

## 8 Lagrange-Mechanik

Bei der Untersuchung mechanischer Systeme ist es häufig nützlich, zu krummlinigen Koordinaten überzugehen, z.B. zum Zweck der Berücksichtigung von Zwangsbedingungen. Die Newtonschen Bewegungsgleichungen haben den Nachteil, nur in Galileischen Koordinatensystemen ihre einfache Gestalt  $m\ddot{q}_j = F_j(q, \dot{q}, t)$  anzunehmen. In den folgenden Abschnitten entwickeln wir die Lagrange-Formulierung der Mechanik, mit der Lagrange-Funktion als zentraler Größe, die eine viel größere Freiheit in der **Koordinatenwahl** lässt. Insbesondere gestattet sie eine durchsichtige Formulierung des Zusammenhangs zwischen Symmetrien und Erhaltungssätzen (dessen Behandlung wir allerdings auf das Kapitel über die Hamilton-Mechanik verschieben). Ferner ist die Lagrange-Funktion die fundamentale Größe in der relativistisch kovarianten Formulierung der Quantenfeldtheorie.

### 8.1 Variationsrechnung

(Arnold, Seiten 55ff.) Die Variationsrechnung beschäftigt sich mit den Extrema von Funktionen, deren Definitionsbereich ein unendlich-dimensionaler Raum ist: eine Menge von Kurven. Solche Funktionen heißen **Funktionale**.

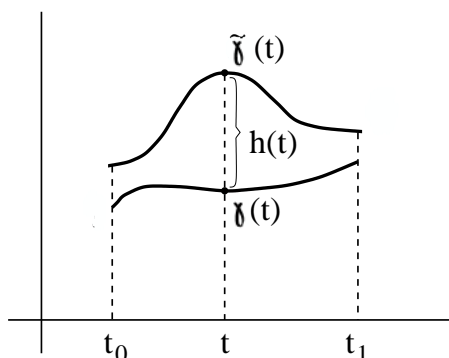
**Beispiel.** Als Beispiel für ein Funktional nennen wir die **Eigenzeit** des Minkowski-Modells der speziellen Relativitätstheorie. Dazu beobachten wir (aus der Sicht eines Inertialsystems) die Bewegung eines Teilchens  $\gamma : I \rightarrow E_3$  im Zeitintervall  $I = [t_0, t_1]$ . Das Eigenzeit-Funktional ordnet der Bewegungskurve  $\gamma$  diejenige Zeit  $\tau[\gamma]$  zu, die auf einer "inneren Uhr" des Teilchens während des Zeitintervalls  $[t_0, t_1]$  des Beobachters verstreicht:

$$\tau[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 - |\dot{\gamma}(t)/c|^2} dt. \quad (8.1)$$

Im nichtrelativistischen Grenzfall ( $|\dot{\gamma}| \ll c$ ) gilt  $\tau[\gamma] = t_1 - t_0$  (absolute Zeit; unabhängig von  $\gamma$ ). Für relativistische Geschwindigkeiten  $|\dot{\gamma}| \sim c$  ist die Eigenzeit des Minkowski-Modells kleiner als die Zeitdifferenz  $t_1 - t_0$  des Galilei-Modells.

Allgemeiner ist ein Funktional  $\Phi$  eine Abbildung von einem Raum von Kurven nach  $\mathbb{R}$ .

**Differenzierbarkeit.** Dem Folgenden legen wir einen affinen Raum  $(A, V \simeq \mathbb{R}^n, +)$  mit Normfunktion  $|\cdot| : V \rightarrow \mathbb{R}$  zugrunde. Neben  $\gamma : I \rightarrow A$  betrachten wir eine zweite Kurve  $\tilde{\gamma} : I \rightarrow A$  und erklären  $h : I \rightarrow V$  als die Differenzfunktion  $h(t) = \tilde{\gamma}(t) - \gamma(t)$ . Als Funktionenraum für



dieses **Inkrement**  $h$  wählen wir den Banachraum  $C^0(I, V)$  aller stetigen beschränkten Funktionen  $h : I \rightarrow V$  mit Norm  $\|h\| = \sup_{t \in I} |h(t)|$ . In diesem Kontext heißt ein Funktional  $\Phi$  *differenzierbar* (in  $\gamma$ ), wenn sich die Differenz  $\Phi[\tilde{\gamma}] - \Phi[\gamma]$  wie

$$\Phi[\gamma + h] - \Phi[\gamma] = F[\gamma, h] + R[\gamma, h] \quad (8.2)$$

schreiben lässt, wobei  $F$  linear von  $h$  abhängt und  $R$  stärker als von erster Ordnung mit  $h$  gegen Null geht; d.h. falls  $\|h\| < \varepsilon$ , dann soll gelten:  $|R[\gamma, h]| < C\varepsilon^\alpha$  mit  $\alpha > 1$ . Der lineare Anteil,  $F$ , heißt die **Variation** von  $\Phi$ . Man schreibt auch  $F[\gamma, h] = (D_\gamma \Phi)(h)$  und nennt  $D_\gamma \Phi$  die **Funktionalableitung** von  $\Phi$  in  $\gamma$ .

**Mitteilung.** Die Variation eines differenzierbaren Funktionals ist eindeutig bestimmt.

**Wirkungsfunktional.** Für die klassische Mechanik sind (Wirkungs-)Funktionale der Form

$$S[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t) dt \quad (8.3)$$

von Interesse, mit  $L$  einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion  $L : A \times V \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir statten den affinen Raum  $A$  ("Ortsraum") mit affinen Koordinaten  $x_i : A \rightarrow \mathbb{R}$  aus ( $i = 1, \dots, n$ ). Die induzierten Koordinaten für  $V$  ("Geschwindigkeitsraum") bezeichnen wir mit  $(dx_i)_a \equiv \dot{x}_i$  (unabhängig von  $a \in A$ ). Unter der Bedingung  $\gamma \in C^1(I, A)$  (also  $\gamma$  stetig differenzierbar) gilt:

**Satz.** Das Funktional  $S[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma, \dot{\gamma}, t) dt$  ist differenzierbar und hat die Variation

$$F[\gamma, h] = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) h_i dt + \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} h_i \right) \Big|_{t_0}^{t_1}. \quad (8.4)$$

**Bemerkung.** Das Symbol  $\frac{d}{dt}$  steht für die **totale Zeitableitung**, d.h. für die Ableitung nach der variablen Zeit der Kurve  $t \mapsto \gamma(t)$ :

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n h_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n h_i(t) \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t) \right) dt. \quad (8.5)$$

Dagegen stehen  $\partial L / \partial x_i$ ,  $\partial L / \partial \dot{x}_i$ ,  $\partial L / \partial t$  für die partiellen Ableitungen von  $L$  nach seinem ersten, zweiten bzw. dritten Argument.

**Beweis** des Satzes. Wir entwickeln das Wirkungsfunktional bis zur linearen Ordnung in  $h$ :

$$\begin{aligned} S[\gamma + h] - S[\gamma] &= \int_{t_0}^{t_1} \left( L(\gamma + h, \dot{\gamma} + \dot{h}, t) - L(\gamma, \dot{\gamma}, t) \right) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} h_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{h}_i \right) dt + \mathcal{O}(h^2). \end{aligned}$$

Hieraus liest man ab:

$$F[\gamma, h] = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} h_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{h}_i \right) dt \quad \text{und} \quad R[\gamma, h] = \mathcal{O}(h^2). \quad (8.6)$$

Partielles Integrieren liefert

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{h}_i dt = - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n h_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} dt + \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} h_i \right) \Big|_{t_0}^{t_1} \quad (8.7)$$

und somit die Behauptung.

