9 Hamiltonsche Formulierung der Mechanik

In diesem Kapitel entwickeln wir die Hamiltonsche (oder "kanonische") Formulierung der Mechanik, die den Ausgangspunkt für die Quantenmechanik bildet. Die Bewegungsgleichungen für ein mechanisches System mit f Freiheitsgraden schreiben wir als ein System von $2f$ Differentialgleichungen erster Ordnung in der Zeit. Wir werden sehen, dass solche Hamiltonschen Systeme unter einer sehr großen Gruppe von Transformationen, den sogenannten kanonischen Transformationen, forminvariant sind. Den Übergang von der Lagrange-Funktion zur Hamilton-Funktion vollziehen wir mit der Legendre-Transformation.

9.1 Legendre-Transformation

Beobachtung. Um das Folgende zu motivieren, erinnern wir an die Lagrange-Funktion des N-Teilchensystems im Euklidischen Raum E_3 mit konservativen Kräften,

$$L = T - U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i |\dot{\mathbf{r}}_i|^2 - U(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N).$$

Die Teilchen-Impulse $\mathbf{p}_i$ sind durch $\mathbf{p}_i = \partial L/\partial \dot{\mathbf{r}}_i = \langle m_i \dot{\mathbf{r}}_i, \cdot\, \rangle$ gegeben, und die Hamilton-Funktion ist gleich der Summe aus kinetischer und potentieller Energie:

$$H = T + U = \sum_i \frac{|\mathbf{p}_i|^2}{2m_i} + U(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N).$$

Wie man sieht, hängen Lagrange-Funktion und Hamilton-Funktion folgendermaßen zusammen:

$$H = \sum_i \mathbf{p}_i(\dot{\mathbf{r}}_i) - L, \tag{9.1}$$

wobei auf der rechten Seite $\langle \dot{\mathbf{r}}_i, \cdot\, \rangle = \mathbf{p}_i/m_i$ einzusetzen ist. Diesen Zusammenhang wollen wir nun formalisieren und verallgemeinern.

Wir erläutern den Begriff der Legendre-Transformation zunächst für Funktionen einer einzigen Veränderlichen und geben später den allgemeinen Fall an.

Gegeben sei eine zweimal stetig differenzierbare konvexe Funktion $f:\ \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$. Konvexität einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion f bedeutet $f''(x) > 0$ für alle $x \in I$. Wir definieren die Funktion g durch $g(x) := f'(x)$. Nach dem Satz über implizit definierte Funktionen besitzt g eine Umkehrfunktion h ($h \circ g = \mathrm{Id}$). Diese Funktion gewinnt man durch Auflösen der Gleichung $y = g(x)$ nach x; also $x = h(y)$.

Definition. Die *Legendre-Transformierte* $\mathcal{L}f$ von f ist erklärt durch

$$\big(\mathcal{L}f\big)(y) := y\, h(y) - f\big(h(y)\big). \tag{9.2}$$

Beispiele:

(i) Sei $f(v) = mv^2/2$. Dann ist $g(v) = f'(v) = mv =: p$ und $h(p) = p/m$. Folglich ist

$$\big(\mathcal{L}f\big)(p) = p\frac{p}{m} - \frac{m}{2}\left(\frac{p}{m}\right)^2 = \frac{p^2}{2m}\,.$$

(ii) Sei $f:\ \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^\alpha/\alpha$. Dann ist $(\mathcal{L}f)(y) = y^\beta/\beta$, wobei $\alpha^{-1} + \beta^{-1} = 1$. Konvexität erfordert $\alpha > 1$.

(iii) Sei $f(x) = \mathrm{e}^x$. Dann ist $(\mathcal{L}f)(y) = y\,(\ln y - 1)$.

Wir wollen nun einige Eigenschaften der Legendre-Transformation herausarbeiten. Die Notationen seien so wie oben eingeführt.

Satz. Die Legendre-Transformation hat die folgenden Eigenschaften:

1. $(\mathcal{L}f)' = h$.
2. $(\mathcal{L}f)'' = (f'' \circ h)^{-1}$.
3. Mit f ist auch $\mathcal{L}f$ konvex.
4. Die Legendre-Transformation ist involutiv, d.h. $\mathcal{L}^2 f := \mathcal{L}(\mathcal{L}f) = f$ für $f \in \mathrm{C}^2(I)$, f konvex.

Beweis. Für die erste Eigenschaft bilden wir die Ableitung von (9.2):

$$\left(\frac{d}{dy}\mathcal{L}f\right)(y) = h(y) + y\,h'(y) - (f' \circ h)(y)\,h'(y).$$

Wegen $f' \circ h = g \circ h = \mathrm{Id}$ heben sich die letzten beiden Terme auf der rechten Seite weg. Für die zweite Eigenschaft differenzieren wir nochmal: $(\mathcal{L}f)'' = h'$. Nun gilt aber wegen $(g \circ h)(y) = y$ die Beziehung $(g' \circ h)\,h' = 1$ und somit $h' = (g' \circ h)^{-1} = (f'' \circ h)^{-1}$. Hieraus folgt sofort die dritte Eigenschaft, denn $f'' > 0$ impliziert $(f'' \circ h)^{-1} > 0$.

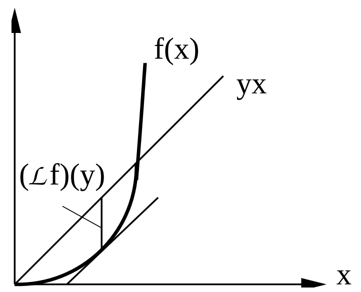
Da $\mathcal{L}f$ wieder konvex ist, können wir die Legendre-Transformation hierauf nochmals anwenden. Mit der ersten Eigenschaft $[(\mathcal{L}f)' = h]$ und $h(g(x)) = x$ folgt

$$\begin{aligned}\big(\mathcal{L}^2 f\big)(x) &= x\,g(x) - \big(\mathcal{L}f\big)\big(g(x)\big)\\ &= x\,g(x) - g(x)\,h\big(g(x)\big) + f\big(h(g(x))\big) = f(x). \quad \square\end{aligned}$$

Bemerkung: Die Legendre-Transformation lässt sich durch die Definition

$$\big(\mathcal{L}f\big)(y) := \sup_{x \in I}\big(yx - f(x)\big) \tag{9.3}$$

auf beliebige stetige konvexe Funktionen $f:\ I \to \mathbb{R}$ ausdehnen. Gleichung (9.3) hat die nachstehende graphische Interpretation:



Hieraus lässt sich für den Spezialfall von konvexem $f \in \mathrm{C}^2(I)$ die Äquivalenz von (9.3) zur obigen Definition leicht ersehen.

9.1.1 Verallgemeinerung auf Funktionen mehrerer Veränderlicher

Definition. Sei $V \equiv \mathbb{R}^n$ und $V^* := \mathrm{L}(V, \mathbb{R})$ der Raum der linearen Abbildungen $V \to \mathbb{R}$. Sei weiter $f: V \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ von der Klasse C^2 und konvex, d.h. die Hessesche Form $D_x^2 f$ ist positiv definit für alle $x \in V$. Definiere $g: V \to V^*$ durch $g(x) = D_x f$ und die Umkehrabbildung $h: V^* \to V$ durch $h \circ g = \mathrm{Id}$. Dann ist die *Legendre-Transformierte* $\mathcal{L}f: V^* \to \mathbb{R}$ erklärt durch

$$\big(\mathcal{L}f\big)(y) := y\big(h(y)\big) - f\big(h(y)\big). \tag{9.4}$$

Bemerkung: In Koordinatendarstellung bedeutet dies, dass man die Gleichungen $y_k = g_k(x) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ $(k = 1, \dots, n)$ nach x auflöst: $x_l = h_l(y)$ $(l = 1, \dots, n)$ und dann setzt:

$$\big(\mathcal{L}f\big)(y) := \sum_{l=1}^{n} y_l\, h_l(y) - f\big(h(y)\big).$$

Beachte, dass die Definitionsbereiche von $f: V \to \mathbb{R}$ und $\mathcal{L}f: V^* \to \mathbb{R}$ zueinander dual sind.

