi_i \end{aligned} \right\} \partial_i E_j - \partial_j E_i = -\dot{B}_{ij}$$

Integrierte Form:  $\oint_{\partial\Sigma} E = - \iint_{\Sigma} \dot{B}$  

In Worten: die elektrische Ringspannung längs  $\partial\Sigma$  ist gleich minus der Zeitableitung des magnetischen Flusses durch  $\Sigma$ .

Im Kettenbild (im  $E_3$ ): 1-Kette  $B$ , 2-Kette  $E$  (jeweils mit äußerer Orientierung).

"Der Rand der 2-Kette von  $E$  ist gleich dem Negativen der Zeitableitung der 1-Kette von  $B$ ":  
 $\partial E = -\dot{B}$ .

Illustration.

$$\partial S = \tilde{\gamma}_i - \tilde{\gamma}_f \quad \left( \begin{array}{c} \text{Diagram of a circuit with a switch S and two paths } \tilde{\gamma}_f \text{ and } \tilde{\gamma}_i \end{array} \right) \quad \left. \begin{aligned} \dot{B} &= \frac{\phi_m}{\Delta t} (\tilde{\gamma}_f - \tilde{\gamma}_i) \\ E &= \frac{\phi_m}{\Delta t} S \end{aligned} \right\} \partial E = -\dot{B}$$

Interpretation. Vergleich mit der Kontinuitätsgleichung  $\frac{d}{dt} \iint_U \rho = - \oint_{\partial U} j$  ("elektrische Ladung ist erhalten")

suggeriert die Interpretation des Induktionsgesetzes als Kontinuitätsgleichung  $\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} B = - \oint_{\partial\Sigma} E$

mit der Deutung (in Kombination mit  $dB = 0$ ): "magnetischer Fluss ist erhalten",

in Bekräftigung der bildlichen Vorstellung, dass  $B$  aus magnetischen Flusslinien aufgebaut ist.

Beachte:  $\dot{B} = -dE \wedge$   $dB = \text{const.}$

Mehr zum Induktionsgesetz in Abschnitt 7.4.

## 7.2 Ampere-Maxwell-Gesetz

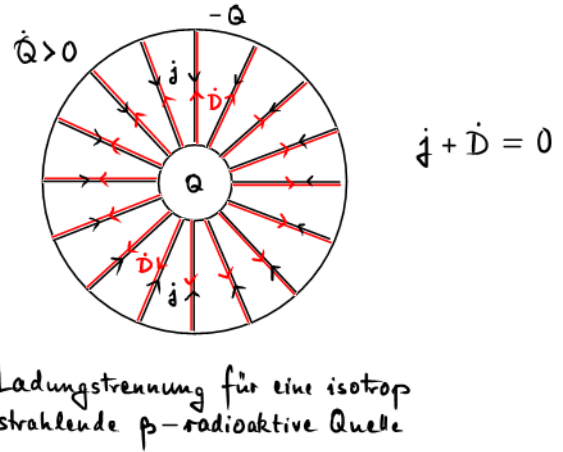
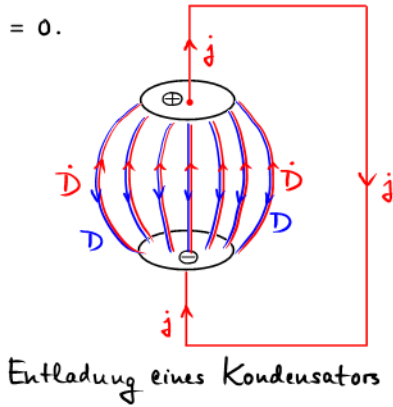
Ampere-Gesetz  $dH = j$  erfordert  $dj = d^2H = 0$  und wird inkonsistent, wenn  $dj = -\dot{j} \neq 0$ .

Beobachtung:  $dj = -\dot{j} \stackrel{\text{Gauss-G.}}{=} -d\dot{D} \approx d(j + \dot{D}) = 0$ .

Beachte  $j, \dot{D} \in \tilde{\Omega}^2(E_3)$ ,  $[j] = [\dot{D}] = \text{Strom}$ .

Beispiele

für  $d(j + \dot{D}) = 0$ .



Ampere-Maxwell-Gesetz (differentialische Form):  $dH = j + \dot{D}$  (Maxwell, ca. 1865).

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \dot{\vec{D}}$$

Wichtige Konsequenz (siehe später): Existenz elektromagnetischer Wellen (ohne Äther, Materie, ...).

In beliebigen Koordinaten  $\xi_i$  (mit  $H = \sum_i H_i [d\xi_i; 0r] \in \tilde{\Omega}^1(E_3)$  und analog für  $j, \dot{D}$ ) hat man  $\partial_i H_j - \partial_j H_i = j_{ij} + \dot{D}_{ij}$  (wähle in den Ausdrücken für  $H, j, \dot{D}$  die gleiche Raumorientierung).

Integrierte Form:  $\oint_{\partial S} H = \iint_S (j + \dot{D})$ .



In Worten: die magnetische Ringspannung längs  $\partial S$  ist gleich der Summe aus Ladungsstrom und Verschiebungsstrom ( $= \iint_S \dot{D}$ ) durch  $S$ .

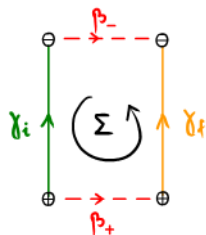
Kettenbild. 2-Kette  $H$ ; 1-Ketten  $j, \dot{D}$  (jeweils mit innerer Orientierung).

"Der Rand der 2-Kette von  $H$  ist gleich der (randlosen) 1-Kette der Summe von  $j$  und  $\dot{D}$ ":

$$\partial H = j + \dot{D}$$

Illustration.

$$\partial \Sigma = \delta_t - \delta_i + \beta_+ - \beta_-$$



$$H = \frac{q}{\Delta t} \Sigma$$

$$\dot{D} = \frac{q}{\Delta t} (\delta_t - \delta_i)$$

$$j = \frac{q}{\Delta t} (\beta_+ - \beta_-)$$

$$\partial H = j + \dot{D}$$

### 7.3 Lie-Ableitung

Gegeben sei Vektorfeld  $v$  auf Raum  $M$ .

Der Fluss des Vektorfeldes  $v$  ist die 1-Parametergruppe von Abbildungen  $\varphi_t : M \rightarrow M$  ( $\varphi_{t=0} = \text{Id}$ ,  $\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t}$ ) mit der Eigenschaft  $\frac{d}{dt} \varphi_t(p) = v(\varphi_t(p))$ .

Erinnerung: Zurückziehen von  $k$ -Formen mittels einer Abbildung  $\psi$ .

Funktion  $f$  ( $k=0$ ):  $\psi^* f = f \circ \psi$ , also  $(\psi^* f)(p) = f(\psi(p))$ .

1-Form  $E$  ( $k=1$ ):  $(\psi^* E)_p(u) = E_{\psi(p)}((D_p \psi)(u))$ .

Es gilt  $\psi^*(\alpha \wedge \beta) = (\psi^* \alpha) \wedge (\psi^* \beta)$ .

Definition (Lie-Ableitung einer  $k$ -Form  $\omega$ ):  $\mathcal{L}_v \omega = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t^* \omega$ .

Aus der Relation  $\psi^*(\alpha \wedge \beta) = (\psi^* \alpha) \wedge (\psi^* \beta)$  folgt sofort, dass  $\mathcal{L}_v$  eine Derivation ist, also der Leibniz-Produktregel genügt:  $\mathcal{L}_v(\alpha \wedge \beta) = (\mathcal{L}_v \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge \mathcal{L}_v \beta$ .

Cartan-Formel:  $\mathcal{L}_v = i(v) \cdot d + d \cdot i(v)$ .

Beweisstrategie: Zeige, dass  $i(v) \cdot d + d \cdot i(v)$  eine Derivation ist und auf Funktionen  $f$  und exakten 1-Formen  $dg$  mit  $\mathcal{L}_v$  übereinstimmt.

Kettenbild. Es gilt  $\varphi_{-t}^* \mathcal{I}(c) = \mathcal{I}(\varphi_t(c))$ .

$$\begin{aligned} \text{Rechnerischer Nachweis: } \int_M \mathcal{I}(\varphi_t(c)) \wedge \omega &\stackrel{!}{=} \int_{\varphi_t(c)} \omega = \int_c \varphi_t^* \omega = \int_M \mathcal{I}(c) \wedge \varphi_t^* \omega = \int_M \varphi_t^* (\varphi_{-t}^* \mathcal{I}(c) \wedge \omega) \\ &= \int_{\varphi_t(M)} \varphi_{-t}^* \mathcal{I}(c) \wedge \omega = \int_M \varphi_{-t}^* \mathcal{I}(c) \wedge \omega. \end{aligned}$$

Differenzieren nach  $t$  an der Stelle  $t=0$  ergibt  $-\mathcal{L}_v \mathcal{I}(c) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_{-t}^* \mathcal{I}(c) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathcal{I}(\varphi_t(c))$ .

↳ Lie-Ableitung auf Ketten:  $-\mathcal{L}_v c := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi_{\Delta t}(c) - c}{\Delta t} \equiv \dot{c}$ .

Verifikation im Spezialfall  $c = p$  (Punkt  $p \in E_3$ ):  $-\mathcal{L}_v p = -(i(v)d + d i(v)) p = -d i(v) p = \partial i(v) p = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(p + v \Delta t) - p}{\Delta t}$ .

Anwendung: Magnetostatik.

	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p>ruhende Ionen (<math>v=0</math>)</p> <p>↓</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>Elektronen (<math>v \neq 0</math>)</p> <p>↓</p> </div> </div>	
elektrische Ladungsdichte	$\rho = \rho_+ + \rho_- = 0$	$(dD_{\pm} = \rho_{\pm})$ .
elektrische Erregung	$D = D_+ + D_- = 0$	
elektrische Stromdichte	$j = i(v=0) \rho_+ + i(v) \rho_- = i(v) \rho_- \neq 0$ .	

$v$  Geschwindigkeitsvektorfeld für die 1-Kette von  $D_-$  ("elektrische Flusslinien folgen den elektrischen Ladungen").

Alles sei stationär (↔ Magnetostatik):  $\dot{D}_- = -\mathcal{L}_v D_- = 0$ .

Behauptung:  $H = -\iota(v) D_-$  ist Lösung des Ampere-Gesetzes.

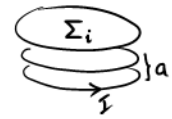
Beweis:  $dH = -d\iota(v) D_- = -\mathcal{L}_v D_- + \iota(v) dD_- = \dot{D}_- + \iota(v) j_- = j_-$ .

Beispiel 1: gerade Stromlinie  $j = I \gamma$  ( $\gamma = z$ -Achse).

Zylinderkoordinaten.  $D_- = -\frac{Q}{2\pi a} [d\phi \wedge dz; \mathbb{R}] = -D_+$  (elektrische Erregung einer Linienladung auf der  $z$ -Achse ↙)

$v = -|v| \partial_z$ .  $H = -\iota(v) D_- = \frac{I}{2\pi} [d\phi; \mathbb{R}]$ ,  $I = \frac{Q|v|}{a}$ .

Beispiel 2: lange, gerade Spule (Symmetrieachse =  $z$ -Achse),  $j = \sum_{i=1}^N I \partial \Sigma_i$



Zylinderkoordinaten.

$D_- = \frac{Q}{2\pi a} \chi_{\text{Zyl}} [d\phi \wedge dz; \mathbb{R}] = -D_+$  (elektrische Erregung eines homogen negativ geladenen Zylindermantels (Elektronen) bei zusätzlicher Anwesenheit einer (fiktiven) Linien(gegen)ladung auf der Symmetrieachse).

Geschwindigkeitsvektorfeld  $v = -\omega \partial_\phi$  (Kreisfrequenz  $\omega$ ).

$H = -\iota(v) D_- = \frac{I}{a} [dz; \mathbb{R}]$ ,  $I = \frac{Q\omega}{2\pi}$ .

Bemerkung: die fiktive Gegenladung auf der  $z$ -Achse ist ohne Konsequenz für  $j = \iota(v) j_-$ , weil  $v$  dort Null ist.

Resümee magnetostatische Anwendungen (jetzt: vereinfachte Notation  $j_- \equiv j$ ,  $D_- \equiv D$ ).

Zu vorgegebenem  $j$  wähle  $\rho$  und  $v$  (motiviert durch die vorliegende physikalische Situation) so, dass gilt

$j = \iota(v) \rho$ . Sei  $D$  die elektrische Erregung des elektrostatischen Problems mit Ladungsdichte  $\rho$ . Setze  $v$  fort

zu einem Vektorfeld  $v$  mit der Eigenschaft  $\mathcal{L}_v D = 0$ . Dann löst  $H = -\iota(v) D$  das Ampere-Gesetz.

Aufgabe. Unter welcher Bedingung an  $v$  erfüllt  $B = \mu_0 * H = -\mu_0 * \iota(v) D$  die Gleichung  $dB = 0$ ?

Hinweis. Die durch  $*\iota(v) = \varepsilon(\alpha)*$  definierte 1-Form  $\alpha$  ist  $\alpha = \langle v, \cdot \rangle$ . (Hier bezeichnet

$\varepsilon(\alpha): \Omega^k \rightarrow \Omega^{k+1}$  den Operator der äußeren Multiplikation mit  $\alpha$ , also  $\varepsilon(\alpha)\beta := \alpha \wedge \beta$ .)