**Extremalität.** Ein differenzierbares Funktional  $\Phi$  heißt **extremal** in  $\gamma$ , wenn  $F[\gamma, h]$  für alle  $h$  gleich Null ist. Hiermit kommt man zur folgenden Aussage.

**Satz.** Auf jeder eingeschränkten Menge von differenzierbaren Kurven, die durch zwei fest gewählte Punkte  $\gamma(t_0) = a_0 \in A$  und  $\gamma(t_1) = a_1 \in A$  laufen, ist das Funktional  $S[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma, \dot{\gamma}, t) dt$  genau dann extremal in  $\gamma$ , wenn längs  $\gamma$  gilt

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (8.8)$$

**Bemerkungen.** Mit  $T\gamma(t) := (\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t)$  lautet die Bedingung ausführlich geschrieben

$$\left( \frac{\partial L}{\partial x_i} \circ T\gamma \right) (t) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \circ T\gamma \right) (t) = 0, \quad t \in [t_0, t_1], \quad i = 1, \dots, n. \quad (8.9)$$

Eine Beweisrichtung des obigen Satzes ( $\Leftarrow$ ) ist trivial. Der andere Schluss ( $\Rightarrow$ ) folgt mit der Einschränkung an die zulässigen Kurven ( $h(t_0) = h(t_1) = 0$ ) aus der Formel (8.4) zusammen mit

**Fundamentallemma** (der Variationsrechnung): Verschwindet für eine Funktion  $f \in C^0(I, V^*)$  das Integral  $\int_{t_0}^{t_1} \sum_i f_i(t) h_i(t) dt$  für alle  $h \in C^\infty(I, V)$ , so gilt  $f \equiv 0$  (Nullfunktion).

**Beispiel.** Das Eigenzeit-Funktional des Minkowski-Modells ist  $\tau[\gamma] = \int_I \sqrt{1 - |\dot{\gamma}/c|^2} dt$ . Wir verifizieren, dass die Extrema von  $\tau$  für fest vorgegebene Randpunkte ( $\gamma(t_0) = a_0$  und  $\gamma(t_1) = a_1$ ) gleichförmige und geradlinige Bewegungen sind. Wir haben  $L(\gamma, \dot{\gamma}, t) = \sqrt{1 - |\dot{\gamma}/c|^2}$  und

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{-\dot{\gamma}_i/c^2}{\sqrt{1 - |\dot{\gamma}/c|^2}}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{-\ddot{\gamma}_i/c^2}{\sqrt{1 - |\dot{\gamma}/c|^2}} - \frac{\dot{\gamma}_i}{c^2} \frac{\sum \dot{\gamma}_j \ddot{\gamma}_j/c^2}{\sqrt{1 - |\dot{\gamma}/c|^2}^3}. \quad (8.10)$$

Wie man sieht, verschwinden diese Ausdrücke für  $\ddot{\gamma} = 0$  (keine Beschleunigung). Umgekehrt folgt aus der Forderung der Extremalität von  $\tau$  (bei fest gehaltenen Randpunkten)

$$0 = \sum_{i=1}^3 \dot{\gamma}_i \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = \frac{\langle \dot{\gamma}, \ddot{\gamma} \rangle / c^2}{\sqrt{1 - |\dot{\gamma}/c|^2}^3} \quad (8.11)$$

und somit  $\langle \dot{\gamma}, \ddot{\gamma} \rangle = 0$ . Nullsetzen des letzten Ausdrucks in (8.10) ergibt dann  $\ddot{\gamma} = 0$ .

**Definition.** Die Gleichungen (8.8) heißen die **Euler-Lagrange-Gleichungen** zum Funktional  $S[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma, \dot{\gamma}, t) dt$ . Der Ausdruck auf der linken Seite von (8.8) heißt die **Euler-Ableitung** von  $L$ .

## 8.2 Lagrange-Systeme

Es soll nun erläutert werden, was der Inhalt von Abschnitt 8.1 mit der klassischen Mechanik zu tun hat. Wir betrachten ein mechanisches System von  $N$  Punkten (alle im  $E_3$ ) mit Massen

$m_1, \dots, m_N$  an den Orten  $\gamma_1, \dots, \gamma_N$  und konservativen Kräften mit potentieller Energie  $U : E_3^{(1)} \times \dots \times E_3^{(N)} \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir vergleichen die Newtonschen Bewegungsgleichungen

$$\langle m_i \ddot{\gamma}_i, \cdot \rangle = -d_i U \quad (i = 1, \dots, N) \quad (8.12)$$

mit den Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} \quad (i = 1, \dots, N) \quad (8.13)$$

zu einem noch zu definierenden Funktional

$$S[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma_1(t), \dots, \gamma_N(t), \dot{\gamma}_1(t), \dots, \dot{\gamma}_N(t), t) dt. \quad (8.14)$$

Hier verwenden wir die Schreibweise  $\partial L / \partial \mathbf{r}_i = (\partial L / \partial x_{i,1}, \partial L / \partial x_{i,2}, \partial L / \partial x_{i,3})$  mit  $x_{i,j} : E_3^{(i)} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $j = 1, 2, 3$ ) den kartesischen Koordinaten des  $i$ -ten Punkts.  $\partial L / \partial \dot{\mathbf{r}}_i$  ist analog erklärt.

**Hamiltonsches Prinzip der kleinsten Wirkung.** Lösungen des mechanischen Systems (8.12) zu den Randwerten  $\gamma_i(t_0) = a_0^{(i)}$  und  $\gamma_i(t_1) = a_1^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, N$ ) sind Extrema des Funktionals  $S = \int_{t_0}^{t_1} L dt$  (mit denselben Randwerten für die zulässigen Kurven), wobei  $L = T - U$  die Differenz von kinetischer und potentieller Energie ist.

**Begründung** des Hamiltonschen Prinzips. Nach dem zweiten Satz von Abschnitt 8.1 ist lediglich zu verifizieren, dass die Gleichungen (8.12) und (8.13) äquivalent sind. Dies sieht man aber sofort aus  $\partial L / \partial \dot{\mathbf{r}}_i \circ T\gamma = \langle m_i \dot{\gamma}_i, \cdot \rangle$  und  $\partial L / \partial \mathbf{r}_i = -\partial U / \partial \mathbf{r}_i$  für  $L \circ T\gamma = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\dot{\gamma}_i|^2 - U(\gamma_1, \dots, \gamma_N)$ .

**Definition.** Die Größe  $L = T - U$  heißt **Lagrange-Funktion**, das Integral  $S = \int_{t_0}^{t_1} L dt$  **Wirkung**.