Satz. Die Voraussetzungen seien wie in der obigen Definition. Dann gelten die Gleichungen

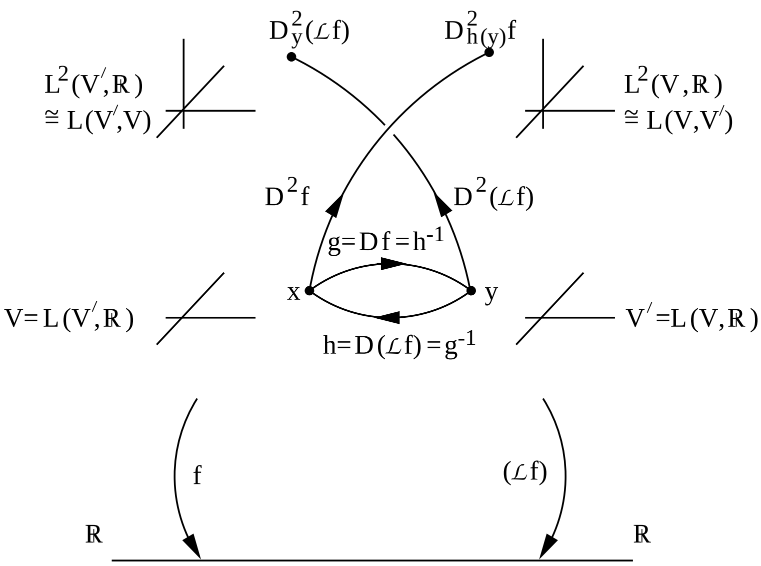
$$D_y(\mathcal{L}f) = h(y), \tag{9.5}$$

$$D_y^2(\mathcal{L}f) = \big(D_{h(y)}^2 f\big)^{-1}, \tag{9.6}$$

$$\mathcal{L}^2 f = f. \tag{9.7}$$

Bemerkung. Der Nachweis dieser Eigenschaften erfolgt wie im Beweis der analogen Aussagen des Satzes in Abschnitt 9.1. Für Gleichung (9.6) erinnere man sich an den natürlichen Isomorphismus zwischen $\mathrm{L}^2(V, \mathbb{R})$ (den quadratischen Formen auf V) und $\mathrm{L}(V, V^*)$ (den linearen Abbildung von V nach V^*). Dieser Isomorphismus konvertiert $\omega: V \times V \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \omega(x, y)$ bekanntlich in $\omega: V \to V^* = \mathrm{L}(V, \mathbb{R})$ durch Einsetzen ins linke Argument, $x \mapsto \omega(x, \cdot\,)$.

Graphische Veranschaulichung.



Parameter. Schließlich betrachten wir noch den wichtigen Fall, wo f von einem Parameter abhängt: $f: V \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, \alpha) \mapsto f(x; \alpha)$. Wir definieren die Legendre-Transformierte $\mathcal{L}f$ von

f als Funktion von x, indem wir den Parameter α *festhalten.* Damit ist gemeint, dass wir die Gleichungen

$$y_k = g_k(x;\alpha) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x;\alpha) \quad (k = 1,\ldots,n), \tag{9.8}$$

nach x auflösen: $x_l = h_l(y;\alpha)$ $(l = 1,\ldots,n)$, und dann setzen:

$$(\mathcal{L}f)(y;\alpha) := \sum_{l=1}^{n} y_l\, h_l(y;\alpha) - f\big(h(y;\alpha);\alpha\big).$$

Es gelten dann wieder die Gleichungen (9.5)–(9.7), wobei beim Bilden der Differentiale $D^2 f$, $D(\mathcal{L}f)$ und $D^2(\mathcal{L}f)$ der Parameter α als fest zu betrachten ist.

Ableitung. Für die partielle Ableitung nach dem Parameter gilt die Relation

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\mathcal{L}f = -\frac{\partial}{\partial\alpha} f\,. \tag{9.9}$$

Die Definition der partiellen Ableitung setzt bekanntlich voraus, dass alle Koordinaten feststehen. Deshalb muss hier ergänzt werden, dass auf beiden Seiten das jeweils natürliche Koordinatensystem gemeint ist; also $\{y_1,\ldots,y_n;\alpha\}$ auf der linken Seite und $\{x_1,\ldots,x_n;\alpha\}$ auf der rechten Seite. Zum Nachweis der behaupteten Relation berechnen wir

$$\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\mathcal{L}f\right)(y;\alpha) = \sum_l y_l \frac{\partial h_l}{\partial\alpha}(y;\alpha) - \frac{\partial f}{\partial\alpha}\Big(h(y;\alpha);\alpha\Big) - \sum_l \frac{\partial f}{\partial x_l}\Big(h(y;\alpha);\alpha\Big)\frac{\partial h_l}{\partial\alpha}(y;\alpha).$$

Wegen der Definition von $h(y;\alpha)$ als Umkehrfunktion zu $y_l = \partial f/\partial x_l$ heben sich der erste und letzte Summand auf der rechten Seite gegenseitig auf. Es verbleibt der mittlere Summand, also die (negative) partielle Ableitung von f nach α bzgl. des Koordinatensystems $\{x_1,\ldots,x_n;\alpha\}$.

Viele Parameter. Hängt f nicht von einem, sondern mehreren Parametern $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ ab, gehen wir ganz genauso vor. Es gelten dann wiederum die Gleichungen (9.5)–(9.7), und anstelle von (9.9) haben wir

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_k}\mathcal{L}f = -\frac{\partial}{\partial\alpha_k} f \quad (k = 1,\ldots,m). \tag{9.9$'$}$$

9.2 Die kanonischen Gleichungen

Wir erinnern an die Definition der Lagrange-Funktion L als Abbildung

$$\begin{aligned} L:\ (U\subset\mathbb{R}^f)\times\mathbb{R}^f\times\mathbb{R} &\ \to\ \mathbb{R}\,,\\ (q,\dot q,t) &\ \mapsto\ L(q,\dot q,t)\,. \end{aligned}$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen zur Lagrange-Funktion L schreiben wir in der Form

$$\dot p_k = \frac{\partial L}{\partial q_k} \quad (k = 1,\ldots,f), \quad \text{wobei} \quad p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot q_k} \tag{9.10}$$

der verallgemeinerte Impuls zu q_k ist, den wir ab sofort den *kanonischen Impuls* nennen.

Satz. Die Euler-Lagrange-Gleichungen $\dot p_k = \partial L/\partial q_k$ mit dem kanonischen Impuls $p_k = \partial L/\partial \dot q_k$ $(k = 1,\ldots,f)$ sind äquivalent zu dem System von Gleichungen

$$\boxed{\dot q_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}\,, \quad \dot p_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}} \quad (k = 1,\ldots,f)\,, \tag{9.11}$$

wobei H die Legendre-Transformierte von L als Funktion der Geschwindigkeiten $\dot q$ ist.

wobei H die Legendre-Transformierte von L als Funktion der Geschwindigkeiten $\dot{q}$ ist.

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass aus den Euler-Lagrange-Gleichungen das Gleichungssystem (9.11) folgt ($\Rightarrow$). Es gelte also $\dot{p}_k = \partial L/\partial q_k$ für $p_k = \partial L/\partial \dot{q}_k$. Um die Resultate von Abschnitt 9.1 anzuwenden, machen wir die Identifikationen

$$L = f\,, \quad H = \mathcal{L}f\,, \quad \dot{q} = x\,, \quad p = y\,; \quad (q,t) = \alpha\,.$$

Wir bezeichnen die Umkehrfunktionen zu $p_k = g_k(q,\dot{q},t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}(q,\dot{q},t)$ mit $\dot{q}_k = h_k(q,p,t)$ und haben somit

$$H(q,p,t) = \sum_{k=1}^{f} p_k\, h_k(q,p,t) - L\big(q, h(q,p,t), t\big). \tag{9.12}$$

Das System (9.11) folgt dann sofort aus den Gleichungen (9.5) und (9.9′) von Abschnitt 9.1.1:

$$\begin{aligned}
\dot{q}_k &= h_k(q,p,t) \overset{(9.5)}{=} \frac{\partial H}{\partial p_k}(q,p,t) \quad \text{und} \\
\dot{p}_k &= \frac{\partial L}{\partial q_k}\Big(q, h(q,p,t), t\Big) \overset{(9.9')}{=} -\frac{\partial H}{\partial q_k}(q,p,t).
\end{aligned}$$

Für die Umkehrrichtung ($\Leftarrow$) gehen wir vom Gleichungssystem (9.11) aus und benützen die involutive Eigenschaft der Legendre-Transformation: aus $H = \mathcal{L}L$ folgt $L = \mathcal{L}H$. Die Argumentation verläuft dann völlig analog zu oben.