Dynamische Verallgemeinerung. Sei  $D|_{t=0}$  eine elektrische Erregung zur Ladungsdichte  $\rho|_{t=0}$

(also  $dD = \rho$  zur Anfangszeit  $t=0$ ). Für ein Vektorfeld  $v$  mit Fluss  $\varphi_t$  setze

$D|_t = \varphi_{-t}^* D|_{t=0}$  und  $\rho|_t = \varphi_{-t}^* \rho|_{t=0}$ . Dann erfüllen  $j = \iota(v) \rho$  und  $H = -\iota(v) D$

das Ampere-Maxwell-Gesetz  $dH = j + \dot{D}$ .

## 7.4 Allgemeine Form des Induktionsgesetzes

Vektorfeld  $v$  mit Fluss  $\varphi_t$ ; zeitlich veränderliche Fläche  $\Sigma_t = \varphi_t(\Sigma_0)$ .

$\Phi(t) := \iint_{\Sigma_t} \mathcal{B}$  (magnetischer Fluss durch  $\Sigma_t$ ).

$$\begin{aligned} \text{Berechne die Zeitableitung: } \frac{d}{dt} \Phi(t) &= \iint_{\Sigma_t} \dot{\mathcal{B}} + \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \iint_{\Sigma_0} \varphi_{t+s}^* \mathcal{B} = - \iint_{\Sigma_t} d\mathcal{E} + \iint_{\Sigma_0} \varphi_t^* (\mathcal{L}_v \mathcal{B}) \\ &= - \iint_{\Sigma_t} d\mathcal{E} + \iint_{\Sigma_t} d\iota(v)\mathcal{B} = - \oint_{\partial\Sigma_t} (\mathcal{E} - \iota(v)\mathcal{B}). \end{aligned}$$

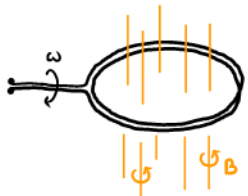
Ergebnis: 
$$\frac{d}{dt} \Phi(t) = - \oint_{\partial\Sigma_t} (\mathcal{E} - \iota(v)\mathcal{B}).$$

In Worten: die Zeitableitung des magnetischen Flusses durch  $\Sigma_t$  ist gleich der elektromotorischen Kraft (E.M.K.) längs  $\partial\Sigma_t$ .

**Bemerkung.** Manche Lehrbücher nennen  $E_{\text{ind}} \equiv \mathcal{E} - \iota(v)\mathcal{B}$  in diesem Kontext das "induzierte" elektrische Feld.

Diesem Sprachgebrauch wollen wir uns nicht anschließen, denn er verwischt den Unterschied zwischen elektrischer und magnetischer Feldstärke (siehe jedoch den Abschnitt über relativistische Kovarianz, wo wir lernen werden, dass und wie sich  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{B}$  bei einem Wechsel des Bezugssystems ineinander transformieren).

**Beispiel:** rotierende Leiterschleife im konstanten Magnetfeld ( $\dot{\mathcal{B}} = 0$ ).



$$\Phi(t) = \Phi(0) \cos(\omega t + \varphi).$$

$$\text{Die E.M.K. } - \frac{d}{dt} \Phi(t) = - \oint \iota(v)\mathcal{B}$$

bewirkt einen Wechselstrom in der Leiterschleife.

**Weiterführende Bemerkung.** Die homogenen Maxwell-Gleichungen ( $d\mathcal{E} = -\dot{\mathcal{B}}$  und  $d\mathcal{B} = 0$ , oder  $d\mathcal{F} = 0$  für  $\mathcal{F} = \mathcal{B} + \mathcal{E} \wedge dt$ ) sind invariant unter beliebigen Diffeomorphismen von Raum und Zeit.

Deshalb bleibt der oben beschriebene Sachverhalt auch dann unverändert, wenn er in einem beschleunigten Bezugssystem betrachtet wird. Zum Beispiel hat man in dem mit der Leiterschleife rotierenden Bezugssystem  $E_{\text{ind}} = -\iota(v)\mathcal{B} = 0$  (wegen  $v=0$ ,  $\Sigma_t = \text{konstant}$ ); dafür gilt jetzt  $\mathcal{E} \neq 0$  (wegen  $\dot{\mathcal{B}} \neq 0$ ).

## 7.5 Energiesatz

Im elektromagnetischen Feld steckt Energie.

$$\text{Energiedichte: } u = \frac{1}{2} (\mathcal{E} \wedge \mathcal{D} + \mathcal{B} \wedge \mathcal{H}) \in \tilde{\Omega}^3(E_3),$$

$$\text{Energiestromdichte: } s = \mathcal{E} \wedge \mathcal{H} \in \tilde{\Omega}^2(E_3) \quad (\text{Poynting-Form}).$$

$$\dot{u} = E \wedge \dot{D} + \dot{B} \wedge H = E \wedge (dH - j) + (-dE) \wedge H = -d(E \wedge H) - E \wedge j$$

In Abwesenheit von geladener Materie ( $j=0$ ) hat man also  $\dot{u} = -ds$ .

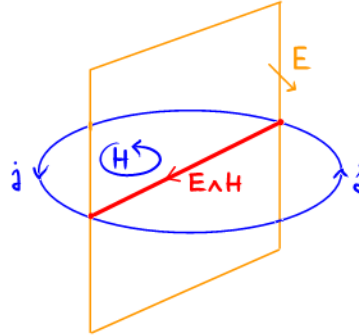
Durch Integration über ein beliebiges Gebiet  $V \subset E_3$  folgt

$$\frac{d}{dt} \iiint_V u = - \oint_{\partial V} s \quad (\text{Integralform des Energiesatzes im Vakuum}).$$

In Anwesenheit von Materie ( $j \neq 0$ ) gilt  $\dot{u} + ds = -E \wedge j$ . Integrierte Form:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V u + \oint_{\partial V} s = - \iiint_V E \wedge j \quad (\text{Bilanz der Feldenergie in } V = - \text{Leistung des Feldes an der Materie in } V).$$

Beispiel: Stromschleife im elektrischen Feld



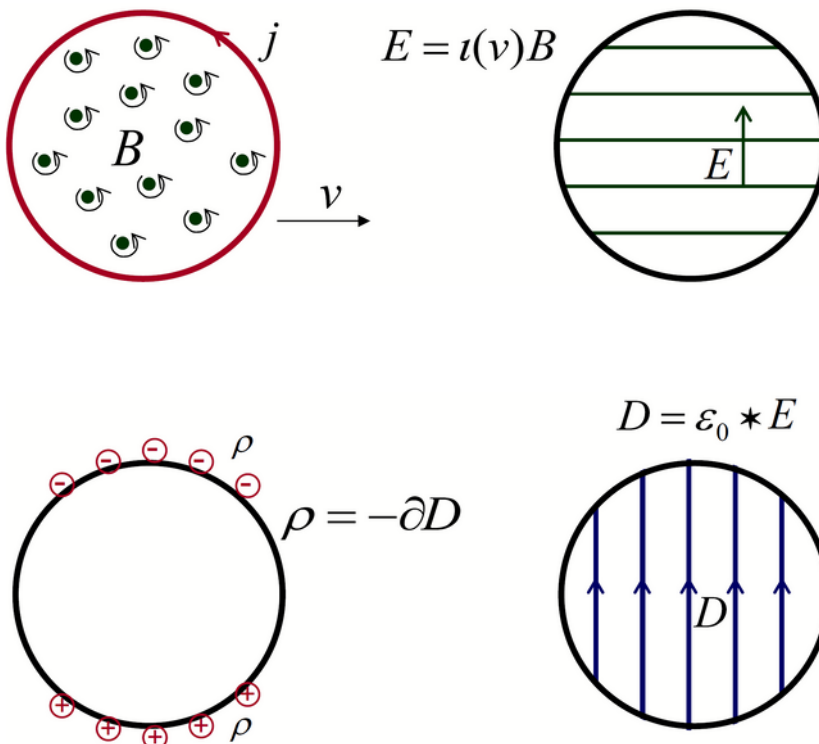
## 7.6 Spule in Bewegung: Relativitätsprinzip

Wir betrachten eine lange, gerade, stromführende Spule mit Zylindersymmetrie um die  $z$ -Achse.

Im Ruhesystem ( $\mathcal{IS}-0$ ) der Spule haben wir:  $B^{(0)} = b^{(0)} \chi^{(0)} dx \wedge dy$ ,  $\chi^{(0)} = \Theta(L^2 - x^2 - y^2)$ ,  
 $H^{(0)} = \frac{b^{(0)}}{\mu_0} \chi^{(0)} [dz; \mathcal{R}]$ ,  $j^{(0)} = \frac{b^{(0)}}{\mu_0} [d\chi^{(0)} \wedge dz; \mathcal{R}]$ .

Nun sei die Spule im Zustand der gleichförmigen geradlinigen Bewegung ( $\mathcal{IS}-1$ ) mit Geschwindigkeit

$v = |v| e_x$ . In Bildern:



In Formeln:

$$B = b \chi \, dx \wedge dy, \quad E = \gamma(v) B = |\gamma| b \chi \, dy,$$

$$H = \frac{1}{\mu_0} *B = \frac{b}{\mu_0} \chi \, [dz; \mathbb{R}], \quad D = \epsilon_0 *E = \epsilon_0 |\gamma| b \chi \, [dz \wedge dx; \mathbb{R}],$$

$$\rho = dD = \epsilon_0 |\gamma| b \frac{\partial \chi}{\partial y} \, d\text{vol}, \quad j = dH - \dot{D} = \frac{b}{\mu_0} [dx \wedge dz; \mathbb{R}] - \epsilon_0 |\gamma|^2 b \frac{\partial \chi}{\partial x} [dx \wedge dz; \mathbb{R}].$$

Bemerkungen. 1) Die charakteristische Funktion  $\chi$  des Spulengebiets ist zeitabhängig.

Im Galilei-Modell der Raum-Zeit erwartet man  $\chi = \Theta(L^2 - (x - vt)^2 - y^2)$ . Die Magnetfeldstärke  $b$  muss konstant sein, weil man sonst Ladungen und Ströme im Inneren (!) des Spulengebiets hätte.

2) Die Beziehung  $E = \gamma(v) B$  folgt aus dem Relativitätsprinzip. In der Tat wirkt auf eine in IS-0 ruhende Testladung  $q$  die Nullkraft  $q(E^{(0)} - \gamma(0)B^{(0)}) = 0$  (wegen  $E^{(0)} = 0$ ), und dann muss die Testladung nach dem Relativitätsprinzip auch in IS-1 kraftfrei sein; also  $q(E - \gamma(v)B) = 0$ .

3) Die Verschiebungsstromdichte berechnet sich wie folgt:  $-\dot{D} = \mathcal{L}_v D = \epsilon_0 |\gamma| b (\mathcal{L}_v \chi) [dz \wedge dx; \mathbb{R}]$  und  $\mathcal{L}_v \chi = \gamma(v) d\chi = |\gamma| \frac{\partial \chi}{\partial x}$ .

Bei der Erstellung der obigen Formeln haben wir benutzt, dass die Naturgesetze (hier: alle Gleichungen der Elektrodynamik) nach dem Relativitätsprinzip in allen Inertialsystemen gleich lauten. Unser frappierendes Ergebnis ist, dass im IS-1 Ladungsdichte  $\rho \neq 0$  vorliegt, obwohl die Ladungsdichte im IS-0 verschwindet. Was ist davon zu halten? Wir analysieren die Situation zunächst im Galilei-Modell der Raum-Zeit.

Dazu vorab zwei Vorbereitungen.

**Vorbereitung 1.** Bei Umsetzung des Relativitätsprinzips sind zwei Sichtweisen möglich (man spricht manchmal von passiver bzw. aktiver Transformation).

Zum einen können wir betonen, dass physikalische Prozesse (wie die Weltgeschichte unserer Spule) eine invariante, von allen Beobachtern losgelöste Existenz zukommt; insbesondere lassen sich physikalische Prozesse koordinatenfrei kartographieren und chronologisieren.

Zur Beschreibung der Spule im IS- $i$  ( $i=0,1$ ) wählen wir dann ein angepasstes Koordinatensystem  $x^{(i)}, y^{(i)}, z^{(i)}, t^{(i)}$ . Der Übergang von einem Inertialsystem ins andere ist lediglich eine Koordinatentransformation. Wir wissen, wie dieser Koordinatenwechsel im Galilei-Modell aussieht:

$$dx^{(0)} = dx^{(1)} - v dt^{(1)}, \quad dt^{(0)} = dt^{(1)}, \quad dy^{(0)} = dy^{(1)}, \quad dz^{(0)} = dz^{(1)}.$$

Diese Sichtweise ("passive Transformation") ist physikalisch natürlich.

Zum anderen können wir so vorgehen, dass wir ein einziges Koordinatensystem  $x, y, z, t$  festlegen und alles in diesem Koordinatensystem ausdrücken. Der Wechsel zwischen Inertialsystemen wird jetzt als Abbildung ("aktive Transformation")  $\psi: M_4 \rightarrow M_4$  ( $M_4 := E_3 \times \mathbb{R}$ ) aufgefasst, welche die ruhende Spule in die gleichförmig und geradlinig bewegte Spule überführt.