**Bemerkungen.** **(i)** Die Bezeichnung ‘Hamiltonsches Prinzip der kleinsten Wirkung hat historische Gründe. Besser wäre ‘Hamiltonsches Prinzip der extremalen Wirkung’. **(ii)** Dass die Formulierung des Prinzips der kleinsten Wirkung die Teilchenorte zu verschiedenen Zeiten vorgibt und festhält, widerspricht scheinbar dem Geist der Newtonschen Mechanik, wo ja der Anfangszustand, also alle Orte und Geschwindigkeiten zur Anfangszeit, vorzugeben sind. Eine tiefere Einsicht in den Sinn des Wirkungsprinzips gewinnt man erst im Licht der Feynmanschen Formulierung der Quantenmechanik. **(iii)** Der hier eingeführte Formalismus ist u.a. deshalb nützlich, weil sich die Bewegungsgleichungen für eine sehr große Klasse von mechanischen Systemen in der Form von Euler-Lagrange-Gleichungen zu einem Wirkungsfunktional mit Lagrange-Funktion  $L$  schreiben lassen.

**Beispiel:** Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld. Die Newtonschen Bewegungsgleichungen lauten hier

$$\langle m \ddot{\gamma}(t), \cdot \rangle = e E_{\gamma(t)} - e B_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \cdot), \quad (8.15)$$

wobei  $E$  ( $B$ ) die elektrische (bzw. magnetische) Feldstärke ist. In der Elektrodynamik zeigt man, dass  $E$  und  $B$  sich folgendermaßen schreiben lassen:

$$B = dA, \quad E = -d\phi - \frac{\partial A}{\partial t}, \quad (8.16)$$

mit einer differenzierbaren Funktion  $\phi$  (dem elektrischen Skalarpotential) und einer 1-Form  $A$  (dem Vektorpotential). Wir behaupten, dass

$$L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t) = \frac{m}{2} |\dot{\gamma}(t)|^2 - e\phi(\gamma(t), t) + e A_{\gamma(t), t}(\dot{\gamma}(t)) \quad (8.17)$$

als Lagrange-Funktion für dieses System taugt. Zum Nachweis stellen wir die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen durch explizite Rechnung in **kartesischen Koordinaten**  $x_1, x_2, x_3$  auf:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \frac{\partial L}{\partial x_i} \circ T\gamma = -e \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + e \sum_{j=1}^3 \dot{\gamma}_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i}. \\ \text{(ii)} \quad & \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \circ T\gamma = m\ddot{\gamma}_i + e \frac{d}{dt} A_i = m\ddot{\gamma}_i + e \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \dot{\gamma}_j + \frac{\partial A_i}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

Wie immer ist  $\gamma_i = x_i \circ \gamma$  und  $\dot{\gamma}_i(t) = (dx_i)_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))$ . Die Gleichung  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i}$  lautet demnach

$$m\ddot{\gamma}_i = e \left( -\frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) - e \sum_{j=1}^3 \dot{\gamma}_j \left( \frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \right) = eE_i - e \sum_j \dot{\gamma}_j B_{ji},$$

was mit der  $i$ -ten Komponente von (8.15) übereinstimmt.

**Lagrange-Systeme.** Wir betonen, dass sich nicht für alle mechanischen Systeme eine Lagrange-Funktion finden lässt. In dieser Vorlesung werden nur solche Systeme betrachtet, für die eine Lagrange-Funktion existiert. Solche Systeme nennen wir **Lagrange-Systeme**.

Wir fragen nun, wann zwei Lagrange-Funktionen  $L_1$  und  $L_2$  dieselben Euler-Ableitungen besitzen und somit zu denselben Euler-Lagrange-Gleichungen führen.

**Satz.** Die Euler-Ableitungen zweier Lagrange-Funktionen  $L_1, L_2 : U \times \mathbb{R}^f \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit einfach zusammenhängendem Definitionsgebiet  $U \subset \mathbb{R}^f$  sind genau dann identisch, wenn die Differenz  $L_1 - L_2$  die totale Zeitableitung einer Funktion  $M : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist.

**Beweis.** ( $\Leftarrow$ ) Sei  $L_1 - L_2 = dM/dt$ . Integration über die Zeit liefert

$$\int_{t_a}^{t_b} L_1 dt = \int_{t_a}^{t_b} L_2 dt + M \Big|_{t_a}^{t_b}.$$

Die Euler-Ableitung einer Lagrange-Funktion  $L$  ist gegeben durch die Variation des Funktionals  $\int_{t_a}^{t_b} L dt$  unter der Nebenbedingung, dass am Rand  $t \in \{t_a, t_b\}$  nicht variiert wird. Wegen dieser Bedingung trägt der Term  $M \Big|_{t_a}^{t_b}$  nicht zur Euler-Ableitung bei, und es folgt sofort die Behauptung.

( $\Rightarrow$ ) Sei jetzt die Euler-Ableitung von  $G := L_1 - L_2$  gleich Null. Als Konsequenz des ersten Satzes von Abschnitt 8.1 ist dann das Integral

$$\int_{t_a}^{t_b} G(\gamma(t) + h(t), \dot{\gamma}(t) + \dot{h}(t), t) dt$$

von  $h$  unabhängig, vorausgesetzt es gilt  $h(t_a) = h(t_b) = 0$ . Diese Unabhängigkeit ermöglicht die Einführung einer **Stammfunktion**  $M$  für  $G$ . Dazu fixieren wir eine Anfangszeit  $t_a$  und einen

Anfangsort  $q_a$ . Für beliebige Enddaten  $(t_b, q_b)$  wählen wir dann irgendeine differenzierbare Kurve  $t \mapsto \gamma(t)$  mit  $\gamma(t_a) = q_a$  und  $\gamma(t_b) = q_b$  und setzen

$$M(q_b, t_b) := \int_{t_a}^{t_b} G(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t) dt.$$

Auf diese Weise wird eine Funktion  $M : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  erklärt. Für die totale Zeitableitung dieser Funktion gilt  $dM/dt = L_1 - L_2$ , denn

$$\frac{d}{dt}M(\gamma(t), t) = \frac{d}{dt} \int_{t_a}^t G(\gamma(\tau), \dot{\gamma}(\tau), \tau) d\tau = G(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t).$$

**Beispiel:** Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld. Die durch (8.16) gegebenen Felder  $E$  und  $B$  bleiben unter sogenannten **Eichtransformationen**

$$A \mapsto A + d\chi, \quad \phi \mapsto \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (8.18)$$

( $\chi$  zweimal differenzierbar, sonst beliebig) ungeändert, was man mit  $d^2 = 0$  und  $d \circ \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \circ d = 0$  sofort einsieht. Die Lagrange-Funktion (8.17) ändert sich dabei um eine totale Zeitableitung:

$$L \mapsto L + e \left( \frac{\partial \chi}{\partial t} + \sum \frac{\partial \chi}{\partial x_j} \dot{\gamma}_j \right) = L + e \frac{d\chi}{dt}, \quad (8.19)$$

weshalb die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen unter Eichtransformationen invariant sind. In (8.15), wo nur die **“eichinvarianten”** Größen  $E$  und  $B$  eingehen, ist diese Eigenschaft explizit.