Definition. Die Gleichungen (9.11) heißen *Hamiltonsche* oder *kanonische Gleichungen*; die Funktion H heißt *Hamilton-Funktion.*

Beispiel 1. Eine Lagrange-Funktion für das Teilchen im elektromagnetischen Feld ist bekanntlich

$$L(q,\dot{q},t) = \frac{m}{2}|\,\dot{q}\,|^2 + e\,\dot{q}\cdot A(q,t) - e\,\varphi(q,t),$$

siehe Gleichung (8.17) von Abschnitt 8.2. Der kanonische Impuls ist per Definition

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \langle m\dot{q}, \cdot\,\rangle + eA(q,t), \tag{9.13}$$

was sich vom mechanischen (oder kinematischen) Impuls $\langle m\dot{q}, \cdot\,\rangle$ des Teilchens um den Term $eA(q,t)$ unterscheidet! Durch Auflösen nach $\dot{q}$ erhalten wir $\langle \dot{q}, \cdot\,\rangle = \frac{1}{m}(p - eA)$. Damit ist die Legendre-Transformierte von L als Funktion von $\dot{q}$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
H(q,p,t) &= p\cdot\dot{q} - L(q,\dot{q},t) \\
&= \frac{1}{m}\langle p, (p-eA)\rangle - \frac{1}{2m}|\,p - eA|^2 - \frac{e}{m}\langle p - eA, A\rangle + e\,\varphi \\
&= \frac{1}{2m}\big|\,p - eA(q,t)\big|^2 + e\,\varphi(q,t).
\end{aligned} \tag{9.14}$$

Wie erwartet ist die Hamilton-Funktion auch hier wieder die Summe von kinetischer Energie $m|\dot{q}|^2/2$ und potentieller Energie $e\,\varphi$.

Beispiel 2. Nach einem Gesetz der geometrischen Optik ("Fermat'sches Prinzip") bewegt sich Licht vom Punkt a zum Punkt b in der kürzest möglichen Zeit, d.h. der Lichtstrahl minimiert das

Laufzeitfunktional $S = \int_a^b c^{-1} ds$, wobei $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ das Euklidische Längenelement und $c = c_0/n$ die Lichtgeschwindigkeit des optischen Mediums mit Brechungsindex n ist. Wenn wir annehmen, dass der Lichtweg in der xy-Ebene längs des Graphen einer Funktion $x \mapsto y(x)$ verläuft, können wir auch schreiben

$$S = \frac{1}{c_0} \int L\, dx \quad \text{mit} \quad L(y, y', x) = n(x, y)\sqrt{1 + y'^2}\,. \tag{9.15}$$

Die Funktion L lässt sich als Lagrange-Funktion eines Lagrange-Systems mit verallgemeinerter Ortskoordinate y, verallgemeinerter Geschwindigkeit $y' = dy/dx$ und "Zeitparameter" x auffassen. Der zugehörige kanonische Impuls ist dann

$$p = \frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{n y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = g(y')\,. \tag{9.16}$$

Die Umkehrfunktion hierzu lautet $y' = h(p) = p/\sqrt{n^2 - p^2}$, und die Hamilton-Funktion $H = py' - L$ ergibt sich zu

$$H(y, p, x) = -\sqrt{n^2(x, y) - p^2}\,. \tag{9.17}$$

Falls der Brechungsindex nicht von x abhängt, ist das System autonom und nach einem bekannten Resultat für autonome Hamiltonsche Systeme gilt der "Energiesatz",

$$-H = \sqrt{n^2(y) - p^2} =: n_0 = \text{const.} \tag{9.18}$$

Durch Einsetzen von $p = g(y')$ in den Energiesatz entsteht

$$n_0 = \sqrt{n^2(y) - p^2} = \frac{n(y)}{\sqrt{1 + y'^2}}\,. \tag{9.19}$$

Auflösen nach y' ergibt $y' = \pm\sqrt{(n/n_0)^2 - 1}$, und Trennung der Variablen liefert dann

$$\pm \int dx = n_0 \int \frac{dy}{\sqrt{n^2(y) - n_0^2}}\,, \tag{9.20}$$

womit das Problem der Berechnung der Lichtbahn auf eine Quadratur zurückgeführt ist.

Aufgabe. Berechne den Verlauf der Lichtbahn für den linearen Fall $n(y) = n_0\,(1 + y/a)$.

An dieser Stelle machen wir eine Bestandsaufnahme. Wir sind per Legendre-Transformation von der Lagrange-Funktion L zur Hamilton-Funktion H übergegangen, wobei die Geschwindigkeiten $\dot{q}$ durch die kanonischen Impulse p als unabhängige Variable ersetzt wurden. Aus den Euler-Lagrange-Gleichungen $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k}$ entstanden die Hamilton-Gleichungen $\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$, $\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$ $(k = 1, \ldots, f)$. Während es sich bei dem ersten Satz um ein System von f Differentialgleichungen zweiter Ordnung für $q(t)$ handelt, ist der zweite Satz ein System von $2f$ Differentialgleichungen erster Ordnung für $q(t)$ und $p(t)$. In der Lagrange-Formulierung spielen die Geschwindigkeiten $\dot{q}$ eine den verallgemeinerten Ortskoordinaten q untergeordnete Rolle: die Euler-Lagrange-Gleichungen sind lediglich unter Punkttransformationen $q \mapsto \varphi(q, t)$ forminvariant, und das Transformationsgesetz für $\dot{q}$ wird durch φ festgelegt. Durch den Übergang zur Hamiltonschen Formulierung werden die Impulse p den Ortskoordinaten q formal gleichgestellt. (In der Tat werden wir Hamiltonsche Systeme kennenlernen, wo eine Unterscheidung zwischen Orten und Impulsen global gar nicht möglich ist!) Dies führt u.a. zu einer Vergrößerung der Gruppe von Transformationen, welche die Bewegungsgleichungen forminvariant lassen, siehe Abschnitt 9.6.

9.3 Die Symplektische Gruppe Sp(2f)

Motivation. Zum Einstieg ins Thema betrachten wir die kanonischen Gleichungen eines Hamiltonschen Systems mit einem Freiheitsgrad ($f = 1$):

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}\,, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}\,.$$

In Matrixform geschrieben lauten diese Gleichungen

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial H/\partial q \\ \partial H/\partial p \end{pmatrix}.$$

Unser Augenmerk richtet sich jetzt auf die schiefsymmetrische Matrix

$$j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{9.21}$$

Sie bestimmt eine *schiefsymmetrische* Bilinearform J auf der Phasenebene $M = \mathbb{R}^2$ durch

$$J(u,v) = \begin{pmatrix} u_q & u_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_q \\ v_p \end{pmatrix} = u_q v_p - u_p v_q\,. \tag{9.22}$$

Diese Bilinearform ist zu vergleichen mit der *symmetrischen* Bilinearform

$$\langle u, v\rangle = \sum\nolimits_i u_i\, v_i$$

eines Euklidischen Skalarprodukts. Wie wir aus dem Kapitel über starre Körper wissen, ist die Invarianzgruppe im letzteren Fall die orthogonale Gruppe (oder Drehgruppe). In analoger Weise bringt uns die Forderung der Invarianz von J zur symplektischen Gruppe. Ein gewisses Verständnis dieser Gruppe ist notwendig für die weitere Entwicklung der Hamiltonschen Mechanik.