Der Abbildung  $\psi: M_4 \rightarrow M_4$  von Weltpunkten (oder allgemeiner: von Weltketten) entspricht die Abbildung  $\psi^{-1*}: \Omega^k(M_4) \rightarrow \Omega^k(M_4)$  (Rückzug mit der inversen Abbildung) von Koordinatenfunktionen ( $k=0$ ) oder allgemeiner von  $k$ -Formen. Im Galilei-Modell haben wir:

$$\psi^{-1*}(dx) = dx - |v| dt, \quad \psi^{-1*}(dt) = dt, \quad \psi^{-1*}(dy) = dy, \quad \psi^{-1*}(dz) = dz.$$

Die zwei Sichtweisen sind mathematisch äquivalent. Wir machen uns im folgenden die zweite zueigen, weil sie leichte Vorteile in Rechnung und Notation einbringt.

**Vorbereitung 2.** Da wir vorhaben, Welt-Abbildungen  $\psi^{-1*}: \Omega^k(M_4) \rightarrow \Omega^k(M_4)$  auszuführen, empfiehlt es sich, die physikalischen Größen zu Weltgrößen in  $\Omega^k(M_4)$  bzw.  $\tilde{\Omega}^k(M_4)$  zusammenzufassen.

Der Übergang zur Raum-Zeit  $M_4 = E_3 \times \mathbb{R}$  erfordert zudem eine Ausdehnung des Ableitungsbegriffes.

Wir schreiben  $d = d + dt \wedge \frac{d}{dt}$  für die äußere Ableitung in Raum und Zeit.

1. Beobachtung:  $B$  und  $E$  gehören zusammen:  $F = B + E \wedge dt \in \Omega^2(M_4)$ .  $F$  steht für Feldstärke (und Faraday-Form) und hat die absolute physikalische Dimension  $[F] = \frac{\text{Energie}}{\text{Strom}} = \frac{\text{Wirkung}}{\text{Ladung}}$ .

Die homogenen Maxwell-Gleichungen  $\dot{B} + dE = 0$  und  $dB = 0$  sind äquivalent zu  $dF = 0$ .

2. Beobachtung:  $\rho$  und  $j$  gehören zusammen:  $J = \rho - j \wedge dt \in \tilde{\Omega}^3(M_4)$ . Die ungerade 3-Form  $J$  heißt "Vierestrom". Sie hat die absolute physikalische Dimension  $[J] = \text{Ladung}$ .

Die Kontinuitätsgleichung  $\dot{\rho} + dj = 0$  ist äquivalent zu  $dJ = 0$ .

**Galilei-Modell?** Wir Galilei-transformieren die Faraday-Form vom Zustand der Ruhe ( $F^{(0)}$ ) in den

Zustand der Bewegung:  $F = \psi^{-1*} F^{(0)} = \psi^{-1*} B^{(0)} = b^{(0)} \psi^{-1*} (\chi^{(0)} dx) \wedge dy = b^{(0)} \chi (dx - |v| dt) \wedge dy$

mit  $\chi = \psi^{-1*} \chi^{(0)} = \Theta(L^2 - (x - |v|t)^2 - y^2)$ . Hieraus lesen wir ab:  $B = b^{(0)} \chi dx \wedge dy$  und

$E = |v| b^{(0)} \chi dy$ , was mit den obigen Ausdrücken für  $B, E$  übereinstimmt, wenn  $b^{(0)} = b$

(was sich später als unhaltbar herausstellen wird). So weit, so gut ...

Jetzt Galilei-transformieren wir in der gleichen Weise den Vierestrom:



$$\psi^{-1*} j^{(0)} = \psi^{-1*} (-j^{(0)} \wedge dt) = -\frac{b^{(0)}}{\mu_0} [\psi^{-1*} (d\chi^{(0)}) \wedge dz; \mathcal{R}] \wedge dt.$$

Mit der Rechenregel  $\psi^{-1*} d = d \psi^{-1*}$  ("äußere Ableitung vertauscht mit Rückzug von Formen")

$$\text{erhalten wir } \psi^{-1*} j^{(0)} = -\frac{b^{(0)}}{\mu_0} [d\chi \wedge dz; \mathcal{R}] \wedge dt \stackrel{?}{=} j.$$

An dieser Stelle stehen wir vor einem gravierenden Problem: wegen  $\psi^{-1*}(dt) = dt$  im Galilei-Modell führt  $\rho^{(0)} = 0$  im IS-0 unweigerlich zu  $\rho = 0$  im IS-1, im Widerspruch zur Vorhersage (siehe oben) der Maxwell'schen Theorie. Wenn wir am Relativitätsprinzip ("kein Inertialsystem ist ausgezeichnet") festhalten wollen, müssen wir entweder die Maxwell'sche Theorie oder das Galilei-Modell der Raum-Zeit aufgeben.

**Minkowski-Modell.** Da die Maxwell'sche Theorie nachweislich stimmt, ist ein neues Modell für die die Raum-Zeit mit passenden Koordinatentransformationen zwischen Inertialsystemen zu entwickeln.

Wie wir aus dem Kapitel über Newton'sche Mechanik wissen, ist der Begriff der gleichförmigen und geradlinigen Bewegung in der affinen Struktur der Galilei-Raum-Zeit begründet. An diesem Begriff halten wir fest (jedenfalls solange allgemein-relativistische Effekte vernachlässigbar sind) und modellieren  $M_4$  als affinen Raum. Gesucht ist dann eine affine Abbildung  $\psi: M_4 \rightarrow M_4$ , unter der die ruhende Spule (IS-0) in die bewegte Spule (IS-1) übergeht. Dazu machen wir den Ansatz

$$\psi^{-1*}(dx) = \alpha dx + \beta dt, \quad \psi^{-1*}(dy) = dy,$$

$$\psi^{-1*}(dt) = \alpha' dt + \beta' dx, \quad \psi^{-1*}(dz) = dz.$$

Damit die transformierte Spule  $\psi^{-1*} \chi^{(0)} = \chi$  tatsächlich die Geschwindigkeit  $|v|$  in Richtung der positiven  $x$ -Achse hat, muss gelten:  $\beta = -|v|\alpha$ , also  $\psi^{-1*}(dx) = \alpha(dx - |v|dt)$ . Durch Übertragen der entsprechenden Betrachtung vom Galilei-Modell sehen wir dann sofort  $\psi^{-1*} F^{(0)} = F$ , wenn  $\alpha = \frac{b}{b^{(0)}}$ .

Entscheidend ist jetzt die Rechnung für den Viererstrom:

$$\begin{aligned} \psi^{-1*} j^{(0)} &= -\frac{b^{(0)}}{\mu_0} [d\chi \wedge dz; \mathcal{R}] \wedge \psi^{-1*}(dt) \\ &= -\frac{b^{(0)}}{\mu_0} [(dx + \dot{\chi} dt) \wedge dz; \mathcal{R}] \wedge (\alpha' dt + \beta' dx) \\ &= -\frac{b^{(0)}}{\mu_0} [d\chi \wedge dz; \mathcal{R}] \wedge \alpha' dt - \frac{b^{(0)}}{\mu_0} \left[ \frac{\partial \chi}{\partial y} dy \wedge dz; \mathcal{R} \right] \wedge \beta' dx - \frac{b^{(0)}}{\mu_0} [\dot{\chi} dt \wedge dz; \mathcal{R}] \wedge \beta' dx. \end{aligned}$$

Vergleich mit dem Maxwell-berechneten Ausdruck für  $j$  zeigt, dass sich die gewünschte Gleichheit

$$\psi^{-1*} j^{(0)} = j \text{ einstellt, wenn wir setzen } \alpha' = \alpha = \frac{b}{b^{(0)}} \text{ und } \beta' = -\mu_0 \epsilon_0 |v| \frac{b}{b^{(0)}}.$$

Insgesamt erhalten wir also  $\psi^{-1*}(dx) = \alpha(dx - |v|dt)$ ,  $\psi^{-1*}(dt) = \alpha(dt - \mu_0 \epsilon_0 |v| dx)$ .

Der Parameter  $\alpha = \frac{b}{b^{(0)}}$  bleibt fürs erste unbestimmt.

Beobachtung. Aus  $\psi^{-1*}(dx) = \alpha(dx - |v|dt)$  folgt

$$\psi^{-1*}x = \alpha(x - |v|t) + \text{const}, \text{ und ohne Verlust setzen wir } \text{const} = 0.$$

Hiermit berechnen wir 
$$\iint B = b \iint \chi \, dx \wedge dy = b \iint \Theta(L^2 - \alpha(x - |v|t)^2 - y^2) \, dx \wedge dy$$

$$= \frac{b}{\alpha} \iint \Theta(L^2 - x^2 - y^2) \, dx \wedge dy = b^{(0)} \iint \chi^{(0)} \, dx \wedge dy = \iint B^{(0)}.$$

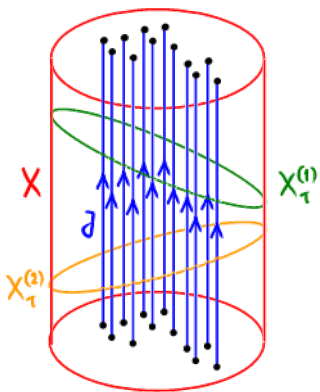
Der magnetische Fluss durch den Spulenquerschnitt hat also in IS-0 und IS-1 den gleichen Wert!

Dass dies kein Zufall ist, sondern ganz allgemein gilt, wollen wir nun erläutern.

Als Vorbereitung besprechen wir den analogen Fall der elektrischen Ladung.

Wir betrachten eine räumlich lokalisierte Ladungsverteilung (z.B. ein geladenes schwarzes Loch) mit

Viererstrom  $J$ . Passend zu  $J$  wählen wir eine Weltrohrumgebung  $X \subset M_4$  (offen), also  $\text{supp}(J) \subset X$ .



Dann wählen wir zwei Raum-Zeit-Koordinatensysteme (nicht notwendig

Inertialsysteme) mit Zeitkoordinaten  $t^{(1)}$  bzw.  $t^{(2)}$  und setzen

$$X_\tau^{(i)} := \{ p \in X \mid t^{(i)}(p) = \tau \} \quad (i=1,2).$$

Die entsprechenden Beobachter ermitteln für die Gesamtladung die Werte

$$Q^{(i)}(\tau) = \iiint_{X_\tau^{(i)}} J = \iiint_{X_\tau^{(i)}} j^{(i)}.$$

Man zeigt nun  $Q^{(i)}(\tau + \Delta\tau) = Q^{(i)}(\tau) \equiv Q^{(i)}$ :

$$Q^{(i)}(\tau + \Delta\tau) - Q^{(i)}(\tau) = \iiint_{X_{\tau+\Delta\tau}^{(i)}} J - \iiint_{X_\tau^{(i)}} J = \iiint_{X_{\tau+\Delta\tau}^{(i)} - X_\tau^{(i)}} J = \iiint_{\partial V} J = \iiint_V dJ = 0.$$

durch Hinzuzügen von Randteilen, wo  $J=0$ .

Mit dem gleichen Argument sieht man:  $Q^{(1)} = Q^{(2)}$ .

Wichtiges Fazit: die Gesamtladung ist nicht nur zeitunabhängig, sondern auch noch für alle Beobachter gleich.

(Hingegen ist die Ladungsdichte vor Integration zeitabhängig und beobachterabhängig, wie wir am Beispiel der Spule in Ruhe und Bewegung gesehen haben.)

Eine im Wesentlichen identische Argumentation führt zu dem Ergebnis, dass der gesamte magnetische Fluss

zeitunabhängig und beobachterunabhängig ist. Dazu sei  $Y$  eine dreidimensionale Weltrohrumgebung

der Welthistorie des zweidimensionalen Spulenquerschnitts (worum der gesamte magnetische Fluss enthalten ist).

Ähnlich wie vorher sei  $Y_\tau^{(i)} := \{ p \in Y \mid t^{(i)}(p) = \tau \}$  ( $i=1,2$ ) und  $\Phi^{(i)}(\tau) = \iiint_{Y_\tau^{(i)}} F = \iiint_{Y_\tau^{(i)}} B^{(i)}$ .

Wie zuvor (jetzt mit  $dF=0$  statt  $dJ=0$ ) zeigt man, dass gilt  $\Phi^{(i)}(\tau + \Delta\tau) = \Phi^{(i)}(\tau) \equiv \Phi^{(i)}$

(unabhängig von der Zeit) und  $\Phi^{(1)} = \Phi^{(2)}$  (unabhängig vom Beobachter).

Es verbleibt immer noch die Bestimmung des bislang unbestimmten Parameters  $\alpha$  in den Ausdrücken für  $\varphi^{1*}(dx)$  und  $\varphi^{1*}(cdt)$ . Hierzu müssen wir zusätzliche Information heranziehen und verwenden, dass neben der elektrischen Ladung und dem magnetischen Fluss ( $[F] = \frac{\text{Wirkung}}{\text{Ladung}}$ ) eine weitere Integralinvariante existiert: das Wirkungsintegral  $S$ .

**Hintergrund.** In der Lagrange-Mechanik werden wir lernen:

$$S = \int L dt = \int (T - U) dt \quad \text{und} \quad \delta S = 0 \leadsto \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q} \quad (\text{Bewegungsgleichungen}).$$

In der Quantenmechanik lernt man, dass die Wirkung in Einheiten des Planck'schen Wirkungsquantums physikalisch bedeutsam ist. Aus diesen (und anderen) Gründen ist das Wirkungsintegral invariant (d.h. von Beobachter und Koordinatensystem unabhängig).