**Notation.** Bislang haben wir zwischen den Koordinatenfunktionen für Ort ( $x_i : E_3 \rightarrow \mathbb{R}$ ) und Geschwindigkeit ( $\dot{x}_i : V \simeq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ) und den Komponenten einer Bahnkurve [ $\gamma_i(t) = (x_i \circ \gamma)(t)$ ] und deren Geschwindigkeit [ $\dot{\gamma}_i(t) = \frac{d}{dt}(x_i \circ \gamma)(t) = (dx_i)_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))$ ] sorgfältig unterschieden. Wir werden uns jetzt dem üblichen Gebrauch anpassen und diese Unterscheidung nicht länger strikt aufrecht erhalten. Für die Orte eines Lagrange-Systems mit  $f$  Freiheitsgraden schreiben wir in der Regel  $q \equiv (q_1, \dots, q_f)$  und meinen damit je nach Kontext ganz simpel den Ort oder aber die Orts-Koordinatenfunktionen oder aber die Komponenten des Ortsvektors einer Bahnkurve  $t \mapsto \gamma(t)$ . Für die Geschwindigkeiten eines Lagrange-Systems mit  $f$  Freiheitsgraden schreiben wir i.d.R.  $\dot{q} \equiv (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f)$  und meinen damit je nach Kontext die Geschwindigkeit oder die Koordinatenfunktionen der Geschwindigkeit oder die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors  $\dot{\gamma}(t)$  der Bahnkurve.

### 8.3 Invarianz unter Punkttransformationen

Wie verhalten sich die Euler-Lagrange-Gleichungen unter **Koordinatenwechsel**? Als grundlegende Eigenschaft verlangen wir von jeder Lagrange-Funktion, dass sie eine koordinatenunabhängige Bedeutung hat. Für die schon angesprochenen Beispiele, insbesondere für  $L = T - U$ , ist diese Eigenschaft offensichtlich. Wir deklarieren sie hier als allgemeines Prinzip.

Die koordinatenfreie Bedeutung der Lagrange-Funktion  $L$  überträgt sich auf das Wirkungsfunktional  $S = \int L dt$ . Die Euler-Lagrange-Gleichungen folgen aus  $S = \int L dt$  per Variation

unter Nebenbedingungen. Da auch die letztere Operation koordinatenfrei erklärt ist, haben die Euler-Lagrange-Gleichungen immer dieselbe Form, unabhängig von der Wahl der Koordinaten.

**Punkttransformationen.** Eine Abbildung  $U \times \mathbb{R} \rightarrow U \times \mathbb{R}$  der Form  $(q, t) \mapsto (\varphi(q, t), t)$  heißt *Punkttransformation*. Nach dem oben Gesagten behalten die Euler-Lagrange-Gleichungen unter Punkttransformationen ihre Form.

**Beispiel.** Teilchen im Zentralkraftfeld,  $L = \frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{x}}|^2 - U(|\mathbf{x}|)$ , in zwei Dimensionen. Die Einführung von ebenen Polarkoordinaten durch

$$x_1 = r \cos \phi, \quad x_2 = r \sin \phi,$$

führt auf  $L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - U(r)$ . Die Euler-Lagrange-Gleichungen in diesen Koordinaten sind

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} &= 0 = m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 + U'(r) \quad \text{und} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} &= 0 = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}). \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung besagt, dass der Drehimpuls  $l = mr^2\dot{\phi}$  erhalten ist. Wenn wir  $\dot{\phi} = l/mr^2$  in die erste Gleichung einsetzen, dann entsteht

$$m\ddot{r} + V'(r) = 0 \quad \text{mit} \quad V(r) = U(r) + \frac{l^2}{2mr^2}.$$

Dies ist die in Abschn. 1.9 ausführlich diskutierte Bewegungsgleichung für die Radialkoordinate  $r$ .

**Terminologie.** Wir vereinbaren die folgende Sprechweise. Ist  $L(q, \dot{q}, t)$  die Lagrange-Funktion eines mechanischen Systems, so nennen wir  $q_k$  ( $k = 1, \dots, f$ ) *verallgemeinerte Koordinaten*,  $\dot{q}_k$  *verallgemeinerte Geschwindigkeiten*,  $\partial L / \partial \dot{q}_k =: p_k$  *verallgemeinerte Impulse* und  $\partial L / \partial q_k$  *verallgemeinerte Kräfte*. Eine verallgemeinerte Koordinate heißt *zyklisch*, wenn die Lagrange-Funktion von ihr unabhängig ist.

Im obigen Beispiel ist der verallgemeinerte Impuls zur Winkelkoordinate  $\phi$  gerade der Drehimpuls. Wie man dort sehen konnte, folgt aus der Winkelunabhängigkeit von  $L$  die Erhaltung des Drehimpulses. Dies ist ein allgemeines Resultat: der verallgemeinerte Impuls  $p_k$  zu einer zyklischen Koordinate  $q_k$  ist erhalten ( $p_k = \text{const}$ ), denn

$$\dot{p}_k = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0. \tag{8.20}$$

## 8.4 Zwangsbedingungen

In vielen physikalischen Systemen lässt sich eine grobe Einteilung der wirkenden Kräfte in zwei Kategorien vornehmen: “stark” und “schwach”. Zum Beispiel sind die chemischen Bindungskräfte zwischen den Kohlenstoffatomen eines Diamanten sehr viel stärker als die auf die Einzelatome wirkende gravitative Anziehung durch die Erde. Wie man in einem solchen Fall, wo eine klare Trennung zwischen “starken” und “schwachen” Kräften vorliegt, vorzugehen hat, ist Thema des gegenwärtigen Abschnitts.

Wir wollen von der Annahme ausgehen, dass infolge der Wirkung der “starken” Kräfte die Bewegung eines Teils der Freiheitsgrade des mechanischen Systems auf eine sehr kleine Umgebung eines bestimmten Unterraums des Phasenraums eingeschränkt wird. Zum Beispiel ändern sich unter normalen Bedingungen die Abstände zwischen den Kohlenstoffatomen in einer Diamantstruktur nur geringfügig als Funktion der Zeit, wogegen der Diamant als ganzes relativ leicht beweglich ist. In diesem Fall ist es eine für viele Zwecke vernünftige mathematische Idealisierung, den Grenzübergang zu unendlich starken Bindungskräften durchzuführen und die Relativbewegung der Kohlenstoffatome überhaupt zu unterdrücken.

Das Beispiel des Diamanten deutet einen allgemeinen Mechanismus an, wie “starke” Kräfte zu einer Einschränkung der Bewegung der konstituierenden Massenpunkte führen. Ein einfaches und pragmatisches Vorgehen besteht nun darin, die Einschränkung der Bewegung durch die Vorgabe von sogenannten **Zwangsbedingungen** zu bewerkstelligen. Im genannten Beispiel würde man als die Zwangsbedingungen die Gesamtheit aller Bedingungen wählen, die die Relativpositionen aller Kohlenstoffatome festsetzen. Weitere Beispiele für mechanische Systeme, bei denen sich eine Behandlung mittels Zwangsbedingungen empfiehlt, sind:

- (i) Die Bewegung eines Punkts (oder mehrerer Punkte) verläuft auf einer vorgegebenen Fläche.
- (ii) Gasteilchen, die in ein Volumen eingeschlossen sind.

Im Folgenden steht  $n$  für die Zahl der Freiheitsgrade vor Berücksichtigung der Zwangsbedingungen (also  $n = 3N$  für ein System von  $N$  Punkten im  $\mathbb{R}^3$ ). Wir bezeichnen mit  $A \subset \mathbb{R}^n$  den Ortsraum des mechanischen Systems ohne Zwangsbedingungen und mit  $x_1, \dots, x_n : A \rightarrow \mathbb{R}$  die Gesamtheit der Koordinaten.

**Definition.** Eine (zeitunabhängige) Zwangsbedingung heißt **holonom**, wenn sie sich als Gleichung

$$f = 0 \tag{8.21}$$

mit einer Funktion  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  ausdrücken lässt. Für die weitere Behandlung (s.u.) verlangen wir zudem, dass  $f$  differenzierbar ist und das Differential  $(df)_a$  für kein  $a \in f^{-1}(0)$  verschwindet.