Symplektischer Vektorraum. Sei W ein reeller Vektorraum gerader Dimension, $\dim W = 2f$, und $\omega : W \times W \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \omega(x,y) = -\omega(y,x)$ eine schiefsymmetrische Bilinearform. Ist ω nichtentartet, so heißt das Paar (W,ω) ein symplektischer Vektorraum.

Beispiel. Das Hauptbeispiel für einen symplektischen Vektorraum ist die Summe $W = V \oplus V^*$ eines reellen Vektorraum $V \simeq \mathbb{R}^f$ mit seinem Dualraum V^*. Auf einem solchen Raum W definiert man $\omega :\ W \times W \to \mathbb{R}$ für $x_i = v_i + f_i \in V \oplus V^* = W$ durch

$$\omega(v_1 + f_1, v_2 + f_2) = f_2(v_1) - f_1(v_2), \tag{9.23}$$

mittels der kanonischen Paarung $V^* \otimes V \to \mathbb{R}$, $f \otimes v \mapsto f(v)$. Diese kanonische Bilinearform ω ist schiefsymmetrisch und nichtentartet.

Symplektische Gruppe. Sei (W,ω) ein symplektischer Vektorraum der Dimension $2f$. Die Gruppe aller linearen Abbildungen $S :\ W \to W$, die ω invariant lassen, also für alle $x, y \in W$ die Relation

$$\omega(Sx, Sy) = \omega(x,y) \tag{9.24}$$

erfüllen, heißt die symplektische Gruppe in $2f$ Dimensionen und wird mit $\mathrm{Sp}(W,\omega) \equiv \mathrm{Sp}(2f,\mathbb{R}) \equiv \mathrm{Sp}(2f)$ bezeichnet. Die Elemente von $\mathrm{Sp}(2f)$ heißen *symplektische Abbildungen.*

Matrixdarstellung. Sei nun $\{e_1, \ldots, e_{2f}\}$ eine Basis von W. Wie immer definieren wir die Matrix einer linearen Abbildung $S: W \to W$ durch

$$Se_i = \sum_j e_j \, S_{j\,i} \,. \tag{9.25}$$

Außerdem setzen wir $\omega_{ij} = \omega(e_i, e_j)$. Wir wollen nun sehen, welcher Bedingung die Matrix einer symplektischen Abbildung S unterliegt. Dazu entwickeln wir Se_i und Se_j nach der Basis $\{e_1, \ldots, e_{2f}\}$ wie in (9.25) und berechnen

$$\omega_{ij} = \omega(e_i, e_j) = \omega(Se_i, Se_j) = \sum_{kl} \omega(e_k, e_l) \, S_{ki} \, S_{lj} = \sum_{kl} S_{ki} \, \omega_{kl} \, S_{lj} \,.$$

Bezeichnet $\tilde{S}$ die Matrix von S und $\tilde{\omega}$ die Matrix von ω, so erhalten wir

$$\tilde{S}^t \tilde{\omega} \tilde{S} = \tilde{\omega} \,. \tag{9.26}$$

Beispiel. Betrachte den symplektischen Vektorraum (W, ω) mit $W = \mathbb{R}^2$ und $\tilde{\omega} = (\omega_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Eine reelle 2×2-Matrix $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist die Matrixdarstellung einer symplektischen Abbildung, wenn sie Gleichung (9.26) erfüllt. Wegen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix} = (ad - bc) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

übersetzt sich die Bedingung (9.24) an S in $ad - bc = 1$, d.h. $\mathrm{Sp}(2)$ besteht aus den linearen Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit Determinante Eins.

Volumenerhaltung. Wir zeigen jetzt, dass $\mathrm{Det} S = 1$ ganz allgemein für alle $S \in \mathrm{Sp}(2f)$ gilt. Dazu betrachten wir die mit dem äußeren Produkt $\wedge$ gebildete alternierende $2f$-lineare Form $\Omega := \omega \wedge \omega \wedge \cdots \wedge \omega$ (f Faktoren). Da Ω top-dimensional und somit eine Volumenform ist, gilt

(i) $\Omega(Sv_1, \ldots, Sv_{2f}) = \mathrm{Det} S \cdot \Omega(v_1, \ldots, v_{2f})$,

per Definition der Determinante. Da mit ω auch Ω unter $\mathrm{Sp}(2f)$ invariant ist, gilt andererseits

(ii) $\Omega(Sv_1, \ldots, Sv_{2f}) = \Omega(v_1, \ldots, v_{2f})$.

Aus der Kombination von (i) und (ii) folgt $\mathrm{Det} S = 1$. Wegen der Bedeutung von $\mathrm{Det} S$ als Volumenänderung können wir auch sagen, dass symplektische Abbildungen volumenerhaltend sind.

Reziprozität. Das charakteristische Polynom $\chi(\lambda) = \mathrm{Det}(\lambda - S)$ einer symplektischen Abbildung $S \in \mathrm{Sp}(2f)$ hat die Eigenschaft

$$\chi(\lambda) = \lambda^{2f} \chi(\lambda^{-1}). \tag{9.27}$$

Zum Beweis bringen wir die Gleichung (9.26) für die Matrixdarstellung $\tilde{S}$ von S in die Form $\tilde{S}^{-1} = \tilde{\omega}^{-1} \tilde{S}^t \tilde{\omega}$. Hiermit finden wir

$$\mathrm{Det}(\lambda - S^{-1}) = \mathrm{Det}(\lambda - \tilde{\omega}^{-1} \tilde{S}^t \tilde{\omega}) = \mathrm{Det}(\tilde{\omega}^{-1}) \mathrm{Det}(\lambda - \tilde{S}^t) \mathrm{Det}(\tilde{\omega}) = \mathrm{Det}(\lambda - S) = \chi(\lambda) \,,$$

wobei für das zweite Gleichheitszeichen die Multiplikativität der Determinante benutzt wurde. Andererseits gilt:

$$\mathrm{Det}(\lambda - S^{-1}) = \mathrm{Det}(S^{-1})\mathrm{Det}(\lambda S - 1) = (-\lambda)^{2f}\mathrm{Det}(\lambda^{-1} - S) = \lambda^{2f}\chi(\lambda^{-1}).$$

Durch Vergleich der beiden Ausdrücke für $\mathrm{Det}(\lambda - S^{-1})$ folgt die Behauptung (9.27).

Quadrupel. Wegen $\chi(0) = \mathrm{Det}(-S) = \mathrm{Det}S = 1$ folgt aus $\chi(\lambda) = \lambda^{2f}\chi(\lambda^{-1})$, dass mit λ auch λ^{-1} Nullstelle von χ und somit Eigenwert von S ist. Da darüber hinaus mit jeder komplexen Nullstelle λ des reellen Polynoms χ auch die komplex konjugierte Zahl $\bar\lambda$ eine Nullstelle von χ ist, treten die Eigenwerte symplektischer Abbildungen i.a. als Quadrupel $(\lambda, \lambda^{-1}, \bar\lambda, \bar\lambda^{-1})$ auf.

Beispiel. Die 2×2-Matrix J_T von Abschnitt 8.6 ist symplektisch. Aus Dimensionsgründen sind in diesem Beispiel ($f = 1$) nur zwei Fälle möglich:

(i) $\lambda = \bar\lambda$. Dann haben wir ein Paar von reellen Eigenwerten $(\lambda, \lambda^{-1}) = (\bar\lambda, \bar\lambda^{-1})$.

(ii) $\lambda = \bar\lambda^{-1}$ (oder $|\lambda|^2 = 1$). Dann haben wir ein Paar $(\lambda, \bar\lambda) = (\bar\lambda^{-1}, \lambda^{-1})$.

9.4 Hamiltonsche Systeme

Wir wollen jetzt die allgemeine Formulierung Hamiltonscher Systeme kennenlernen. Ein wichtiges Beispiel, dessen Behandlung diese Allgemeinheit erforderlich macht, ist der klassische Spin.