Wirkungsfunktional des elektromagnetischen Feldes:  $S_{\text{E.M.}} = \int (E \wedge D - B \wedge H) \wedge dt.$

Wir wählen die charakteristische Funktion  $\chi^{(0)}$  des Weltgebiets der Spule jetzt endlich in Raum und Zeit ( $\leadsto$  Abschneidefaktoren für  $z$ -Richtung und Zeitrichtung aufnehmen).

Im Ruhesystem ( $IS=0$ ) der Spule berechnen wir

$$S_{\text{E.M.}}^{(0)} = \int (-B^{(0)} \wedge H^{(0)}) \wedge dt = - \frac{(b^{(0)})^2}{\mu_0} \int \chi^{(0)} d\text{vol}_3 \wedge dt,$$

und in  $IS=1$  ergibt sich  $S_{\text{E.M.}} = (|v|^2 \epsilon_0 b^2 - \frac{b^2}{\mu_0}) \int \chi d\text{vol}_4, \quad d\text{vol}_4 = d\text{vol}_3 \wedge dt.$

Nun investieren wir die zusätzliche Forderung, dass die Invarianz der Wirkung  $S_{\text{E.M.}}^{(0)} = S_{\text{E.M.}}$  nicht nur für das elektromagnetische Feld gilt, sondern auch für die Materie (und andere Eichfelder) gelten muss. Es folgt, dass schon die individuellen Faktoren invariant sein müssen:

$$- \frac{(b^{(0)})^2}{\mu_0} = |v|^2 \epsilon_0 b^2 - \frac{b^2}{\mu_0} \quad \text{und} \quad \int \chi^{(0)} d\text{vol}_4 = \int \chi d\text{vol}_4.$$

Aus der ersten Gleichung deduziert man  $\alpha = \frac{b}{b^{(0)}} = (1 - |v|^2 \epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}.$

Mit  $c := (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$  haben wir dann das folgende Ergebnis für die transformierten Koordinatendifferentiale im Minkowski-Modell der Raum-Zeit:

$$\begin{aligned} \varphi^{-1*}(dx) &= \frac{dx - \frac{|v|}{c} c dt}{\sqrt{1 - \frac{|v|^2}{c^2}}} = \cosh \theta \cdot dx - \sinh \theta \cdot c dt, \\ \varphi^{-1*}(cdt) &= \frac{cdt - \frac{|v|}{c} dx}{\sqrt{1 - \frac{|v|^2}{c^2}}} = -\sinh \theta \cdot dx + \cosh \theta \cdot c dt, \end{aligned} \quad \tanh \theta = \frac{|v|}{c}.$$

(Lorentz-Transformation)

Beachte: im nichtrelativistischen Limes  $\frac{|v|}{c} \ll 1$  geht das neue Transformationsgesetz in das alte (Galilei-Modell) über.

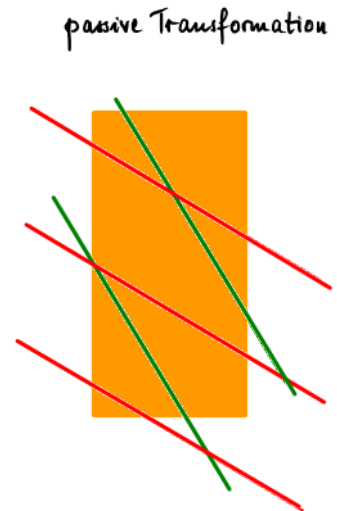
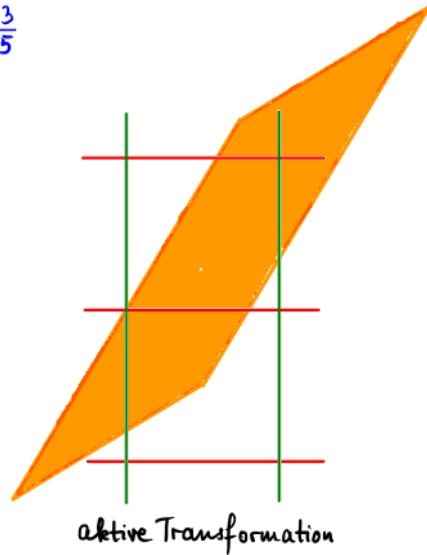
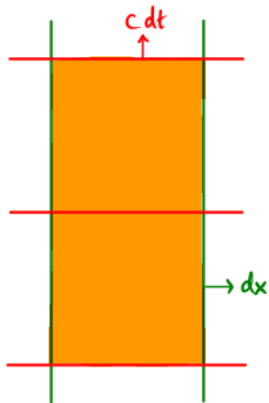
Wir überprüfen die Invarianz des Weltvolumens unter der obigen Lorentz-Transformation:

Vorbetrachtung:  $\psi^*(dx \wedge cdt) = (\cosh\theta \cdot dx + \sinh\theta \cdot cdt) \wedge (\sinh\theta \cdot dx + \cosh\theta \cdot cdt)$   
 $= (\cosh^2\theta - \sinh^2\theta) dx \wedge cdt = dx \wedge cdt.$

Hiermit verifizieren wir  $\psi^* dvol_{\mathbb{M}_4} = dvol_{\mathbb{M}_4}$  und

$$\int_{\mathbb{M}_4} \chi dvol_{\mathbb{M}_4} = \int_{\mathbb{M}_4} (\psi^{-1*} \chi^{(0)}) dvol_{\mathbb{M}_4} = \int_{\psi^{-1}(\mathbb{M}_4)} \chi^{(0)} \psi^* dvol_{\mathbb{M}_4} = \int_{\mathbb{M}_4} \chi^{(0)} dvol_{\mathbb{M}_4}.$$

Graphische Illustration für  $\frac{|v|}{c} = \frac{3}{5}$



Längenkontraktion. Notation:  $dx \equiv dx_1, cdt \equiv dx_0,$   
 $e_x \equiv e_1, \frac{1}{c}e_t \equiv e_0.$

$$D\psi(e_1) = \cosh\theta \cdot e_1 + \sinh\theta \cdot e_0,$$

$$D\psi(e_0) = \sinh\theta \cdot e_1 + \cosh\theta \cdot e_0.$$

$$l_{e_1} = D\psi(1 \cdot e_1 - \tau e_0) = e_1 \cosh\theta + e_0 \sinh\theta - \tau(e_1 \sinh\theta + e_0 \cosh\theta) = e_1(\cosh\theta - \tau \sinh\theta) + e_0 \cdot 0$$

so zu bestimmen, dass Orte zu gleichen Zeiten gemessen werden  $\Rightarrow \tau = \frac{\sinh\theta}{\cosh\theta}$

$$= e_1 \left( \cosh\theta - \frac{\sinh^2\theta}{\cosh\theta} \right) = \frac{e_1}{\cosh\theta}.$$

Also

$$l = \frac{1}{\cosh\theta} \quad (\text{Längenkontraktion}).$$

Zeitdilatation.  $D\psi(1 \cdot e_0) = e_1 \sinh\theta + \cosh\theta \cdot e_0.$

Eigenzeit

Zeit, die für den Beobachter während eines Zyklus der Eigenzeit verstreicht.

"Uhren in Bewegung gehen langsamer" (Zeitdilatation).

Experimentelle Bestätigung. Beim Auftreffen kosmischer Strahlung auf die äußere Erdatmosphäre werden u.a.

Myonen (mittlere Lebensdauer:  $\tau_\mu \approx 2.2 \times 10^{-6} \text{ s}$ ) produziert. Im Galilei-Modell hätten diese Myonen eine mittlere Laufstrecke von maximal  $c\tau_\mu \approx 6.6 \times 10^2 \text{ m}$ , was nicht ausreicht, um die (hohe) Flusddichte der auf der Erdoberfläche ankommenden Myonen zu erklären.

## 7.7 Wellengleichung (für B) und Minkowski-Metrik

$$\ddot{B} = \frac{d}{dt} \dot{B} = \frac{d}{dt} (-dE) = -\frac{1}{\epsilon_0} d * \dot{D} = -\frac{1}{\epsilon_0} d * (dH - j) = -\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} d * d * B + \frac{1}{\epsilon_0} d * j.$$

Multipliziere mit  $\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} \rightsquigarrow \frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} B + d * d * B = \mu_0 d * j.$

Benütze  $*d*B = -\delta B$  und subtrahiere  $\delta d B = 0$ . Mit  $\Delta = \delta d + d \delta$  folgt dann

$$\boxed{\left(\frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} - \Delta\right) B = \mu_0 d * j} \quad (\text{Wellengleichung für } B).$$

Spezielle Lösung im Vakuum ( $j=0$ ):  $B = f(x-ct) dx \wedge dy$ .

Verifikation:  $\frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} B = \frac{(-c)^2}{c^2} f''(x-ct) dx \wedge dy = (\Delta f)(x-ct) dx \wedge dy = \Delta B \quad (\checkmark).$

**Deutung.** Ist  $f$  eine Buckelfunktion ( $\cap$ ), so bewegt sich der Buckel (ohne Formänderung) mit Geschwindigkeit  $c$ . Hieraus ergibt sich die Bedeutung von  $c$  als Geschwindigkeit elektromagnetischer Wellen im Vakuum (kurz: Lichtgeschwindigkeit).

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} - \Delta =: \square \quad \text{heißt Wellenoperator (oder d'Alembert-Operator)}.$$

Unter einer Lorentz-Transformation

$$(Dx)(\partial_0) = \cosh \theta \partial_0 + \sinh \theta \partial_1,$$

$$(Dx)(\partial_1) = \sinh \theta \partial_0 + \cosh \theta \partial_1,$$

bleibt der Wellenoperator  $\square = \partial_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2 - \partial_3^2$  unverändert:

$$(\cosh \theta \partial_0 + \sinh \theta \partial_1)^2 - (\sinh \theta \partial_0 + \cosh \theta \partial_1)^2 = (\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta) (\partial_0^2 - \partial_1^2) = \partial_0^2 - \partial_1^2.$$

Die Rechnung für eine Lorentz-Transformation in  $x_2$ -,  $x_3$ - oder beliebige Richtung geht analog.

Es folgt, dass die Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen gleich ist!

(Vgl. den experimentellen Befund von Michelson-Morley, 1887).

**Erinnerung/Nachhilfe** (Vektorfelder, partielle Ableitungen werden mit der Jacobi-Matrix transformiert):

$$dx'_j = \sum_i \frac{\partial x'_j}{\partial x_i} dx_i \quad \Leftrightarrow \quad \sum_j \frac{\partial x'_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x'_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Äquivalent zur Invarianz des Wellenoperators ist die Invarianz der

**Minkowski-Metrik:**

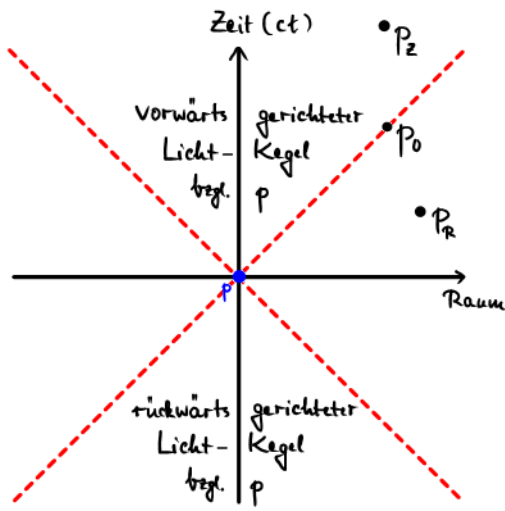
$$g = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ = -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2.$$

Beachte:  $dt^2 = dt \otimes dt$  (nicht  $dt \wedge dt = 0$ ).

Seien  $p$  und  $p'$  zwei Weltpunkte mit Differenzvektor

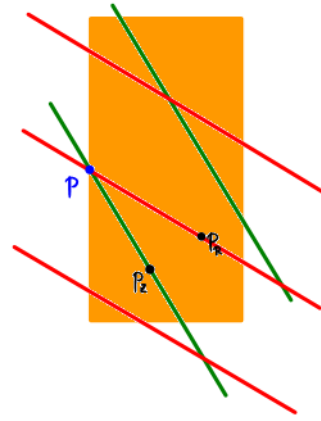
$u = p' - p \in V = \mathbb{R}^4$ . Man unterscheidet 3 Fälle:

$$g(u, u) \begin{cases} > 0 & \text{raumartiger} \\ = 0 & \text{lichtartiger} \\ < 0 & \text{zeitartiger} \end{cases} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Weltvektor } u \\ \text{oder} \\ \text{Weltabstand} \\ \text{zwischen } p \text{ und } p'. \end{array}$$

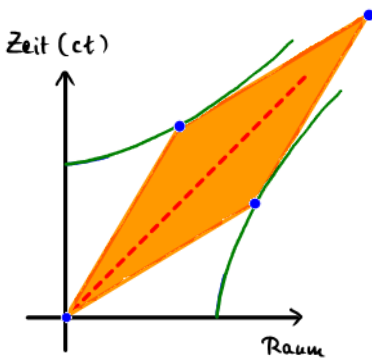


- $p_z - p$  zeitartig,
- $p_0 - p$  lichtartig,
- $p_r - p$  raumartig.

Ist  $u = p' - p$  raumartig (bzw. zeitartig), so existiert ein Inertialsystem, in dem die Ereignisse  $p$  und  $p'$  zur gleichen Zeit (bzw. am gleichen Ort) stattfinden.