**Beispiel.** Das ebene Pendel unterliegt der holonomen Zwangsbedingung  $f = x_1^2 + x_2^2 - l^2 = 0$ . Das Differential  $df = 2(x_1 dx_1 + x_2 dx_2)$  ist überall auf der Kreislinie  $f = 0$  ungleich Null.

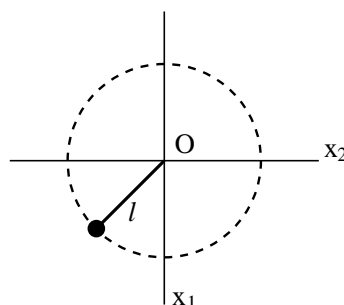
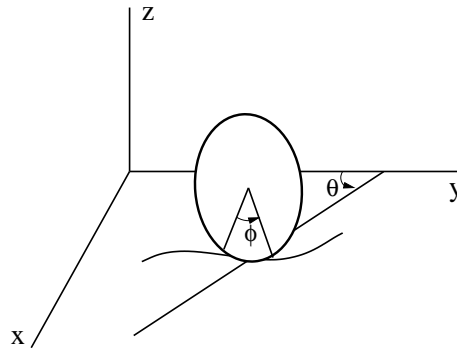


Figure 1: Ebenes Pendel



**Kontrastbeispiel** (rollende Scheibe). In dieser Vorlesung werden nur holonome Zwangsbedingungen diskutiert. Ein einfaches Beispiel für ein System mit **nicht-holonomen** Zwangsbedingungen ist das folgende (s. Goldstein, Mechanik). Betrachten wir eine Scheibe, die auf der horizontalen  $xy$ -Ebene rollt. Sie sei gezwungen, sich so zu bewegen, dass die Ebene der Scheibe stets vertikal ist. (Die Scheibe könnte eines von zwei Rädern sein, die auf einer gemeinsamen Achse angebracht sind.) Zur Beschreibung der Bewegung kann man als Koordinaten die zwei Koordinaten  $x, y$  des Scheibenzentrums, einen Drehwinkel  $\phi$  um die Scheibenachse und den Winkel  $\theta$  zwischen Scheibenachse und, sagen wir, der  $y$ -Achse wählen.



Vertikale Scheibe, die auf einer horizontalen Ebene rollt.

Infolge des Zwangs (die Scheibe rolle ohne Schlupf) ist der Betrag der Geschwindigkeit des Scheibenzentrums proportional zu  $\dot{\phi}$ :  $v = a\dot{\phi}$ , wobei  $a$  der Radius der Scheibe ist. Der Geschwindigkeitsvektor steht senkrecht zur Scheibenachse:  $\dot{x} = v \cos \theta$ ,  $\dot{y} = v \sin \theta$ . Kombinieren wir diese Bedingungen, so erhalten wir zwei Differentialgleichungen als Zwangsbedingungen:

$$dx - a \cos \theta d\phi = 0, \quad dy - a \sin \theta d\phi = 0, \quad (8.22)$$

und diese können nicht integriert werden, ehe man das vollständige Problem tatsächlich gelöst hat. Solche **nichtintegrierbaren** Zwangsbedingungen sind nur spezielle Fälle nichtholonomer Zwangsbedingungen; die Zwangsbedingungen können auch in Form von Ungleichungen auftreten.

**Rangbedingung.** Im allgemeinsten hier betrachteten Fall liegen  $r$  holonome Zwangsbedingungen vor:

$$f_1 = \dots = f_r = 0. \quad (8.23)$$

Die Funktionen  $f_k : A \rightarrow \mathbb{R}$  seien genügend oft stetig differenzierbar. Wir wollen annehmen, dass die Zwangsbedingungen unabhängig sind, d.h. es gelte

$$\{(df_1)_a, \dots, (df_r)_a\} \quad \text{linear unabhängig} \quad (8.24)$$

für alle Stellen  $a \in A$  im Lösungsraum von (8.23).

**Zwangskräfte.** Vom Newtonschen Standpunkt aus gesehen signalisiert die Existenz von Zwangsbedingungen die Anwesenheit von sogenannten **Zwangskräften**, die dafür sorgen, dass die Bewegung des mechanischen Systems auf der durch (8.23) festgelegten Teilmenge von  $A \subset \mathbb{R}^n$  verläuft.

Gäbe es diese Kräfte nämlich nicht und verschwänden auch alle anderen Kräfte, so wäre die Bewegung der Punkte gleichförmig und geradlinig und könnte im allgemeinen nicht die Bedingungen (8.23) erfüllen.

**Idealisierung.** Die Zwangskräfte sind per Postulat *idealer* Natur: sie leisten keine Arbeit, d.h. sie “stehen senkrecht” auf der durch (8.23) ausgezeichneten Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ , auf der die Bewegung verläuft. (Eine präzise Formulierung dieses Sachverhalts wird unten im d’Alembertschen Prinzip gegeben.) Bezeichnen wir die Summe der inneren und/oder äußeren Kräfte, die das mechanische System antreiben, mit  $F$  und die Zwangskräfte mit  $Z$ , so lauten die Newtonschen Bewegungsgleichungen

$$m_k \ddot{x}_k = F_k + Z_k \quad (k = 1, \dots, n). \quad (8.25)$$

Die Notation ist hier so gewählt, dass für ein System von  $N$  Punkten im  $\mathbb{R}^3$  ( $n = 3N$ ) gilt:  $m_1 = m_2 = m_3 =$  Masse des ersten Punkts,  $m_4 = m_5 = m_6 =$  Masse des zweiten Punkts usw.

**Beispiel.** Beim ebenen Pendel wirkt zusätzlich zur Schwerkraft  $F$  eine Zwangskraft  $Z$  in Richtung der Pendelachse; genauer: die Ebenen der Kraftform  $Z$  liegen tangential zum Kreis des Pendels, und zwar mit solcher Stärke, dass die entsprechenden Ebenen von  $F$  genau neutralisiert werden.

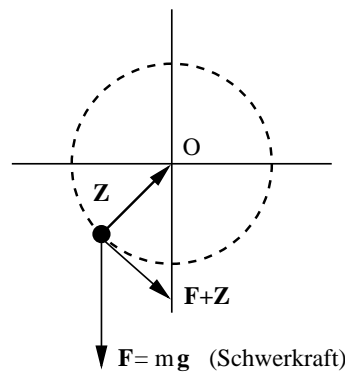


Figure 2: Ebenes Pendel (nochmal)

**Reduktion.** Die Beschreibung der Bewegung des Systems anhand der Gleichungen (8.25) ist unökonomisch: sie erfordert mehr Koordinaten als wegen der Existenz der Zwangsbedingungen (8.23) nötig ist, und sie involviert die (zunächst) unbestimmten Funktionen  $Z_k$ . Es liegt auf der Hand, welches Ziel man hier verfolgen sollte: man wird versuchen, zu  $f = n - r$  Bewegungsgleichungen für  $f$  verallgemeinerte Koordinaten überzugehen, wo die Zwangskräfte nicht mehr in Erscheinung treten. Für den Fall holonomer Zwangsbedingungen lässt sich dieses Ziel in der Tat erreichen. Wir geben zunächst die Vorschrift an, nach der man in der Praxis vorgeht, und schicken eine Begründung hinterher.