Definition. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $2f$ und ω eine 2-Form auf M. Ist ω geschlossen und nichtentartet, so heißt ω eine *symplektische Struktur* auf M, und das Paar (M, ω) heißt eine *symplektische Mannigfaltigkeit.*

Vorbereitung. Nun betrachten wir ein mechanisches System mit Ortskoordinaten $(q_1, \dots, q_f)$ und Impulskoordinaten $(p_1, \dots, p_f)$. Der Phasenraum sei $M = \mathbb{R}^f \times \mathbb{R}^f$, und wir erklären eine geschlossene nichtentartete 2-Form ω auf M durch $\omega = \sum_{k=1}^{f} dp_k \wedge dq_k$. Das Paar (M, ω) ist dann eine symplektische Mannigfaltigkeit. Weiter sei $H : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion und X_H das zugehörige Hamiltonsche Vektorfeld:

$$X_H = \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial p_k} \right). \tag{9.28}$$

Dieses Vektorfeld setzen wir jetzt in die zweite Position von ω ein:

$$\omega(\cdot\,, X_H) = \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k + \frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k \right) = dH. \tag{9.29}$$

Offenbar lässt sich die Beziehung zwischen H und X_H koordinatenfrei durch

$$\boxed{\omega(\cdot\,, X_H) = dH} \tag{9.30}$$

formulieren. Sind ω und H gegeben, und ist ω geschlossen und nichtentartet, so definieren wir X_H fortan durch Gleichung (9.30).

Eine Lösung γ der Bewegungsgleichungen eines Hamiltonschen Systems ist per Definition eine Integralkurve $\gamma: I \to M$ von X_H, d.h. es gilt $\dot{\gamma}(t) = X_H(\gamma(t))$ für $t \in I$. Diese Vorbetrachtungen motivieren die folgende Verallgemeinerung der Definition Hamiltonscher Systeme.

Definition. Ein *Hamiltonsches System* ist ein Tripel (M, ω, H). Hierbei ist (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit — nämlich der mit einer geschlossenen nichtentarteten 2-Form ω versehene Phasenraum M — und $H: M \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, die Hamilton-Funktion. Die Bewegungsgleichungen eines solchen Systems sind die Hamiltonschen Gleichungen

$$\boxed{\dot{x} = X_H(x)}, \tag{9.31}$$

wobei das Hamiltonsche Vektorfeld X_H durch Gleichung (9.30) bestimmt ist.

Bemerkung. Diese Definition lässt sich auf nichtautonome Systeme ausdehnen. Die Hamilton-Funktion ist dann eine Funktion $H: M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $X_H: M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2f}$ wird wieder durch Gleichung (9.30) bestimmt, wobei allerdings jetzt dH nicht das totale Differential ist, sondern $dH := \sum_{i=1}^{2f} (\partial H / \partial x^i)\, dx_i$. Es fehlt also der Term $(\partial H / \partial t)\, dt$. Die Bewegungsgleichungen sind wieder $\dot{x} = X_H(x, t)$.

9.4.1 Der klassische Spin

In der Quantenmechanik lernt man, dass Elementarteilchen wie z.B. das Elektron eine intrinsische Eigenschaft besitzen, den sogenannten “Spin”, welcher sich unter der Galilei-Gruppe wie ein (Bahn-)Drehimpuls transformiert. Wir erinnern daran, dass in Abschnitt 2.2 (KTP1) der Drehimpuls als schiefsymmetrische lineare Abbildung

$$\ell = -\ell^T : \quad V \to V \tag{9.32}$$

des Euklidischen Vektorraums $V \simeq \mathbb{R}^3$ eingeführt worden war.

Modellierung. Ohne in darstellungstheoretische Feinheiten einzusteigen [eigentlich ist in der Quantentheorie von Spin-Freiheitsgraden die Drehgruppe SO(3) durch ihre doppelte Überlagerung, Spin(3) $\cong$ SU(2), zu ersetzen], modellieren wir den Spin in klassischer Vorstellung als schiefsymmetrische lineare Abbildung $\sigma = -\sigma^T: V \to V$ in Analogie zum Bahndrehimpuls. Zusätzlich verlangen wir, dass σ die Eigenschaft eines Generators (siehe Abschnitt 2.1, KTP1) hat, also

$$\sigma^2 = -\Pi, \tag{9.33}$$

mit Π dem Projektor auf eine variable Ebene in $V \simeq \mathbb{R}^3$. Für die Spur folgt $\mathrm{Tr}\, \sigma^2 = -\mathrm{Tr}\, \Pi = -2$. Umgekehrt folgt aus $\sigma = -\sigma^T$ und $\mathrm{Tr}\, \sigma^2 = -2$ die Generatorbedingung $\sigma^2 = -\Pi$ (siehe hierzu Abschnitt 2.1.1, KTP1). Die Bewegungsgleichung für einen Spin σ im Magnetfeld B lautet

$$\dot{\sigma} = \mu\, [\sigma, B], \tag{9.34}$$

wobei die magnetische Feldstärke $B = \sum_{i>j} B_{ij}\, dx_i \wedge dx_j$ (unter Verwendung des Euklidischen Skalarprodukts) als schiefsymmetrische lineare Abbildung $B = \sum_{i>j} B_{ij}\, J_{ij}$ aufgefasst wird, und die Klammer $[\sigma, B]$ der Kommutator von Abbildungen ist. Die Konstante μ heißt das "gyromagnetische Verhältnis"; sie hat die physikalische Dimension von Ladung pro Masse. Aus (9.34) schließt man durch die folgende kurze Rechnung,

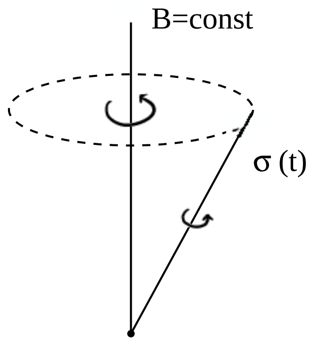
$$\frac{d}{dt}\mathrm{Tr}\,\sigma^2 = 2\mathrm{Tr}(\sigma\dot{\sigma}) = 2\mu\mathrm{Tr}(\sigma[\sigma, B]) = 2\mu\mathrm{Tr}(B[\sigma, \sigma]) = 0,$$

dass $\mathrm{Tr}\,\sigma^2 = -2$ erhalten und somit die Einschränkung $\sigma^2 = -\Pi$ mit der Dynamik verträglich ist.

Larmor-Präzession. Wir betrachten nun die spezielle Situation, dass $B = |B|J_3$ nicht von der Zeit abhängt. (Wie zuvor kürzen wir ab: $J_{21} \equiv J_3$, $J_{32} \equiv J_1$, $J_{13} = J_2$; siehe Gleichung (2.78) von Abschnitt 2.5.) In diesem Fall lauten die Bewegungsgleichungen (9.34) für $\sigma = \sum \sigma_i J_i$ in Komponentenschreibweise

$$\dot{\sigma}_1 = \omega_L \sigma_2\,, \quad \dot{\sigma}_2 = -\omega_L \sigma_1\,, \quad \dot{\sigma}_3 = 0, \tag{9.35}$$

mit $\omega_L \equiv \mu|B|$. Dieses System kennen wir bereits vom kräftefreien symmetrischen Kreisel. Seine allgemeine Lösung ist eine reguläre Präzession um die 3-Achse mit Winkelgeschwindigkeit ω_L . Im Falle des Spins nennt man diese Präzession *Larmor-Präzession*, und ω_L heißt *Larmor-Frequenz.*



Bemerkung. Durch die Verwendung des Isomorphismus $\mathbb{R}^3 \simeq \mathfrak{so}(3)$ von Abschnitt 2.1.1, Aufgabe (2.26), lassen sich σ und B als axiale Vektoren $\vec{\sigma}$ und $\vec{B}$ auffassen. Unter diesem Isomorphismus geht das Kommutatorprodukt $[\sigma, B]$ in das Vektorprodukt $\vec{\sigma} \times \vec{B}$ über. Die lineare Differentialgleichung $\frac{d}{dt}\vec{\sigma} = \mu\,\vec{\sigma} \times \vec{B}$ können wir als dynamisches System in $\mathbb{R}^3$ auffassen. Allerdings sprengt der klassische Spin bei dieser Sichtweise den Rahmen des Hamilton-Formalismus (wegen der ungeraden Dimension von $\mathbb{R}^3$). Im Folgenden ist es unser Ziel, den klassischen Spin im Magnetfeld als Hamiltonsches System (M, ω, H) zu beschreiben.