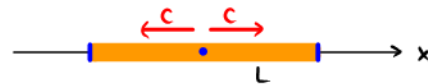
Nochmal Längenkontraktion & Zeitdilatation.



Die Eckpunkte (blau) des Rauten-Weltgebiets liegen auf der Lichtlinie  $g(u,u) = 0$  und dem raumartigen (bzw. zeitartigen) Hyperbelast  $g(u,u) = +1$  (bzw.  $g(u,u) = -1$ ).

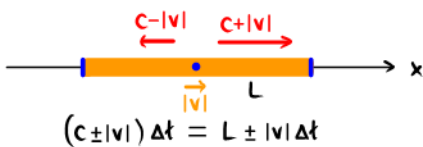
Angesichts der experimentell nachgewiesenen Invarianz (Unabhängigkeit vom Inertialsystem) der Lichtgeschwindigkeit ist die Vorstellung einer absoluten Zeit / Gleichzeitigkeit nicht haltbar:

**Beispiel.** In der Mitte eines ruhenden linearen Objekts der Länge  $2L$  werden gleichzeitig zwei Lichtpulse längs der Ausdehnungsrichtung des Objekts abgeschickt:

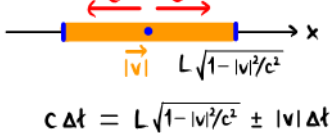


Die beiden Lichtpulse kommen zur Zeit  $\Delta t = L/c$  **gleichzeitig** an den Objektenden an.

Nun betrachten wir denselben Vorgang aus einem Inertialsystem, in dem sich das Objekt mit Geschwindigkeit  $v = |v|e_x$  längs seiner Ausdehnungsrichtung bewegt.

1. Galilei-Modell: 

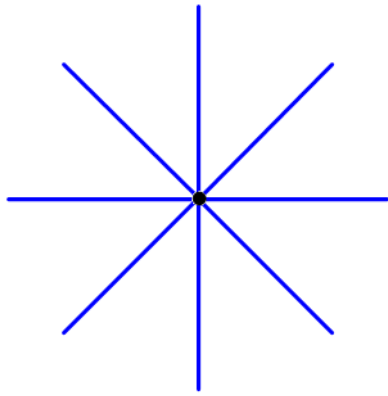
Aus der Sicht des neuen Inertialsystems kommen die beiden Lichtpulse immer noch zur gleichen Zeit  $\Delta t$  an.

2. Minkowski-Modell: 

Aus der Sicht des neuen Inertialsystems kommt der mit dem Objekt gleichlaufende Puls später an ( $\Delta t = \frac{L}{c} \sqrt{\frac{1+|v|/c}{1-|v|/c}}$ ) als der entgegelaufende ( $\Delta t = \frac{L}{c} \sqrt{\frac{1-|v|/c}{1+|v|/c}}$ ).

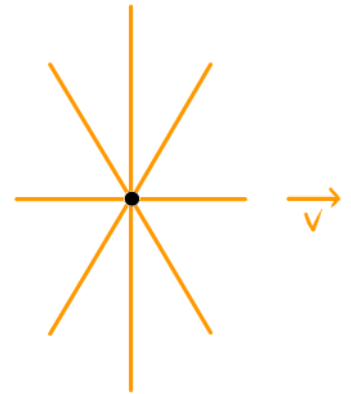
## 7.8 Bremsstrahlung einer Punktladung

Siehe W. Thirring, Lehrbuch der Mathematischen Physik; Band 2: Klassische Feldtheorie

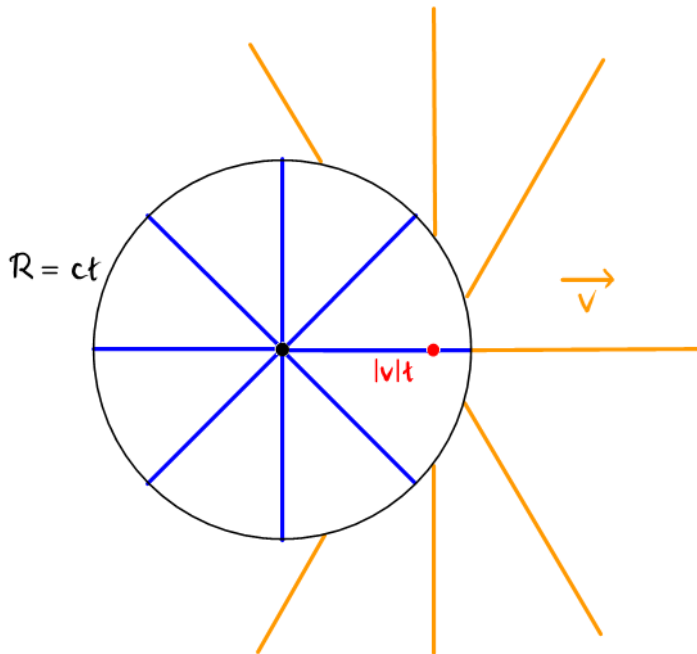


Elektrische Flusslinien einer Punktladung in Ruhe.

Elektrische Flusslinien einer gleichförmig und geradlinig bewegten Punktladung mit Geschwindigkeit  $|v| = \frac{4}{5}c$



Ein starkes elektrisches Feld bremst die Punktladung linear und quasi instantan in den Zustand der Ruhe ab. Das Lorentz-kontrahierte bewegte Flusslinienbild (orange) wird dann zum isotropen statischen Flusslinienbild (blau) umgebogen. Das Verbiegen erfolgt an der um den Ruhepunkt zentrierten und mit Lichtgeschwindigkeit expandierenden Kugeloberfläche (schwarz). Das Intensitätsmaximum des abgestrahlten elektromagnetischen Signals liegt auf einem in Vorwärtsrichtung geneigten Kegel (zentriert um die Bewegungsachse). Im Limes  $|v| \rightarrow c$  geht der Öffnungswinkel des Kegels gegen Null.



Beachte:

wegen  $dD = \rho = 0$  (außerhalb der Punktladung) schließen die "blauen" Flusslinien stetig (durch Verlauf längs der Lichtfläche  $R = ct$ ) an die "orange-farbenen" an.

## 7.9 Raum-Zeit-Formulierung der Elektrodynamik

Homogene Maxwell-Gleichungen:  $dB = 0$  und  $dE = -\dot{B} \wedge \Rightarrow dF = 0$  für  $F = B + E \wedge dt$ .

Inhomogene Maxwell-Gleichungen:  $dD = \rho$  und  $dH = j + \dot{D} \wedge \Rightarrow dG = J$  für  $G = D - H \wedge dt$  und  $J = \rho - j \wedge dt$ .

Materialgleichungen:  $D = \epsilon_0 * E$  und  $B = \mu_0 * H \wedge$  ?

## Hodge-Sternoperator für $M_4$ (Minkowski-Raum)

Metrischer Tensor  $(\cdot, \cdot) : \Omega^k(M_4) \times \Omega^k(M_4) \rightarrow \Omega^0(M_4)$ ;

$$(dx, dx) = (dy, dy) = (dz, dz) = 1, \quad (cdt, cdt) = -1$$

$$dvol_4 = dvol_3 \wedge cdt, \quad dvol_3 = |dx \wedge dy \wedge dz|, \quad dt \text{ orientiert durch Zukunftsrichtung.}$$

Wie zuvor wird  $*$  :  $\Omega^k(M_4) \rightarrow \tilde{\Omega}^{4-k}(M_4)$  definiert durch  $\alpha \wedge * \beta = (\alpha, \beta) dvol_4$ .

$$\text{Beispiele. } \left. \begin{array}{l} dx \wedge * dx = 1 \cdot dvol_4 \\ dy \wedge * dx = dz \wedge * dx = dt \wedge * dx = 0 \end{array} \right\} * dx = [dy \wedge dz; \mathbb{R}] \wedge cdt = \iota(\partial_x) dvol_4.$$

$$\left. \begin{array}{l} cdt \wedge * cdt = -dvol_4 \\ dx \wedge * cdt = dy \wedge * cdt = dz \wedge * cdt = 0 \end{array} \right\} * cdt = dvol_3.$$

$$(dx \wedge dy) \wedge * (dx \wedge dy) = 1^2 dvol_4 \dots \wedge * (dx \wedge dy) = [dz; \mathbb{R}] \wedge cdt.$$

$$(dz \wedge cdt) \wedge * (dz \wedge cdt) = -dvol_4 \dots \wedge * (dz \wedge cdt) = -[dx \wedge dy; \mathbb{R}].$$

Materialgesetz. Berechne  $*F$  für  $F = B + E \wedge dt$ .

$$*_4 B = *_4 (B_{xy} dx \wedge dy + \dots) = \mu_0 H_z [dz; \mathbb{R}] \wedge cdt + \dots = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H \wedge dt.$$

$$*(E \wedge dt) = \frac{1}{c} * (E_z dz \wedge cdt + \dots) = \frac{1}{c} \frac{D_{xy}}{\epsilon_0} [-dx \wedge dy; \mathbb{R}] + \dots = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} D.$$

$$\text{Es folgt } *F = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} (D - H \wedge dt) = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} G \quad \text{oder} \quad \boxed{G = -\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} *F}.$$

## 7.10 Poincaré-Gruppe und Lorentz-Gruppe

Minkowski-Raum  $(M_4, V \approx \mathbb{R}^4, +)$  ist affiner Raum ( $\wedge$  Gerade = gleichförmig und geradlinige Bewegung) von Weltpunkten / Ereignissen. Minkowski-Metrik:  $g = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ .

Definition Poincaré-Gruppe: die Gruppe aller affinen Abbildungen  $\varphi : M_4 \rightarrow M_4$ , deren linearer Teil  $L := D_\varphi \varphi$  die Minkowski-Metrik erhält:  $g(Lu, Lv) = g(u, v)$  für alle  $u, v \in V \approx \mathbb{R}^4$ .

Die Poincaré-Gruppe ist 10-dimensional und geht im nichtrelativistischen Limes ( $|v| \ll c$ ) in die Galilei-Gruppe über.

Definition Lorentz-Gruppe: die Untergruppe von Poincaré-Transformationen, die einen ausgewählten Weltpunkt ("Koordinatenursprung") festhalten,  $\varphi(o) = o$ .

Die Lorentzgruppe ist 6-dimensional und geht im nichtrelativistischen Limes in das semidirekte Produkt der Drehgruppe mit der Gruppe spezieller Galilei-Transformationen über. Bezeichnung:  $O(V; g) = O(3, 1)$ .



**Mitteilung:** die Invarianzgruppe von  $G = -\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} * F$  ist größer (s konforme Gruppe).

Betrachte z.B. eine Raum-Zeit-Dilatation (Streckung) mit Fixpunkt  $o$ :

$$S: M_4 \rightarrow M_4, \quad p \mapsto o + s(p - o).$$

Es gilt  $g(DS(u), DS(v)) = s^2 g(u, v) \neq g(u, v)$  (für  $s \neq 1$ ), also ist  $DS$  keine Lorentz-Transformation (und  $S$  keine Poincaré-Transformation). Trotzdem gilt

$$G = -\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} * F \iff S^* G = -\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} * S^* F,$$

denn  $S^*$  kommutiert mit  $*$ :  $\Omega^k(M_4) \rightarrow \tilde{\Omega}^{4-k}(M_4)$  für  $k=2$  (und nur für  $k=2$ ).

Es folgt, dass  $S^*$  Vakuum-Lösungen ( $J=0$ ) auf Vakuum-Lösungen abbildet.

**Aufgabe.** Jede Raum-Zeit-Dilatation  $S: M_4 \rightarrow M_4$  bildet eine Lösung  $F, G, J$  der elektromagnetischen Theorie ( $dF=0$ ,  $dG=J$ ,  $G = -\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} * F$ ) wieder auf eine Lösung ab. Interpretieren Sie diese allgemeine Beziehung zwischen Lösungen im Grenzfall der Elektrostatik.

**Aufgabe.** Wie lässt sich der dynamische Vorgang von Abschn. 7.8 (Bremsstrahlung einer Punktladung) im Lichte konformer Invarianz (hier: mittels Raum-Zeit-Dilatationen) verstehen?

**Hinweis.** Sei  $o \in M_4$  der Brems(welt-)punkt des abrupten Bremsvorgangs. Dann gilt  $S^* J = J$  für jede Raum-Zeit-Dilatation  $S: M_4 \rightarrow M_4$  mit Fixpunkt  $o$ .

**Aufgabe.** Was passiert im alternativen Szenario, in dem eine anfänglich ruhende Punktladung instantan in den Zustand der gleichförmigen und geradlinigen Bewegung versetzt wird?