**Gebrauchsanweisung.** Gegeben sei ein System mit Lagrange-Funktion  $L : A \times V \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir bezeichnen mit  $M$  die Lösungsmenge der holonomen Zwangsbedingungen (8.23),

$$M := \{a \in A \mid f_k(a) = 0; k = 1, \dots, r\}. \quad (8.26)$$

(A) **Parametrisiere**  $M$  durch eine differenzierbare Abbildung  $\varphi : U \rightarrow M$  mit  $U \subset \mathbb{R}^f$ ,  $f = n - r$ ; d.h.  $(f_k \circ \varphi)(q) = 0$  für alle  $q \in U$  und  $k = 1, \dots, r$ . [Dies funktioniert im allgemeinen nur **lokal**. Die lokale Existenz von  $\varphi$  aber ist durch den Satz über implizit definierte Funktionen und die Rangbedingung (8.24) gesichert.]

(B) Eine Kurve  $\gamma : I \rightarrow U$  wird durch  $\varphi$  in eine Kurve  $\varphi \circ \gamma$  in  $M$  abgebildet. Definiere die Lagrange-Funktion des Systems mit Zwangsbedingungen,  $\bar{L} : U \times \mathbb{R}^f \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , durch

$$\bar{L}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t) := L((\varphi \circ \gamma)(t), \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma)(t), t). \quad (8.27)$$

(C) Wähle einen Satz von Koordinatenfunktionen  $q_1, \dots, q_f : U \rightarrow \mathbb{R}$  and stelle die Euler-Lagrange-Gleichungen zu  $\bar{L}$  auf:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial \bar{L}}{\partial q_k} \quad (k = 1, \dots, f). \quad (8.28)$$

**Bemerkung:** Folgt man dieser Vorschrift, so sind die Zwangsbedingungen identisch erfüllt, und die Einführung von Zwangskräften erübrigt sich.

**Beispiel:** Ebenes Pendel. Hierunter verstehen wir bekanntlich einen Punkt mit Masse  $m$ , der sich unter dem Einfluss der Schwerkraft auf einer Kreislinie  $M$  im  $\mathbb{R}^2$  bewegt. O.B.d.A. wählen wir  $M$  als die Lösungsmenge der Gleichung  $x_1^2 + x_2^2 - l^2 = 0$ . Zur Implementierung dieser Zwangsbedingung parametrisieren wir  $M$  durch Skalierung als Bild der Einheitskreises  $S^1 = \{q \in \mathbb{R}^2 \mid |q|^2 = 1\}$ :

$$\varphi : S^1 \rightarrow M, \quad q \mapsto lq. \quad (8.29)$$

Die Lagrange-Funktion  $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + mgx_1$  reduziert sich dann zu

$$\bar{L}(q, \dot{q}, t) = L(lq, l\dot{q}, t) = \frac{1}{2}ml^2|\dot{q}|^2 + mglq_1. \quad (8.30)$$

Als Koordinatenfunktion für  $S^1$  empfiehlt sich ein **Winkel**  $\theta$ , sagen wir  $q_1 = \cos \theta$ ,  $q_2 = \sin \theta$ . Mit dieser Koordinatenwahl wird die reduzierte Lagrange-Funktion ausgedrückt durch

$$\bar{L} = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta. \quad (8.31)$$

Die Bewegungsgleichung für  $\theta$  ist die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial \theta} = 0 = ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin \theta.$$

Äquivalent gilt  $\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin \theta$  mit  $\omega = \sqrt{g/l}$ .

## 8.5 Begründung der Gebrauchsanweisung

In diesem Abschnitt begründen wir, warum die Gebrauchsanweisung richtig ist (Arnold, Seiten 91ff.). Der Einfachheit halber betrachten wir ein autonomes System mit Lagrange-Funktion

$$L = \frac{m}{2}|\dot{x}|^2 - U(x), \quad |\dot{x}|^2 = \sum_{k=1}^n \dot{x}_k^2. \quad (8.32)$$

Wie zuvor gelten die  $r$  zeitunabhängigen holonomen Zwangsbedingungen (8.23). Die Newtonschen Bewegungsgleichungen (8.25) für eine Bahnkurve  $t \mapsto \Gamma(t)$  lauten in diesem Fall

$$\langle m\ddot{\Gamma}(t), \cdot \rangle + (dU)_{\Gamma(t)} = Z_{\Gamma(t)}, \quad (8.33)$$

mit  $Z$  der Zwangskraft.

**Tangentialraum.** Zu jedem Punkt  $a \in M$  im Lösungsraum der Zwangsbedingungen definieren wir jetzt einen linearen Raum,

$$T_a M := \{ \xi \in \mathbb{R}^n \mid (df_k)_a(\xi) = 0; k = 1, \dots, r \}. \quad (8.34)$$

$T_a M$  heißt der **Tangentialraum** an die differenzierbare Mannigfaltigkeit  $M$  im Punkt  $a$ .

**D'Alembertsches Prinzip:** *die Zwangskräfte leisten keine virtuelle Arbeit,*

$$Z_a(\xi) = 0 \quad \text{für alle } \xi \in T_a M. \quad (8.35)$$

Im Visualisierungsbild für Linearformen können wir auch sagen, dass die (Hyper-)Ebenenschar der Zwangskraft  $Z$  in jedem Punkt  $a \in M$  tangential zu  $M$  liegt.

**Bemerkung.** Das d'Alembertsche Prinzip lässt sich nicht aus (8.23) und (8.25) deduzieren, sondern muss hier als zusätzliches physikalisches Postulat investiert werden. Es impliziert, dass das System auf dem durch die Zwangsbedingungen (8.23) eingeschränkten Konfigurationsraum, nämlich auf  $M$ , **„ideal gleitet“**, dass also insbesondere Reibungsverluste – die ja in realen Systemen immer vorliegen – vernachlässigbar sind. Mit (8.33) können wir anstelle von (8.35) auch schreiben:

$$\langle m\ddot{\Gamma}(t), \xi \rangle + (dU)_{\Gamma(t)}(\xi) = 0 \quad \text{für alle } \xi \in T_{\Gamma(t)} M. \quad (8.36)$$

**Tangentialabbildung.** Sei nun  $\varphi : U \rightarrow M$ ,  $q \mapsto \varphi(q)$  die parametrisierende Abbildung von Schritt (A) der Gebrauchsanweisung, und

$$\begin{aligned} T\varphi : U \times \mathbb{R}^f &\rightarrow TM \\ (q, \dot{q}) &\mapsto (\varphi(q), D_q \varphi(\dot{q})) \end{aligned} \quad (8.37)$$

die zugehörige **Tangentialabbildung**. Wie in Schritt (B) bilden wir

$$\bar{L} := L \circ T\varphi. \quad (8.38)$$

**Satz.** Sei  $\gamma : I \rightarrow U$  eine differenzierbare Kurve und  $\Gamma = \varphi \circ \gamma : I \rightarrow M$  ihr Bild unter  $\varphi$ . Für  $I = [t_0, t_1]$  schreiben wir  $\gamma(t_j) = q^{(j)} \in U$  und  $\Gamma(t_j) = a^{(j)} \in M$  ( $j = 0, 1$ ). Dann sind die folgenden Aussagen zueinander äquivalent:

- (i) Das Wirkungsfunktional  $\bar{S}[\gamma] := \int_{t_0}^{t_1} \bar{L}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt$  ist extremal in  $\gamma$  auf der durch  $\gamma(t_0) = q^{(0)}$  und  $\gamma(t_1) = q^{(1)}$  eingeschränkten Kurvenmenge.
- (ii) Das d'Alembertsche Prinzip (8.36) ist erfüllt.