Phasenraum. Den obigen Ausführungen gemäß wählen wir den zweidimensionalen Raum

$$M := \{\sigma \in \mathfrak{so}(3) \mid \sigma^2 = -\Pi\}, \quad \mathfrak{so}(3) = \{X \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3) \mid X = -X^T\}, \tag{9.36}$$

als Phasenraum für den klassischen Spin. Durch Differenzieren von $\mathrm{Tr}\,\sigma^2 = -2$ längs einer Kurve in M erhält man $\mathrm{Tr}(\sigma\dot{\sigma}) = 0$. Der Tangentialraum zu einem Punkt $\sigma \in M$ ist daher

$$T_\sigma M = \{X \in \mathfrak{so}(3) \mid \mathrm{Tr}(\sigma X) = 0\}. \tag{9.37}$$

Auf $T_\sigma M$ hat man die Bilinearform

$$\omega_\sigma : \; T_\sigma M \times T_\sigma M \to \mathbb{R}, \quad (X, Y) \to \mathrm{Tr}(\sigma[X, Y]), \tag{9.38}$$

die wegen $[X, Y] = -[Y, X]$ schiefsymmetrisch ist.

Aufgabe. (i) Es existiert eine Bijektion $M \to \mathrm{S}^2$ (2-Sphäre). (ii) Der Tangentialraum $T_\sigma M$ hat die alternative Charakterisierung

$$T_\sigma M = \{X \in \mathfrak{so}(3) \mid X = [\sigma, Y] \text{ für ein } Y \in \mathfrak{so}(3)\}. \tag{9.39}$$

(iii) Die lineare Abbildung $\mathrm{ad}(\sigma):\ T_\sigma M \to T_\sigma M,\ X \mapsto [\sigma, X]$ ist bijektiv, und es gilt $\mathrm{ad}^2(\sigma) = -\mathrm{Id}$, also $[\sigma, [\sigma, X]] = -X$. (iv) Die Bilinearform $\omega_\sigma:\ T_\sigma M \times T_\sigma M \to \mathbb{R}$ ist nichtentartet.

Hamiltonsches System. Die Zuordnung $\sigma \mapsto \omega_\sigma$ definiert eine 2-Form ω auf M. Aus simplen Dimensionsgründen ($\dim M = 2$) ist ω geschlossen. Nach Aufgabe (iv) ist ω außerdem nichtentartet und somit eine symplektische Struktur auf M. Als Hamilton-Funktion nehmen wir

$$H:\ M \to \mathbb{R}, \quad \sigma \mapsto \mu \mathrm{Tr}(\sigma B). \tag{9.40}$$

Bewegungsgleichung. Wir zeigen jetzt, dass (9.34) die durch das Hamiltonsche System (M, ω, H) bestimmte kanonische Gleichung ist. Dazu benützen wir, dass $t \mapsto \gamma(t) = \mathrm{e}^{-tY}\sigma\, \mathrm{e}^{tY}$ für $Y \in T_\sigma M$ eine Kurve in M durch $\gamma(0) = \sigma$ mit Tangentialvektor $\dot\gamma(0) = [\sigma, Y] \equiv X$ ist. Es folgt

$$(dH)_\sigma(X) = \frac{d}{dt} H\big(\gamma(t)\big)\Big|_{t=0} = \mu \frac{d}{dt} \mathrm{Tr}\left(\mathrm{e}^{-tY}\sigma\, \mathrm{e}^{tY} B\right)\Big|_{t=0} = \mu \mathrm{Tr}(XB).$$

Nun gilt $\mathrm{Tr}(XB) = -\mathrm{Tr}(B[\sigma, [\sigma, X]]) = \mathrm{Tr}([\sigma, B][\sigma, X])$ für $X \in T_\sigma M$. Hiermit liefert die Bestimmungsgleichung (9.30) die Beziehung

$$\mu \mathrm{Tr}([\sigma, B][\sigma, X]) = (dH)_\sigma(X) = \omega_\sigma(X, \dot\sigma) = \mathrm{Tr}(\sigma[X, \dot\sigma]) = \mathrm{Tr}(\dot\sigma[\sigma, X]).$$

Da $\mathrm{ad}(\sigma):\ T_\sigma M \to T_\sigma M$, $X \mapsto [\sigma, X]$ surjektiv ist, folgt durch Koeffizientenvergleich $\dot\sigma = \mu[\sigma, B]$, also die Behauptung.

9.4.2 Satz von Darboux

Der klassische Spin ist unser Parade-Beispiel für ein System, das sich *nicht global in q und p zerlegen lässt.* (Anders ausgedrückt: $M = \mathrm{S}^2$ ist topologisch verschieden von $M = \mathbb{R}^2$.) In Abwesenheit einer solchen Zerlegung existiert auch keine globale Zerlegung in Ortskoordinate q und Geschwindigkeit $\dot q$. Es gibt daher keine Lagrange-Funktion für den klassischen Spin, jedenfalls nicht im Sinne von Kapitel 8. Die oben angegebene Verallgemeinerung der Definition Hamiltonscher Systeme ist also nicht nur eine schöne Verzierung der theoretischen Physik, sondern in diesem Fall wirklich notwendig. Andererseits ist die *lokale Existenz* einer Zerlegung in q und p durch den folgenden Satz gesichert. (Den Beweis findet man im Buch von Arnold.)

Satz (Darboux). Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit der Dimension $2f$. Dann existieren zu jedem Punkt $x \in M$ eine offene Umgebung $N_x \subset M$ und Funktionen $q_1, \ldots, q_f, p_1, \ldots, p_f :$ $N_x \to \mathbb{R}$, so dass die symplektische Struktur ω auf N_x die kanonische Form $\omega = \sum_{k=1}^{f} \mathrm{d}p_k \wedge \mathrm{d}q_k$ annimmt.

Beispiel: Betrachte die zweidimensionale Sphäre $M = S^2$ mit der negativen Raumwinkelform $\omega = -\sin\theta\, d\theta \wedge d\phi$ als symplektische Struktur. Auf der am Südpol P $(\theta = \pi)$ gelochten Sphäre $S^2 \setminus \{P\}$ können wir kanonische Koordinaten q, p einführen, z.B. durch die Koordinatentransformation

$$\tan\phi = \frac{p}{q}, \quad \cos\theta = 1 - \frac{1}{2}(q^2 + p^2), \tag{9.41}$$

oder umgekehrt

$$q = 2\sin(\theta/2)\cos\phi, \quad p = 2\sin(\theta/2)\sin\phi\,. \tag{9.42}$$

Wie man leicht nachrechnet, nimmt $\omega = -\sin\theta\, d\theta \wedge d\phi$ unter diesem Koordinatenwechsel die kanonische Form $\omega = dp \wedge dq$ an. Jedoch sind die lokalen Koordinatenfunktionen q, p auf S^2 nicht global definiert, denn sie bilden den Rand von $S^2 \setminus \{P\}$ auf die Kreislinie $q^2 + p^2 = 4$ (anstelle eines einzigen Punkts) ab.

Aufgabe. Die Raumwinkelform $\omega = -\sin\theta\, d\theta \wedge d\phi$ lässt sich mit der symplektischen Struktur des klassischen Spins (Abschnitt 9.4.1) identifizieren.

9.5 Kanonische Transformationen

In der Einleitung zu diesem Kapitel wurde schon vorweggenommen, dass der Übergang zur Hamiltonschen Mechanik u.a. den wichtigen Vorteil hat, eine große Freiheit in der Wahl von Koordinatensystemen zu lassen, in denen die Bewegungsgleichungen kanonische Gestalt haben. Die Untersuchung dieser Freiheit führt auf den Begriff der kanonischen Transformation.