## 7.11 Elektrodynamik in Materie

*Motivation.* Die Gleichungen der elektromagnetischen Theorie zusammen mit dem Kraftgesetz für bewegte Ladungen geben im Prinzip eine vollständige Beschreibung elektromagnetischer Phänomene im Rahmen der klassischen Physik. Ihre Gültigkeit setzt jedoch voraus, daß in die inhomogenen Maxwell-Gleichungen wirklich *alle* Ladungen und Ströme eingehen – die in Materie auf atomaren oder mikroskopischen Skalen existierenden eingeschlossen. Dieser Umstand nimmt der oben formulierten exakten Theorie ihre Vorhersagekraft, denn die atomaren Ladungsverteilungen und -bewegungen und ihre Reaktion auf elektromagnetische Felder sind im allgemeinen zu kompliziert, als daß wir hoffen könnten, sie im Detail zu erfassen. Zudem erfordert ihre korrekte Beschreibung den Formalismus der Quantenstatistik, der den Rahmen dieser Vorlesung bei weitem sprengt. Um das schwierige Problem der Berechnung atomarer Prozesse von unserem eigentlichen Ziel, nämlich der Vorhersage *makroskopischer* elektromagnetischer Phänomene, abzutrennen, führen wir Näherungen ein und formulieren eine *Maxwellsche Theorie in Materie*, welche die mikroskopischen Details auf einfache Weise berücksichtigt. Unser Vorgehen wird dabei so sein, daß wir im ersten Schritt ein exaktes Umschreiben der elektromagnetischen Theorie vornehmen. Im zweiten Schritt führen wir dann ein Raum- und Zeitmittel durch, das die in Materie rapiden Schwankungen der elektromagnetischen Felder auf mikroskopischen Skalen eliminiert, und ersetzen die Materialgleichungen durch phänomenologische Beziehungen.

Wir beginnen, indem wir eine Aufspaltung der Ladungen und Ströme in zwei Anteile vornehmen:

$$\rho = \rho^{\text{ext}} + \rho^{\text{mat}}, \quad \text{und} \quad j = j^{\text{ext}} + j^{\text{mat}}.$$

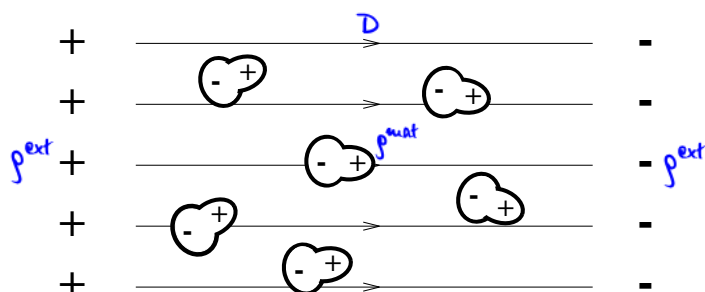
Den jeweils ersten Summanden nennen wir den externen Anteil, den zweiten den Materieanteil. Generell haben wir uns vorzustellen, daß sich die externen Ladungen und Ströme außerhalb der Materie befinden oder jedenfalls durch äußeren Zugriff manipuliert werden können. Im Unterschied hierzu ist der Materieanteil der sich jenseits unserer Kontrolle befindliche Anteil, welcher sich in Reaktion auf die Kraftwirkung elektromagnetischer Felder in Materie einstellt. Die Aufspaltung in zwei Anteile ist nicht immer eindeutig, sondern muß der jeweiligen Problemstellung angepaßt werden. Eine sinnvolle Aufspaltung erfüllt die Kontinuitätsgleichung

$$\dot{\rho}^{\text{ext}} + \text{d}j^{\text{ext}} = 0.$$

Es folgt dann mit  $\dot{\rho} + \text{d}j = 0$  auch die Kontinuitätsgleichung für Materieladungen und -ströme. Wir vereinbaren außerdem, überschüssige Ladungen immer als extern zu zählen, d.h.  $\rho^{\text{mat}}$  verschwinde nach Integration über den gesamten von Materie erfüllten Raumbereich.

*Elektrische Polarisierung.* In einem polarisierbaren Medium bewirkt die Anwesenheit elektrischer Felder eine Umorganisation der mikroskopischen Ladungen. Zwei Mechanismen sind zu nennen. Zum einen können durch die

Kraftwirkung der elektrischen Feldstärke Ladungen, die sich sonst neutralisieren, gegeneinander verschoben werden, zum anderen richten sich permanent getrennte Ladungen, z.B. Moleküle mit einem statischen Dipolmoment, längs des elektrischen Feldes aus (Abb. 1.13). Die Umorganisation von Ladungen

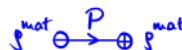


**Abbildung 1.13.** Polare Moleküle (z.B. in einem Lösungsmittel) richten sich im elektrischen Feld aus.

$$P \in \tilde{\Omega}^2(E_3)$$

wird durch die *elektrische Polarisierung*  $P$ , eine 2-Form, quantitativ erfaßt. Für eine beliebige orientierte Fläche  $S$  definieren wir  $\int_S P$  als die gesamte Materieladung, die infolge der Kraftwirkung der elektrischen Feldstärke durch  $S$  "hindurchgeschoben" wurde. Dabei zählen wir die Materieladung relativ zu einem lokal neutralen Referenzzustand in der fernen Vergangenheit. Ist  $V$  ein dreidimensionales Gebiet mit Rand  $\partial V$ , so folgt:

$$\int_V \rho^{\text{mat}} = Q^{\text{mat}}(V) = - \int_{\partial V} P = - \int_V dP .$$



Das Minuszeichen erklärt sich aus der Tatsache, daß das Hinausfließen positiver Ladung durch  $\partial V$  eine entsprechende negative Ladung in  $V$  zurückläßt. Die Beliebigkeit von  $V$  resultiert in

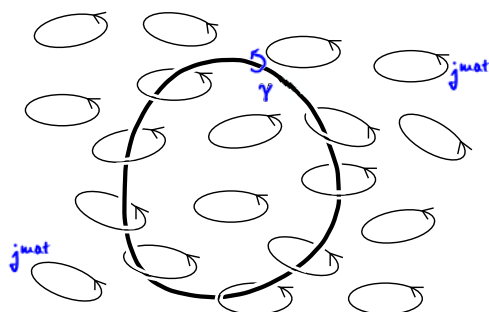
$$\rho^{\text{mat}} = -dP.$$

Überdeckt  $V$  den gesamten materieerfüllten Raum, so ergibt sich wegen  $P = 0$  außerhalb der Materie die Gleichung  $Q^{\text{mat}}(V) = - \int_{\partial V} P = 0$ , d.h. die gesamte Materieladung verschwindet in Übereinstimmung mit der oben getroffenen Vereinbarung.

*Magnetisierung.* Das magnetische Analogon zu einem elektrisch polarisierbaren Medium ist ein Material, das sich unter dem Einfluß einer magnetischen Feldstärke  $B$  magnetisch ordnet. In der Atomphysik lernt man, daß der orbitale Drehimpuls und der Spin von Elektronen in ungesättigten Atomhüllen Ursache eines atomaren magnetischen Dipolmoments ist. In einem simplen klassischen Bild könnten wir uns vorstellen, daß die Elektronen der Atomhülle sich auf elliptischen Bahnen bewegen, was einem atomaren Kreisstrom, und somit einem magnetischen Dipolmoment entspricht. Diese

atomaren Kreisströme werden durch die Kraftwirkung der magnetischen Feldstärke polarisiert, d.h. sie richten sich im Feld partiell aus und addieren sich zu einem lokalen Gesamtstrom, dem sogenannten Magnetisierungsstrom. Zur quantitativen Beschreibung dieses Sachverhalts führen wir die *Magnetisierung*  $M$ , eine 1-Form, ein. Sie ist durch die Forderung definiert, daß das Linienintegral  $\int_{\gamma} M$  für eine beliebige Kurve  $\gamma$  dem um  $\gamma$  zirkulierenden Magnetisierungsstrom gleich sei (Abb. 1.14).

mit äußerer Orientierung



$$M \in \tilde{\Omega}^1(E_3)$$

Abbildung 1.14. Das Linienintegral  $\int_{\gamma} M$  ist gleich dem um  $\gamma$  zirkulierenden Magnetisierungsstrom.

transversal

Zur Herleitung einer zu  $\rho^{\text{mat}} = -dP$  analogen Formel für  $j^{\text{mat}}$  betrachten wir eine transversal orientierte Fläche  $S$  und berechnen den gesamten Materiestrom  $I^{\text{mat}}(S)$  durch  $S$ . Dabei ist zu berücksichtigen, daß zu  $I^{\text{mat}}(S)$  neben dem Magnetisierungsstrom auch der von der zeitlichen Änderung von  $P$  herrührende Polarisierungsstrom beiträgt. Es gilt daher

$$\int_S j^{\text{mat}} = I^{\text{mat}}(S) = \frac{\partial}{\partial t} \int_S P + \int_{\partial S} M = \int_S (\dot{P} + dM),$$

woraus die folgende Gleichung resultiert:

$$j^{\text{mat}} = \dot{P} + dM.$$

Man überzeugt sich leicht, daß dieser Ausdruck zusammen mit jenem für  $\rho^{\text{mat}}$  die Kontinuitätsgleichung für die Materieladungen erfüllt. Wie  $P$  verschwindet auch  $M$  außerhalb der Materie.

*Mathematische Argumentation.* Vom didaktischen Gesichtspunkt leidet unsere Darstellung unter dem Mangel, daß sie ein gewisses Verständnis der Atomphysik sowie einiger Begriffe wie des elektrischen und magnetischen Dipolmoments voraussetzt. Wir wollen deshalb als zusätzliche Information anbieten, daß die Gleichungen für die Ladungs- und Stromdichte in Materie auch mathematisch gut motiviert sind

, und zwar wie folgt. Als topdimensionale und deshalb geschlossene Form mit verschwindendem Raumintegral besitzt

$\rho^{\text{mat}}$  ein Potential:  $\rho^{\text{mat}} = -dP$ . Nach obiger Diskussion wird  $P$  als die Polarisierung identifiziert. Wie  $\rho^{\text{mat}}$  ist auch die 2-Form  $j^{\text{mat}} - \dot{P}$  geschlossen:  $d(j^{\text{mat}} - \dot{P}) = -\dot{\rho}^{\text{mat}} + \dot{\rho}^{\text{mat}} = 0$ . Folglich ist sie nach Poincaré auf jedem sternförmigen Materiegebiet exakt, und wir können  $j^{\text{mat}} - \dot{P} = dM$  setzen. Das Potential  $M$  läßt sich wie oben erläutert als die Magnetisierungs-1-Form auffassen.

*Maxwellsche Theorie in Materie.* Es sei betont, daß die Polarisierung  $P$  im allgemeinen nichtlokal von  $E$  abhängt. Anders ausgedrückt wird  $P_a(\dots, t)$  nicht nur durch  $E$  am Ort  $a$  zur Zeit  $t$  bestimmt, sondern auch durch die Werte von  $E$  zu früheren Zeiten  $t' < t$  und anderswo im Raum. Die Ursachen dieser Nichtlokalität sind die Trägheit und endliche Ausdehnung der Materieladungen.<sup>14</sup> Um die nichtlokale oder *funktionale* Abhängigkeit der Polarisierung von der elektrischen Feldstärke evident zu machen, schreiben wir auch  $P[E]$  für  $P$ . Ähnlich wie  $P[E]$  in nichtlokaler Weise von  $E$  abhängt, so ist auch  $M$  ein im allgemeinen nichtlokales Funktional der magnetischen Feldstärke  $B$ , und wir schreiben zur besonderen Betonung dieser Abhängigkeit  $M[B]$  für  $M$ .

Wir können jetzt die Materieladungen und -ströme zugunsten der Polarisierung  $P$  und der Magnetisierung  $M$  aus den Gleichungen der elektromagnetischen Theorie eliminieren. Dazu definieren wir die 2-Form  $\mathcal{D} = D + P$  und die 1-Form  $\mathcal{H} = H - M$ . Die Größen  $\mathcal{D}$  und  $\mathcal{H}$  sind Hilfsfelder ohne direkte physikalische Bedeutung. Sie genügen den modifizierten inhomogenen Maxwell-Gleichungen  $d\mathcal{D} = \rho - \rho^{\text{mat}} = \rho^{\text{ext}}$  und

$$d\mathcal{H} = j + \dot{D} - dM = j + \dot{\mathcal{D}} - j^{\text{mat}} = j^{\text{ext}} + \dot{\mathcal{D}},$$

in die nur noch der externe Anteil der Ladungen und Ströme eingeht. Außerdem treten an die Stelle der Materialgleichungen im Vakuum die Beziehungen

$$\mathcal{D} = \varepsilon_0 \star E + P[E], \quad \text{und} \quad \mathcal{H} = \mu_0^{-1} \star B - M[B].$$

Diese Gleichungen drücken die Hilfsfelder  $\mathcal{D}$  und  $\mathcal{H}$  durch die elektromagnetischen Feldstärken  $E$  und  $B$  aus. Infolge der Eigenschaften der Funktionale  $P[E]$  und  $M[B]$  sind sie im allgemeinen zeitlich und räumlich nichtlokal, anisotrop (in Kristallen), inhomogen (in ungeordneten Medien) und nichtlinear (in Ferroelektrika und Ferromagneten). Zusammenfassend haben wir das folgende Gleichungssystem der Maxwellschen Theorie in Materie:

inhomogene Maxwell-Gln	Material-Gleichungen	homogene Maxwell-Gln
$d\mathcal{D} = \rho^{\text{ext}}$	$\mathcal{D} = \varepsilon_0 \star E + P[E]$	$dE = -\dot{B}$
$d\mathcal{H} = j^{\text{ext}} + \dot{\mathcal{D}}$	$\mathcal{H} = \mu_0^{-1} \star B - M[B]$	$dB = 0$

<sup>14</sup> Die räumliche Nichtlokalität ist typisch von atomarer Dimension, während die Nichtlokalität in der Zeit durch atomare Schwingungsdauern bestimmt wird.