**Bemerkung:** Es wird also die Äquivalenz des d'Alembertschen Prinzips zum Hamiltonschen Prinzip der kleinsten Wirkung (für die Bewegung auf  $TM$ ) behauptet.

**Beweis** des Satzes. Die Extremalität von  $\bar{S}$  in  $\gamma$  bedeutet

$$0 = D_\gamma \bar{S}(h) := \frac{d}{d\varepsilon} \int_{t_0}^{t_1} \bar{L}(\gamma(t) + \varepsilon h(t), \dot{\gamma}(t) + \varepsilon \dot{h}(t)) dt \Big|_{\varepsilon=0}.$$

Um diese Bedingung auszuwerten, gehen wir zu  $\Gamma = \varphi \circ \gamma$  über:

$$\begin{aligned} \varphi(\gamma(t) + \varepsilon h(t)) &= \Gamma(t) + \varepsilon \xi(t) + O(\varepsilon^2), \\ \dot{\varphi}(\gamma(t) + \varepsilon h(t)) &= \dot{\Gamma}(t) + \varepsilon \dot{\xi}(t) + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

wobei  $\xi(t) := (D_{\gamma(t)} \varphi)(h(t))$ . Dann entsteht:

$$\begin{aligned} 0 = D_\gamma \bar{S}(h) &= \frac{d}{d\varepsilon} \int_{t_0}^{t_1} L(\Gamma(t) + \varepsilon \xi(t), \dot{\Gamma}(t) + \varepsilon \dot{\xi}(t)) dt \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \frac{d}{d\varepsilon} \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{1}{2} m |\dot{\Gamma} + \varepsilon \dot{\xi}|^2 - U(\Gamma + \varepsilon \xi) \right) dt \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} (\langle m \dot{\Gamma}, \dot{\xi} \rangle - (dU)_\Gamma(\xi)) dt \\ &\stackrel{\xi(t_0)=\xi(t_1)=0}{=} - \int_{t_0}^{t_1} (\langle m \ddot{\Gamma}, \xi \rangle + (dU)_\Gamma(\xi)). \end{aligned} \quad (8.39)$$

Da  $h(t)$  beliebig gewählt werden kann, ist auch  $\xi(t) \in T_{\Gamma(t)}M$  beliebig. Damit folgt aus dem Verschwinden des Ausdrucks in (8.39) das d'Alembertsche Prinzip in der Form von Gleichung (8.36) und somit die Äquivalenz von (i) und (ii). ■

Hiermit ist aber jetzt die Richtigkeit der Gebrauchsanweisung gezeigt, denn aus dem Hamiltonschen Extremalprinzip für  $\bar{S}$ , (i), folgen die Euler-Lagrange-Gleichungen (8.28).

## 8.6 Parametrische Resonanz

**Modell einer Schaukel.** Wenn die Parameter eines Systems periodisch von der Zeit abhängen, dann kann eine Gleichgewichtslage instabil sein, selbst wenn sie für jeden festen Wert der Parameter stabil ist. Diese Instabilität ermöglicht das Aufschaukeln auf z.B. einer **Kinderschaukel**, wie im Folgenden gezeigt werden soll. Dazu betrachten wir den eindimensionalen, harmonischen Oszillator mit periodisch variierender Frequenz,

$$\ddot{q} + \omega^2(t) q = 0, \quad \omega(t+T) = \omega(t), \quad (8.40)$$

oder das äquivalente Hamiltonsche System (mit Masse  $m = 1$ )

$$\dot{q} = p, \quad \dot{p} = -\omega^2(t) q, \quad \omega(t+T) = \omega(t). \quad (8.41)$$

Gleichung (8.40) ist ein einfaches Modell für die Schaukel: ein Pendel mit periodisch variierender Länge  $l(t)$  und zugehöriger Frequenz  $\omega(t) = \sqrt{g/l(t)}$ .

Sei  $\phi_t \equiv \phi_{t,0}$  der Fluss des Hamiltonschen Systems (8.41). Da das System nichtautonom ist, gilt im allgemeinen keine Gruppeneigenschaft:  $\phi_t \circ \phi_s \neq \phi_{t+s}$ . Jedoch gilt immerhin  $\phi_T \circ \phi_t = \phi_{T+t}$ ,

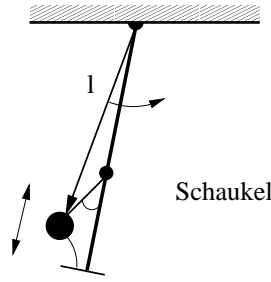
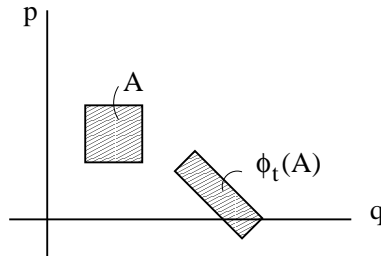


Figure 3: Schaukel

denn  $\phi_{T+t,0} = \phi_{T+t,T} \circ \phi_{T,0}$  und  $\phi_{T+t,T} = \phi_{t,0}$  als Konsequenz der Periodizität. Hieraus folgt insbesondere  $\phi_{nT} = (\phi_T)^n$ . Beachte auch, dass  $\phi_t$  linear ist:  $\phi_t^*(q, p) = (a_t q + b_t p, c_t q + d_t p)$ . Wir schreiben  $J_t := \begin{pmatrix} a_t & b_t \\ c_t & d_t \end{pmatrix}$ .

**Liouvillescher Satz.** Der Fluss  $\phi_t$  ist **flächentreu**, d.h.  $\int_{\phi_t(A)} dp \wedge dq = \int_A dp \wedge dq$ .



**Beweis.** Setze  $\Omega(t) := \int_{\phi_t(A)} dp \wedge dq$ . Dann gilt nach dem Transformationssatz

$$\Omega(t) = \int_A \phi_t^*(dp \wedge dq) = \text{Det}(J_t) \int_A dp \wedge dq. \quad (8.42)$$

Bis zur linearen Ordnung in  $t$  ist der Fluss gegeben durch

$$\phi_t^*(q, p) = (q + pt, p - \omega^2(0)qt) + \mathcal{O}(t^2). \quad (8.43)$$

Wir haben also

$$J_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ -\omega^2(0)t & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(t^2) \quad (8.44)$$

und somit  $\text{Det}(J_t) = 1 + \mathcal{O}(t^2)$ . Es folgt:  $\left. \frac{d}{dt} \Omega(t) \right|_{t=0} = 0$ .

Nun ist aber der Zeitpunkt  $t = 0$  durch nichts ausgezeichnet, und mit der gleichen Argumentation zeigt man für  $t = t_0$  beliebig:  $\left. \frac{d}{dt} \Omega(t) \right|_{t=t_0} = 0$ . Folglich ist  $\Omega(t) = \Omega(0) = \text{const}$ .

**Stabilität.** Eine lineare Transformation  $J : V \rightarrow V$  eines normierten Vektorraums  $V$  heißt **stabil**, wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  und alle  $v \in V$  mit Länge  $|v| < \delta$  gilt:  $|J^n v| < \varepsilon$ .