Normalform. Wie man aus einer Rechnung vom Beginn des Abschnitts 9.4 erkennt, nehmen die Bewegungsgleichungen eines Hamiltonschen Systems genau dann die Form der kanonischen Gleichungen an, wenn die Phasenraum-Koordinaten $(q_1, \ldots, q_f; p_1, \ldots, p_f)$ so gewählt sind, dass die symplektische Struktur ω Normalgestalt hat:

$$\omega = \sum_{k=1}^{f} dp_k \wedge dq_k\,. \tag{9.43}$$

Dann ist nämlich $\omega(\cdot\,, X_H) = \sum_{k=1}^{f}(X_{H,q_k} dp_k - X_{H,p_k} dq_k)$, und durch Gleichsetzen mit dH folgt: $X_{H,q_k} = \partial H/\partial p_k\,,\ X_{H,p_k} = -\partial H/\partial q_k\,.$

Koordinatenwechsel. Ist nun ein Diffeomorphismus $\psi :\ M \to M$ gegeben, so können wir durch die Verkettung mit ψ neue Koordinatenfunktionen $Q_1, ..., Q_f; P_1, ..., P_f$ bilden:

$$Q_k = q_k \circ \psi, \quad P_k = p_k \circ \psi \qquad (k = 1, ..., f). \tag{9.44}$$

Wir fragen dann, unter welchen Bedingungen die Bewegungsgleichungen des Hamiltonschen Systems in den neuen Koordinatenfunktionen immer noch die kanonische Form

$$\dot{Q}_k = \frac{\partial H}{\partial P_k}, \quad \dot{P}_k = -\frac{\partial H}{\partial Q_k} \qquad (k = 1, ..., f) \tag{9.45}$$

haben. Nach dem eben Gesagten lautet die Antwort, dass dies genau dann der Fall sein wird, wenn die symplektische Struktur unter der Koordinatentransformation ihre Normalgestalt behält, d.h. wenn gilt $\omega = \sum_{k=1}^{f} dP_k \wedge dQ_k$. Hieraus resultiert folgende Bedingung an die Abbildung ψ:

$$\omega = \sum_{k=1}^{f} dP_k \wedge dQ_k = \sum_{k=1}^{f} d(p_k \circ \psi) \wedge d(q_k \circ \psi) = \psi^* \left(\sum_{k=1}^{f} dp_k \wedge dq_k \right) = \psi^* \omega, \tag{9.46}$$

also $\omega = \psi^* \omega$, wobei $\psi^* \omega$ die mit der Abbildung ψ zurückgeholte Differentialform bezeichnet.

Definition. Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit. Eine differenzierbare Abbildung $\psi : M \to M$ heißt eine *kanonische Transformation,* wenn sie ω invariant lässt: $\psi^* \omega = \omega$.

Bemerkungen. **(i)** Das Fazit der obigen Diskussion lautet hiermit: die kanonischen Gleichungen sind forminvariant unter kanonischen Transformationen. **(ii)** Die kanonischen Transformationen bilden eine Gruppe. **(iii)** Punkttransformationen, d.h. Abbildungen des Ortsraums auf sich, sind kanonisch (genauer: lassen sich zu kanonischen Transformationen erweitern).

Beispiel. Betrachte nochmals den klassischen Spin: $M = \mathrm{S}^2$ (Einheitssphäre im $\mathbb{R}^3$), $-\omega =$ Raumwinkelform auf S^2. Die Drehgruppe SO(3) operiert auf dem Euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^3$, und da S^2 ein invarianter Unterraum jeder Drehung ist, operiert SO(3) natürlich auch auf S^2. Es ist anschaulich klar und lässt sich rechnerisch problemlos nachweisen, dass ω unter Drehungen invariant ist. Folglich ist für dieses Beispiel jedes Gruppenelement $R : \mathrm{S}^2 \to \mathrm{S}^2$, $R \in \mathrm{SO}(3)$, eine kanonische Transformation.

Kriterium für $M = \mathbb{R}^{2f}$. Wir spezialieren jetzt zu $M = \mathbb{R}^{2f}$ in der einfachen Situation, dass ω global in der Form $\omega = \sum_{k=1}^{f} dp_k \wedge dq_k$ dargestellt werden kann. In diesem Fall ist eine differenzierbare Abbildung $\psi : \mathbb{R}^{2f} \to \mathbb{R}^{2f}$ genau dann eine kanonische Transformation, wenn $D_x\psi : \mathbb{R}^{2f} \to \mathbb{R}^{2f}$ für alle $x \in \mathbb{R}^{2f}$ symplektisch ist.

Beweis. Wir holen ω vorschriftsmäßig mit ψ^* zurück:

$$\big(\psi^* \omega\big)_x (u, v) = \omega_{\psi(x)} \big(D_x\psi(u), D_x\psi(v)\big). \tag{9.47}$$

Unter der angegebenen Voraussetzung an (M, ω) können die Tangentialräume $T_xM$in allen Punkten $x \in M$ mit $M = \mathbb{R}^{2f}$ identifiziert werden, und es gilt

$$\omega_{\psi(x)} = \omega_x = \sum_{k=1}^{f} dp_k \wedge dq_k =: \omega_0 \,, \tag{9.48}$$

unabhängig von x und ψ. Daher ist die Bedingung $\psi^* \omega = \omega$ äquivalent zu

$$\omega_0(u, v) = \omega_0\big(D_x\psi(u), D_x\psi(v)\big) \tag{9.49}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^{2f}$. Die Bedingung (9.49) ist aber mit Gleichung (9.24) identisch und somit gleichbedeutend mit der Bedingung $D_x\psi \in \mathrm{Sp}(2f)$ für alle $x \in \mathbb{R}^{2f}$.

Bemerkung. Die vorstehende Aussage Satz macht klar, warum die symplektische Gruppe $\mathrm{Sp}(2f)$ für die Hamiltonsche Mechanik so wichtig ist und in einem gesonderten Abschnitt 9.3 vorab eingeführt wurde.

Beispiele. Betrachte $(M,\omega) = (\mathbb{R}^2, dp \wedge dq)$ und hier den Spezialfall einer **linearen** Transformation $S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $D_x S = S$. Wir wissen aus Abschnitt 9.3, dass Sp(2) aus den linearen Abbildungen $S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\mathrm{Det} S = 1$ besteht. Die nachstehenden linearen Transformationen haben Determinante Eins und sind folglich kanonisch:

(a) $q \circ S = q\cos\alpha + p\sin\alpha$ und $p \circ S = -q\sin\alpha + p\cos\alpha$
("elliptische Rotation" in der qp-Ebene).

(b) $q \circ S = q\cosh\beta + p\sinh\beta$ und $p \circ S = q\sinh\beta + p\cosh\beta$
("hyperbolische Rotation").

(c) $q \circ S = q\mathrm{e}^{\gamma}$ und $p \circ S = p\,\mathrm{e}^{-\gamma}$
(dieses letzte Beispiel ist eine erweiterte Punkttransformation).

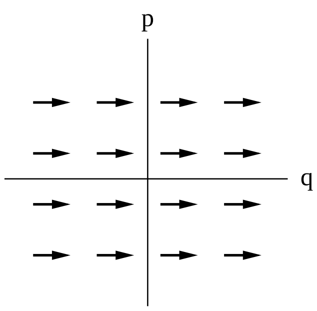
9.6 Hamiltonsche Flüsse

Die aus Abschnitt 1.7 bekannten Begriffe von Hamiltonschem Vektorfeld und Fluss werden jetzt wie folgt präzisiert. Sei (M,ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit und X ein differenzierbares Vektorfeld, dessen Fluss auf ganz $M \times \mathbb{R}$ definiert ist. Dann heißt X *lokal Hamiltonsch* (*global Hamiltonsch*), falls die 1-Form $\omega(\cdot\,, X)$ geschlossen (bzw. exakt) ist. Entsprechend heißt der Fluss eines lokal (global) Hamiltonschen Vektorfeldes lokal (bzw. global) Hamiltonsch. Nach einem Standardresultat (Poincaré-Lemma) existiert zu einem lokal Hamiltonschen Vektorfeld X lokal eine Funktion H, so dass gilt: $\omega(\cdot\,, X) = dH$.