*Phänomenologie.* Die obige Reformulierung der Maxwell'schen Theorie ist exakt und deshalb genauso schwierig zu behandeln wie die Theorie in ihrer ursprünglichen Form. An die Stelle der Berechnung von  $\rho^{\text{mat}}$  und  $j^{\text{mat}}$  tritt jetzt das äquivalente Problem der Berechnung von  $P[E]$  und  $M[B]$ . Die Nützlichkeit der Umformulierung besteht darin, daß sie sich gut für die Einführung von Näherungen eignet. Zu diesem Zweck führt man zunächst eine Mittelungsprozedur durch, um die rapiden zeitlichen und räumlichen Schwankungen auf atomaren Skalen zu eliminieren.

Die Mittelung vereinfacht die komplizierten funktionalen Abhängigkeiten  $P[E]$  und  $M[B]$  und läßt uns die Materialgleichungen durch einfache "makroskopische" Beziehungen ersetzen.

*Homogenes Dielektrikum.* Im Fall eines homogenen Dielektrikums gilt per Definition des dielektrischen Tensors  $\varepsilon_{ij}^k = -\varepsilon_{ji}^k$

$$D_{ij}(\mathbf{p}, t) = \varepsilon_0 \int_0^\infty \left( \int \sum_k \varepsilon_{ij}^k(\mathbf{p} - \bullet, t - s) E_k(\bullet, s) \, d\text{vol} \right) ds .$$

Für ein isotropes Medium im statischen Limes reduziert sich  $\varepsilon_{ij}^k$  zu einer einzigen skalaren Größe  $\varepsilon$ , und wir erhalten die simple Materialgleichung

$$\mathcal{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \star E .$$

*Homogenes Magnetikum.* Im magnetischen Fall ist es Konvention, die Feldstärke durch die Erregung auszudrücken. Die Materialgleichungen in linearer Näherung lauten dann

$$B_{ij}(\mathbf{p}, t) = \mu_0 \int_0^\infty \left( \int \sum_k \mu_{ij}^k(\mathbf{p} - \bullet, t - s) \mathcal{H}_k(\bullet, s) \, d\text{vol} \right) ds .$$

$\mu_{ij}^k = -\mu_{ji}^k$  heißt der Tensor der magnetischen Permeabilität. Im isotropen und statischen Limes resultiert wieder ein sehr einfaches Gesetz:

$$B = \mu_0 \mu \star \mathcal{H} .$$

Für  $\mu > 1$  wird  $B$ , die totale magnetische Feldstärke in Materie, relativ zum äußeren Feld  $B^{\text{ext}} = \mu_0 \star \mathcal{H}$  verstärkt. Das magnetische Medium heißt in diesem Fall ein *Paramagnet*. Im umgekehrten Fall ( $0 < \mu < 1$ ) liegt ein *Diamagnet* vor. Supraleiter, die ein äußeres Magnetfeld vollständig verdrängen, sind perfekte Diamagneten ( $\mu = 0$ ).

*Ohmsches Gesetz.* Die Gleichungen der Elektrodynamik in Materie eignen sich besonders gut zur Beschreibung von Dielektrika und magnetischen Materialien. Anders ist die Situation in metallischen Leitern. Die vollständige Abschirmung äußerer Felder im Gleichgewicht entspricht einer divergenten dielektrischen Konstanten ( $\varepsilon = \infty$ ). In Metallen bewirkt die Anwesenheit eines elektrischen Feldes (im quasi-stationären oder dynamischen Fall) mehr als nur eine elektrische Polarisierung. Die Kraftwirkung der elektrischen Feldstärke

beschleunigt die Leitungselektronen, und dissipative Prozesse, wie z.B. Kollisionen mit dem Atomgitter, bewirken dann eine Relaxation (über Zeitskalen der Größenordnung  $10^{-14}$ s) zu einem stromführenden Zustand, der durch das *Ohmsche Gesetz*

$$j = \sigma * E$$

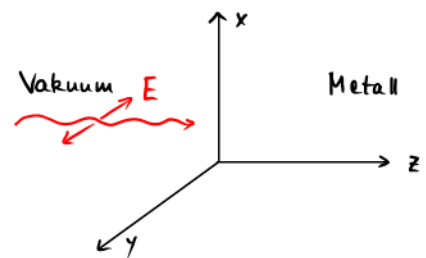
bestimmt ist. Die Materialkonstante  $\sigma$  heißt die elektrische Leitfähigkeit. Sie hat die physikalische Dimension  $[\sigma] = \text{Strom}/(\text{Spannung} \times \text{Länge})$ . Zum Beispiel hat Kupfer bei  $T = 300\text{K}$  (Zimmertemperatur) die elektrische Leitfähigkeit  $\sigma = 5.7 \times 10^7 (\text{Ohm} \times \text{Meter})^{-1}$ . Dabei ist 1 Ohm = 1 Volt/Ampere die Einheit des elektrischen Widerstandes im SI-Maßsystem.

## 7.12 Skin-Effekt

Hier besprechen wir eine Anwendung des Ohmschen Gesetzes.

Ist ein metallischer Draht (der Dicke  $a$  und der elektrischen Leitfähigkeit  $\sigma$ ) einer Wechselspannung mit geringer Frequenz ausgesetzt, so fließt der resultierende Strom im gesamten Drahtquerschnitt (mit homogener Stromdichte). Das Verhalten bei hohen Frequenzen  $\omega$  ist jedoch anders; gilt  $\omega \gg (a^2 \mu_0 \sigma)$ , so fließt der Wechselstrom hauptsächlich in einer Haut (s "Skin-Effekt") der Dicke  $\lambda = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma}}$  an der Oberfläche des Leiters ( $\lambda \ll a$ ). Im Fall eines Kupferdrahts beträgt diese Eindringtiefe  $\lambda$  ca. 1 cm für  $\omega = 50$  Hz und ca. 1 mm für  $\omega = 5$  kHz.

**Eindringtiefe.** Wir berechnen  $\lambda = \lambda(\omega)$  in einer einfachen verwandten Situation. Eine ebene elektromagnetische Welle mit elektrischem Feld  $E = |E_0| dy \operatorname{Re}(e^{i(kz - \omega t)})$  treffe vom Vakuum kommend ( $z < 0$ ) auf einen Metallkörper mit elektrischer Leitfähigkeit  $\sigma$ . Beim Eindringen ins Metall wird die elektromagnetische Welle in Wechselstrom & Wärme umgewandelt (Leistung  $\int E \cdot j$  s Ohmsche Dissipation  $\sigma \int E \wedge *E$ ) und klingt deshalb ab. Unter der Annahme einer stationären Situation (d.h. alle Größen oszillieren gemäß  $e^{-i\omega t}$  mit der gleichen Frequenz  $\omega$ ) können wir wie folgt vorgehen (wir arbeiten mit komplexen Größen und nehmen den Realteil erst zum Schluss).



$$1. \quad dE = -\dot{B} = i\omega B = i\omega \mu_0 *H \quad \wedge \quad *dE = i\omega \mu_0 H.$$

$$2. \quad dH = j + \dot{D} \stackrel{\text{Ohm}}{\approx} j = \sigma *E \quad (\text{für } z > 0). \quad 1. \& 2. \Rightarrow *d*dE = i\omega \mu_0 \sigma E.$$

$$\text{Mit } d*dE = dD/\epsilon_0 = \rho/\epsilon_0 = 0 \quad \text{folgt} \quad -\Delta E = 2i\lambda^{-2} E \quad (\lambda = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma}}) \quad \text{für } z > 0.$$

Wir suchen jetzt eine Lösung der Form  $E \propto e^{i(kz - \omega t)}$  auch für  $z > 0$ .

$$\text{Einsetzen liefert } k^2 = 2i\lambda^{-2} \quad \text{und somit } \pm k = \sqrt{2i} \lambda^{-1} = \frac{1+i}{\lambda}.$$

Die physikalisch zutreffende Lösung für  $z > 0$  ist dann  $E = |E_0| dy e^{-z/\lambda} \operatorname{Re}(e^{i(z/\lambda - \omega t)})$ .

**Aufgabe.** Berechne die an der Vakuum-Metall-Grenzfläche reflektierte Welle durch korrektes Anschließen der Lösungen in  $z = 0$ .



## 7.13 Fourier-Transformation

Resümee Fourier-Reihe:

Periodische Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(x+2\pi) = f(x)$ .

Hermitesches Skalarprodukt:  $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \overline{f(x)} g(x) dx$ .

Die "elementaren" periodischen Funktionen  $x \mapsto e^{inx}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) bilden ein Orthonormalsystem:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i(n-m)x} dx = \delta_{m,n}.$$

Jede stetige periodische Funktion lässt sich als Fourier-Reihe darstellen:

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{inx} \quad \text{mit Fourier-Koeffizienten} \quad f_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

**Kommentar.** Fourier-Transformation benötigt eigentlich Maßtheorie & Lebesgue-Integral (s. SS 2016).

**Definition.** Sei  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , d.h.  $\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < \infty$ . Dann heißt

$$\tilde{f} \equiv \mathcal{F}f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad k \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ikx} dx \quad \text{die Fourier-Transformierte von } f.$$

**Mitteilung:**  $\tilde{f}$  ist beschränkt und stetig.

**Beispiel 1.**  $f = \chi_{[-a,a]}$  ( $0 < a < \infty$ ).

$$\sqrt{2\pi} \tilde{f}(k) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-a,a]}(x) e^{-ikx} dx = \int_{-a}^a e^{-ikx} dx = \frac{2 \sin(ka)}{k}.$$

Beachte:  $\tilde{f}$  ist beschränkt und stetig, aber  $\tilde{f} \notin L^1(\mathbb{R})$ .

**Beispiel 2.**  $f(x) = e^{-a|x|}$  ( $a > 0$ ).

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi} \tilde{f}(k) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-a|x|} e^{-ikx} dx = \int_0^{\infty} e^{-(a+ik)x} dx + \int_{-\infty}^0 e^{(a-ik)x} dx \\ &= \frac{1}{a+ik} + \frac{1}{a-ik} = \frac{2a}{a^2+k^2}. \end{aligned}$$

Ableitungsoperator  $P$ :  $(Pf)(x) = \frac{1}{i} f'(x)$ ,  $(P\tilde{f})(k) = \frac{1}{i} \tilde{f}'(k)$ ;

Multiplikationsoperator  $Q$ :  $(Qf)(x) = x f(x)$ ,  $(Q\tilde{f})(k) = k \tilde{f}(k)$ .

**Satz (PQ-Regeln).**

(i) Sei  $f \in C^m(\mathbb{R})$  und  $P^n f \in L^1(\mathbb{R})$ . Dann gilt  $\widetilde{P^n f} = Q^n \tilde{f}$  für  $m \geq n$  und  $|\tilde{f}(k)| \leq \frac{\text{const}}{1+|k|^m}$ .

(ii) Sei  $Q^n f \in L^1(\mathbb{R})$  für  $m \geq n$ . Dann gilt  $\tilde{f} \in C^m(\mathbb{R})$  und  $\widetilde{Q^n f} = (-1)^n P^n \tilde{f}$ .

**Bemerkung.** Grob gesagt fällt  $\tilde{f}$  umso schneller ab (im Unendlichen), je glatter  $f$  ist.

Und je schneller  $f$  abfällt, desto glatter ist  $\tilde{f}$ .

Zu (ii) für  $n=1$ . Im Fall von  $Qf \in L^1(\mathbb{R})$  hat man

$$(\tilde{P\tilde{f}})(k) = \frac{1}{i} \frac{d}{dk} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ikx} dx \stackrel{\checkmark}{=} -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x f(x) e^{-ikx} dx = -\widetilde{(Qf)}(k).$$

Motivation. Unter Fourier-Transformation ist weder  $L_1(\mathbb{R})$  noch  $C_c^\infty(\mathbb{R})$  invariant. Deshalb folgende Defn.

Definition (Schwartz-Raum, schnell fallende glatte Funktionen):

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid x^m \frac{d}{dx^n} f(x) \text{ beschränkt für jedes Paar } m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}.$$

Eine Funktion  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  heißt Schwartzfunktion.

Nach den PQ-Regeln ist die Fourier-Transformierte einer Schwartzfunktion  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  wieder eine Schwartzfunktion  $\tilde{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Beachte auch  $C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L_1(\mathbb{R})$ .

Beispiel. Die Gauss-Funktion  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$  ist eine Schwartzfunktion mit der speziellen Eigenschaft

$$\tilde{f} = f: \quad \tilde{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2} - ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x+ik)^2} e^{-\frac{k^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{k^2}{2}} = f(k).$$

Eigenschaften. (i)  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow P^n f, Q^n f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  für alle  $n = 0, 1, 2, \dots (\infty)$ .

(ii)  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  (Faltungsintegral:  $(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(y) g(x-y) dy$ ).

Satz. Die Fourier-Transformation  $F: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$  ist eine Bijektion. Es gilt die Umkehrformel

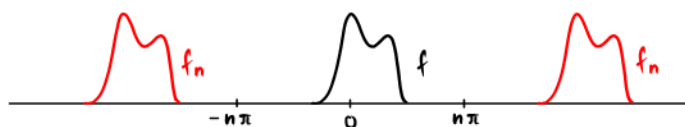
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk.$$

Korollar. Es gilt  $(F^2 f)(x) = f(-x)$  und  $F^4 = \text{Id}$ .

Beweis der Umkehrformel für  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

Es gilt  $\text{supp}(f) \subset (-n\pi, n\pi)$  für ein genügend groß gewähltes  $n \in \mathbb{N}$ .