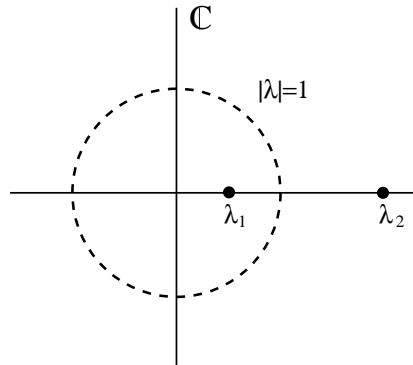
Die Gleichgewichtslage  $q = 0, p = 0$  ist ein Fixpunkt des linearen Flusses  $\phi_t$ , und wir fragen jetzt nach der Stabilität dieser Gleichgewichtslage. Dazu betrachten wir die Flussmatrix  $J_t$  für  $t = nT$  und benützen  $J_{nT} = J_T^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) sowie die flächenerhaltende Eigenschaft von  $J_T \equiv J$ .

**Satz.** Sei  $J$  eine lineare, flächentreue Abbildung  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Dann ist die Abbildung stabil, falls  $|\text{Tr } J| < 2$ , und sie ist instabil, falls  $|\text{Tr } J| > 2$ .

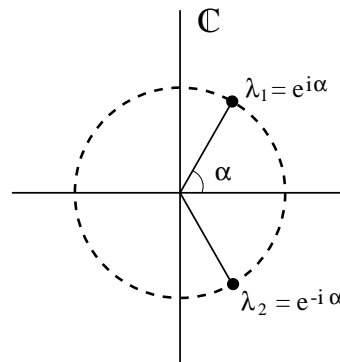
**Beweis.** Seien  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  die Eigenwerte von  $J$ . Sie genügen der charakteristischen Gleichung  $\lambda^2 - \lambda(\text{Tr } J) + \text{Det } J = 0$ . Da  $J$  flächentreu ist, gilt  $\text{Det } J \equiv 1$ . Die Wurzeln der quadratischen Gleichung ergeben sich somit zu

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(\text{Tr } J \pm \sqrt{(\text{Tr } J)^2 - 4}). \quad (8.45)$$

Für  $|\text{Tr } J| > 2$  liegen zwei reelle Eigenwerte vor, einer dem Betrag nach kleiner als Eins, der andere dem Betrag nach größer als Eins. Die Abbildung ist dann **instabil**.



Für  $|\text{Tr } J| < 2$  liegen die Eigenwerte auf dem Einheitskreis in der komplexen  $\lambda$ -Ebene:  $1 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \lambda_1 \bar{\lambda}_1$ . Die Abbildung ist in diesem Fall **stabil**. ■



Aufgrund von  $J_{nT} = J_T^n$  reduziert sich die Stabilitätsanalyse nach dem obigen Satz auf die Berechnung von  $\text{Tr } J_T$ . Diese Berechnung lässt sich nur in Spezialfällen explizit durchführen.

**Schwache Störung.** Wir betrachten hier den Grenzfall einer schwachen Störung,

$$\omega(t) = (1 + \varepsilon f(t)) \omega, \quad f(t) = f(t + T), \quad \varepsilon \text{ klein.} \quad (8.46)$$

In diesem Fall gewinnt man bereits durch die Betrachtung des zeitunabhängigen Systems ( $\varepsilon = 0$ ) eine wesentliche Einsicht. Für  $\varepsilon = 0$  ist  $\phi_T^*(q, p) = (q \cos \omega T + \frac{p}{\omega} \sin \omega T, -q \omega \sin \omega T + p \cos \omega T)$ , und

$$J_T = \begin{pmatrix} \cos \omega T & (1/\omega) \sin \omega T \\ -\omega \sin \omega T & \cos \omega T \end{pmatrix}. \quad (8.47)$$

Man sieht:  $|\text{Tr } J_T| = 2|\cos \omega T| \leq 2$ . Da  $|\text{Tr } J_T|$  stetig von  $\varepsilon$  abhängt, hat jeder Punkt  $(T, 0)$  in der  $T\varepsilon$ -Ebene mit  $0 < T \neq \frac{\pi n}{\omega}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) eine offene Umgebung, in der  $|\text{Tr } J_T| < 2$  gilt. Man spricht dann von **starker Stabilität**.

Für  $\omega T = \pi n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), also  $|\cos \omega T| = 1$ , kann jedoch bereits eine infinitesimale Störung zu  $|\text{Tr } J_T| > 2$ , also zu Instabilität, führen. Dies sieht man explizit im folgenden

**Beispiel.** Betrachte eine **stückweise konstante** Störung:

$$f(t) = \begin{cases} +1/\omega & \text{für } 0 < t < T/2, \\ -1/\omega & \text{für } T/2 < t < T. \end{cases} \quad (8.48)$$

(So ruckartig schaukelt kein Kind, aber das Ergebnis ist qualitativ dasselbe.) Aus dem obigen Ergebnis sehen wir:

$$J_T = A_2 A_1, \quad A_k = \begin{pmatrix} \cos(\omega_k T/2) & (1/\omega_k) \sin(\omega_k T/2) \\ -\omega_k \sin(\omega_k T/2) & \cos(\omega_k T/2) \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2), \quad (8.49)$$

mit  $\omega_1 = \omega + \varepsilon$ ,  $\omega_2 = \omega - \varepsilon$ . Der **Rand der stabilen Zone** ist die Lösungsmenge der Gleichung

$$2 = |\text{Tr } J_T| = \left| 2 \cos(\omega_1 T/2) \cdot \cos(\omega_2 T/2) - \left( \frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) \sin(\omega_1 T/2) \cdot \sin(\omega_2 T/2) \right|. \quad (8.50)$$

Nach einigen Umformungen entsteht hieraus die Gleichung

$$|\omega^2 \cos \omega T - \varepsilon^2 \cos \varepsilon T| = \omega^2 - \varepsilon^2. \quad (8.51)$$

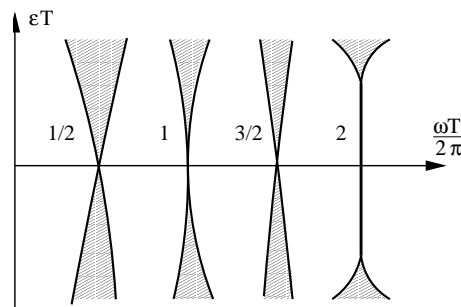
Für die Funktionen  $T \mapsto \varepsilon(T)$ , deren Graphen in der  $T\varepsilon$ -Ebene mit dem Rand der stabilen Zone übereinstimmen, erhalten wir durch Entwicklung um  $\omega T = n\pi$

$$\varepsilon(T) = \pm \frac{\omega}{2} (\omega T - n\pi) \quad (8.52)$$

im Fall von ungeradem  $n$  und

$$\varepsilon(T) = \pm \sqrt{\omega/T} \cdot \sqrt{|\omega T - n\pi|} \quad (8.53)$$

im Fall von geradem  $n$ . Die Zonen der Instabilität sind in der folgenden Figur schraffiert:



In realen Systemen mit Dämpfung durch Reibungsverluste beobachtet man Instabilität (**“parametrische Resonanz”**) meist nur für  $n = 1, 2$ , selten für  $n = 3$ .