Definiere  $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  durch  $f_n(x) = f_n(x + 2\pi n)$  und  $f_n \equiv f$  auf  $[-n\pi, n\pi]$ .



Betrachte  $g_n(y) := f_n(ny) = g_n(y + 2\pi) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} g_\ell^{(n)} e^{i\ell y}$  (Fourier-Reihe).

$$\begin{aligned} \text{Fourier-Koeffizienten: } g_\ell^{(n)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g_n(y) e^{-i\ell y} dy = \frac{1}{2\pi n} \int_{-n\pi}^{n\pi} f_n(x) e^{-i\ell x/n} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\ell x/n} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi} n} \tilde{f}(\ell/n), \end{aligned}$$

also  $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n} \tilde{f}(\ell/n) e^{i\ell x/n}$ .

Wegen  $\tilde{f}$  schnell fallend existiert eine Konstante  $c > 0$  mit  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} |\tilde{f}(k)| \leq \frac{c}{1+k^2}$  für alle  $k \in \mathbb{R}$ .

Für  $\varepsilon > 0$  beliebig wähle  $N \in \mathbb{N}$  so, dass

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|\ell| > nN} \frac{1}{n} |\tilde{f}(\ell/n)| \leq 2 \sum_{\ell > nN} \frac{c/n}{1+(\ell/n)^2} < \varepsilon \quad \text{und} \quad 2 \int_N^\infty \frac{c dk}{1+k^2} < \varepsilon.$$

Nun sei  $A_N := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^N \tilde{f}(k) e^{ikx} dk$  und  $B_N := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\ell=-nN}^{nN} \frac{1}{n} \tilde{f}(\ell/n) e^{i\ell x/n}$ .

Für  $N$  fest sei nun  $n$  groß genug gewählt, dass gilt  $|A_N - B_N| < \varepsilon$ .

Für  $A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk$  und  $B = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n} \tilde{f}(\ell/n) e^{i\ell x/n}$  folgt dann mittels

Dreiecksungleichung  $|A - B| = |(A - A_N) + (A_N - B_N) + (B_N - B)|$   
 $< |A - A_N| + |A_N - B_N| + |B_N - B| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$ .

Folglich konvergiert  $B \equiv f_n(x)$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen  $A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk$ . Nun konvergiert aber  $f_n(x)$  per Definition punktweise (also für jeden festen Wert von  $x$ ) gegen  $f(x)$  im gleichen Limes  $n \rightarrow \infty$ . Damit ist die Umkehrformel  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk$  im Fall  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  bewiesen.

**Mitteilung.** Die Umkehrformel für den allgemeineren Fall  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  erhält man durch ein Zusatzargument, in das neben dem Faltungssatz (siehe unten) das Fundamentallemma der Variationsrechnung (siehe Kapitel 8) eingeht.

**Faltungssatz.** Für  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  gilt:

(i)  $\widetilde{f * g} = \sqrt{2\pi} \tilde{f} \cdot \tilde{g}$ ,  
 (ii)  $\tilde{f} * \tilde{g} = \sqrt{2\pi} \widetilde{f \cdot g}$ .

zu (ii).  $(\tilde{f} * \tilde{g})(k) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(k-k') \tilde{g}(k') dk' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i(k-k')x} dx \right) \tilde{g}(k') dk' =$   
 $= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \left( \int_{\mathbb{R}} \tilde{g}(k') e^{ik'x} dk' \right) e^{-ikx} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x) e^{-ikx} dx = \sqrt{2\pi} \widetilde{(f \cdot g)}(k)$ .

### 7.14 Lösung der 1D Wellengleichung

Wir betrachten die homogene Wellengleichung  $\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) f(x, t) = 0$

zu den Anfangsbedingungen  $f(x, 0) = u(x)$  und  $\dot{f}(x, 0) = v(x)$ .

Durch Übergang zur Fouriertransformierten Gleichung und Verwenden der PQ-Regel  $\widetilde{P^2 f} = Q^2 \tilde{f}$

erhalten wir  $\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + k^2 \right) \tilde{f}(k, t) = 0$ .

Lösungsansatz:  $\tilde{f}(k, t) = A_k \cos(ckt) + B_k \sin(ckt)$ .

Anfangsbedingungen  $\leadsto \tilde{u}(k) = \tilde{f}(k, 0) = A_k$ ,  $\tilde{v}(k) = \left( \frac{\partial}{\partial t} \tilde{f} \right)(k, 0) = B_k \cdot kc$ ,

also  $\tilde{f}(k, t) = \tilde{u}(k) \cos(ckt) + \tilde{v}(k) \frac{\sin(ckt)}{kc}$ .  $\leadsto$  Lösung als Fourier-Integral:

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(k, t) e^{ikx} dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left( \tilde{u}(k) \cos(ckt) + \tilde{v}(k) \frac{\sin(ckt)}{kc} \right) e^{ikx} dk.$$

**Behauptung:**  $f(x,t) = \frac{1}{2} \left( u(x+ct) + u(x-ct) + \frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} v(x') dx' \right).$

**Beweis.**  $\frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} v(x') dx' = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[x-ct, x+ct]}(x') v(x') dx' = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-ct, ct]}(x'-x) v(x') dx' = (\chi_{[-ct, ct]} * v)(x).$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{1}{2} u(x+ct) + \frac{1}{2} u(x-ct) + \frac{1}{2c} (\chi_{[-ct, ct]} * v)(x) \right) e^{-ikx} dx$$

$$= \frac{1}{2} \tilde{u}(k) e^{ikct} + \frac{1}{2} \tilde{u}(k) e^{-ikct} + \frac{\sqrt{2\pi}}{2c} \tilde{\chi}_{[-ct, ct]}(k) \tilde{v}(k) = \tilde{u}(k) \cos(kct) + \frac{\tilde{v}(k)}{2c} \cdot \frac{2 \sin(kct)}{k} \stackrel{\checkmark}{=} \tilde{f}(k, t).$$

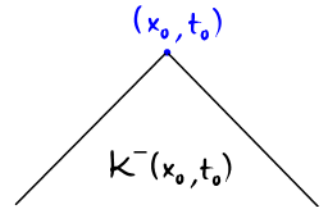
**Inhomogene Gleichung.** Wir betrachten jetzt  $\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) f(x,t) = g(x,t)$

Zur Anfangsbedingung  $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(x,t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \dot{f}(x,t) = 0.$

**Behauptung:**  $f(x,t) = \frac{c}{2} \int_{-\infty}^t \left( \int_{x-c(t-t')}^{x+c(t-t')} g(x',t') dx' \right) dt'.$

**Begründung dazu.** Rückwärts gerichteter Lichtkegel bzgl.  $(x_0, t_0)$ :

$$K^-(x_0, t_0) = \left\{ p \in M_2 \mid t(p) < t_0 \text{ und } |x(p) - x_0| < c |t(p) - t_0| \right\}.$$



Stelle  $\int_{-\infty}^t \left( \int_{x-c(t-t')}^{x+c(t-t')} g(x',t') dx' \right) dt' = \int_{M_2} g \chi_{K^-(x_0, t_0)} d\text{vol}_2$  als Faltungintegral dar:

$$\chi_{K^-(x_0, t_0)}(x', t') = \chi_{K^-(0,0)}(x'-x_0, t'-t_0) = \chi_{K^+(0,0)}(x_0-x', t_0-t') \quad (K^+ \text{ vorwärts gerichteter Lichtkegel})$$

$$\int_{M_2} g \chi_{K^-(x_0, t_0)} d\text{vol}_2 = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} g(x', t') \chi_{K^+(0,0)}(x_0-x', t_0-t') dx' \right) dt' = (g * \chi_{K^+(0,0)})(x_0, t_0).$$

Raum-Zeit-Fouriertransformation:  $\tilde{f}(k, \omega) := \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,t) e^{-i(kx-\omega t)} dx dt.$

Faltungssatz? Hier nicht direkt anwendbar, da  $\chi_{K^+(0,0)}$  nicht  $L^1$ -integrierbar (und schon gar nicht schnell fallend). Wir behelfen uns mit einem Trick ("Regularisierung"): wir ersetzen  $\chi_{K^+(0,0)}$  durch

$$\chi_{K^+(0,0)}^R(x,t) := \chi_{K^+(0,0)}(x,t) e^{-\varepsilon t} \quad (\varepsilon > 0) \text{ und nehmen am Ende den Limes } \varepsilon \rightarrow 0.$$

$$\widehat{(g * \chi_{K^+(0,0)}^R)}(k, \omega) = 2\pi \widehat{g}(k, \omega) \widehat{\chi_{K^+(0,0)}^R}(k, \omega).$$

$$2\pi \widehat{\chi_{K^+(0,0)}^R}(k, \omega) = \int_0^\infty \left( \int_{-ct}^{ct} e^{-ikx} dx \right) e^{i\omega t - \varepsilon t} dt = \frac{2}{k} \int_0^\infty \sin(kct) e^{i\omega t - \varepsilon t} dt = \frac{2c}{(kc)^2 - (\omega + i\varepsilon)^2}.$$

Insgesamt haben wir also  $\frac{c}{2} \widehat{(g * \chi_{K^+(0,0)}^R)}(k, \omega) = \frac{\widehat{g}(k, \omega)}{k^2 - (\omega + i\varepsilon)^2/c^2}.$

Andererseits ergibt Fourier-Transformation der inhomogenen Wellengleichung  $\left( -\frac{\omega^2}{c^2} + k^2 \right) \tilde{f}(k, \omega) = \tilde{g}(k, \omega)$

oder  $\tilde{f}(k, \omega) = \frac{\tilde{g}(k, \omega)}{k^2 - \omega^2/c^2}.$

## 7.15 Lösung der 3D Wellengleichung

Homogene Wellengleichung:  $\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) f = 0$

mit Anfangsbedingungen  $f(p, t=0) = u(p)$  und  $\dot{f}(p, t=0) = v(p)$ .

Fourier-Transformation (im Ortsraum) ergibt  $\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + |k|^2\right) \tilde{f}(k, t) = 0$ ,  $|k|^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ .

Lösung:  $\tilde{f}(k, t) = \tilde{u}(k) \cos(|k|ct) + \tilde{v}(k) \frac{\sin(|k|ct)}{|k|c}$ .

Behauptung. Für  $u \equiv 0$  lautet die Lösungsformel nach Fourier-Umkehr

$$f(p, t) = \frac{t}{4\pi} \int_{S_{ct}(p)} v_{T_p}$$

$S_{ct}(p)$  = Sphäre mit Mittelpunkt  $p$  und Radius  $ct$ ;

$T_p$  = Raumwinkelform bzgl.  $p$ .

Nachweis. Fourier-Darstellung von  $v$ :  $v(\cdot) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{v}(k) e^{ik(\cdot-0)} d^3k$  (Koord. Ursprung 0).

Hiermit haben wir durch Vertauschen der Integrationsreihenfolge (or Faltungssatz)

$$\frac{t}{4\pi} \int_{S_{ct}(p)} v_{T_p} = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{v}(k) \left( \frac{t}{4\pi} \int_{S_{ct}(p)} e^{ik(\cdot-0)} T_p \right) d^3k.$$

Nun gilt  $\int_{S_{ct}(p)} e^{ik(\cdot-0)} T_p = e^{ik(p-0)} \int_{S_{ct}(p)} e^{ik(\cdot-p)} T_p$  und

$$\frac{t}{4\pi} \int_{S_{ct}(p)} e^{ik(\cdot-p)} T_p = \frac{t}{4\pi} \int_{S_{ct}(0)} e^{ik(\cdot-0)} T_0 = \frac{t}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{i|k|ct \cos\theta} \sin\theta d\theta d\phi = \frac{\sin(|k|ct)}{|k|c}. \quad \text{Es folgt}$$

$$\frac{t}{4\pi} \int_{S_{ct}(p)} v_{T_p} = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{v}(k) \frac{\sin(|k|ct)}{|k|c} e^{ik(p-0)} d^3k \quad \text{und somit durch Vergleich mit oben die Behauptung.}$$

Notation.  $\mathcal{M}_{p,t}[f] := \frac{t}{4\pi} \int_{S_{ct}(p)} f T_p$ .

Aufgabe. Wie ist die Operation  $f \mapsto \mathcal{M}_{p,t}[f]$  im Kettenbild zu interpretieren?

Aufgabe. Das allgemeine Anfangswertproblem der homogenen 3D Wellengleichung mit Anfangszeit  $t=0$  (siehe oben) hat die Lösung  $f(p, t) = \mathcal{M}_{p,t}[v] + \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{M}_{p,t}[u]$ .

Inhomogene Wellengleichung (im  $E_3$ ):  $\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) f(\cdot, t) = g(\cdot, t)$ . "retardierte Zeit"

Mitteilung. Eine spezielle Lösung (mit  $f \equiv 0$  für  $g \equiv 0$ ) ist  $f(p, t) = \int_{E_3} \frac{g(\cdot, t - \frac{1}{c} r_p(\cdot))}{4\pi r_p(\cdot)} dvol_3$ .

Aufgabe: verifiziere diese Lösungsformel durch ähnliche Argumentation wie in 1D.

Bemerkung. Dieser 3D Ausdruck ist in gewissem Sinne "einfacher" als der entsprechende 1D Ausdruck, denn der Träger des 3D-Integrandkerns liegt im Rand der Lichtkegels (nicht im Lichtkegel insgesamt).