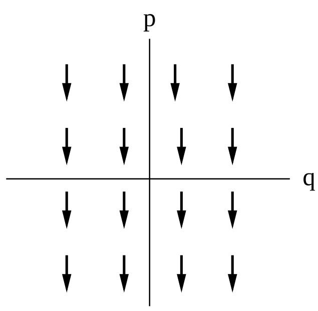
Symplektischer Gradient. Nach der soeben gegebenen Definition bestimmt die symplektische Struktur ω einen Isomorphismus zwischen lokal Hamiltonschen Vektorfeldern und geschlossenen 1-Formen. Da dieser Isomorphismus im Folgenden häufig benutzt wird, ist es zweckmäßig, hierfür ein eigenes Symbol einzuführen. Wir schreiben

$$\boxed{X = I\alpha}\,, \quad \text{falls} \quad \omega(\cdot\,, X) = \alpha\,. \tag{9.50}$$

Ein analoger Isomorphismus, $\mathcal{I}$, existiert in Euklidischen Vektorräumen: $\mathcal{X} = \mathcal{I}\alpha \Leftrightarrow \langle \cdot\,, \mathcal{X}\rangle = \alpha$, womit man den Gradienten einer Funktion f durch $\mathrm{grad} f := \mathcal{I}(d\,f)$ erklärt. In Anlehnung an diese Nomenklatur nennen wir $X = I(d\,f)$ manchmal den *symplektischen Gradienten* von f.



das Hamiltonsche Vektorfeld Idp



das Hamiltonsche Vektorfeld Idq

Beispiel. Wir berechnen für $(M,\omega) = (\mathbb{R}^2, dp \wedge dq)$ den symplektischen Gradienten der Koordinatenfunktion des Impulses, $f = p$. Dazu setzen wir den Ansatz $I(dp) =: X_q\,\partial_q + X_p\,\partial_p$ in ω ein und erhalten $dp = \omega(\cdot\,, I(dp)) = X_q\, dp - X_p\, dq$, woraus folgt, dass $I(dp)$ die Komponenten $X_q = 1$ und $X_p = 0$ hat, also $I(dp) = \partial_q$. Eine analoge Rechnung liefert $I(dq) = -\partial_p$.

Definition. Sei $(g^s)_{s\in\mathbb{R}}$ eine Schar von Diffeomorphismen: $M \to M$. Wir nennen diese Schar eine *Einparametergruppe von kanonischen Transformationen* von (M,ω), wenn gilt:

(i) $g^0 = \mathrm{Id}$;

(ii) $g^{s+t} = g^s \circ g^t = g^t \circ g^s \quad (s,t \in \mathbb{R})$;

(iii) g^s ist kanonisch für alle $s \in \mathbb{R}$.

Wir stellen nun die besondere Rolle Hamiltonscher Flüsse in der kanonischen Mechanik heraus: sie lassen die symplektische Struktur des Phasenraums invariant.

Satz. Es besteht eine 1:1-Zuordnung zwischen den lokal Hamiltonschen Flüssen und den Einparametergruppen von kanonischen Transformationen einer symplektischen Mannigfaltigkeit (M,ω).

Bemerkung. "Lokal" ist hier wesentlich, wie ein elementares Beispiel unten zeigen wird.

Beweis. Wir erinnern an die Definition der Lie-Ableitung (siehe Abschnitt 7.3): ist $\phi:\ M\times\mathbb{R} \to M,\ (x,s) \mapsto \phi_s(x)$, der durch ein Vektorfeld X auf M bestimmte Fluss, so haben wir

$$\frac{d}{ds}\phi_s^*\,\omega\bigg|_{s=0} = \mathcal{L}_X\,\omega. \tag{9.51}$$

Außerdem gilt die Cartan-Formel $\mathcal{L}_X = \iota(X)\circ d + d\circ\iota(X)$.

1. ($\Rightarrow$) Sei also ϕ der Fluss eines lokal Hamiltonschen Vektorfelds X. Per Definition ist dann $\omega(\cdot\,, X)$ geschlossen, also

   $$d\big(\omega(X,\cdot\,)\big) = -d\big(\omega(\cdot\,, X)\big) = 0.$$

   Da ω geschlossen ist ($d\omega = 0$) folgt $\mathcal{L}_X\omega = 0$ als Konsequenz der Cartan-Formel für $\mathcal{L}_X$. Die Abbildungen $(\phi_s)_{s\in\mathbb{R}}$ sind global definiert und bilden daher eine Einparametergruppe: $\phi_0 = \mathrm{Id}$, $\phi_{s+t} = \phi_s\circ\phi_t = \phi_t\circ\phi_s$. Mit Gleichung (9.51) folgt deshalb

   $$\frac{d}{dt}\phi_t^*\,\omega = \frac{d}{ds}\phi_{s+t}^*\,\omega\bigg|_{s=0} = \phi_t^*\left(\frac{d}{ds}\phi_s^*\,\omega\bigg|_{s=0}\right) = \phi^*\mathcal{L}_X\,\omega = 0$$

   für alle $t\in\mathbb{R}$. Folglich ist $\phi_t = g^t$ eine kanonische Transformation:

   $$\phi_t^*\,\omega = \phi_0^*\,\omega = \mathrm{Id}^*\omega = \omega.$$

2. ($\Leftarrow$) Ausgehend von einer Einparametergruppe kanonischer Transformationen g^s bilden wir das Vektorfeld $X := \frac{d}{ds}g^s\big|_{s=0}$. Durch Umkehren der obigen Schlussweise zeigen wir, dass das so definierte X lokal Hamiltonsch ist.

Beispiel 1. Betrachte für $(M,\omega) = (\mathbb{R}^2, dp\wedge dq)$ die Einparametergruppe von kanonischen Transformationen

$$q\circ g^s = q\,\mathrm{e}^s \quad \text{und} \quad p\circ g^s = p\,\mathrm{e}^{-s}. \tag{9.52}$$

$(g^s)_{s\in\mathbb{R}}$ wird erzeugt durch das Vektorfeld

$$X = \frac{d}{ds} g^s \bigg|_{s=0} = q\,\partial_q - p\,\partial_p\,. \tag{9.53}$$

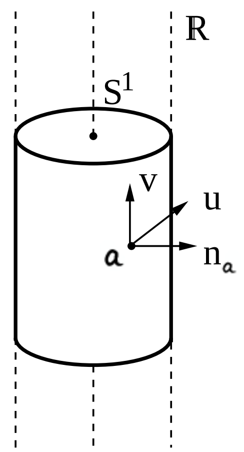
Mit $\omega(\cdot\,, X) = q\,dp + p\,dq$ finden wir, im Einklang mit dem obigen Satz,

$$d\big(\omega(\cdot\,, X)\big) = d(q\,dp + p\,dq) = dq \wedge dp + dp \wedge dq = 0. \tag{9.54}$$

Die Hamilton-Funktion ist hier $H = p\,q$, denn $\omega(\cdot\,, X) = q\,dp + p\,dq = d(p\,q)$.

Bemerkung. Das Vektorfeld X von Beispiel 1 ist global Hamiltonsch, d.h. die Hamilton-Funktion $H = p\,q$ ist auf der ganzen Phasenebene $\mathbb{R}^2$ definiert. (Dies muss in einfach zusammenhängenden Phasenräumen wie dem $\mathbb{R}^2$ immer so sein, weil in diesem Fall jede geschlossene 1-Form nach dem Poincaré-Lemma exakt ist, d.h. ein global definiertes Potential besitzt. Die Unterscheidung zwischen "lokal" und "global" Hamiltonisch ist nur für Systeme mit nicht einfach zusammenhängendem Phasenraum notwendig; siehe das nächste Beispiel).

Beispiel 2. Wir betrachten den Phasenraum des ebenen mathematischen Pendels, nämlich den Zylinder $M = \mathrm{S}^1 \times \mathbb{R}$. Zur Konstruktion einer geeigneten symplektischen Struktur ω betten wir M auf die natürliche Weise in den Euklidischen $\mathbb{R}^3$ ein (siehe Figur).



Sind u und v zwei zu M tangentiale Vektoren im Punkt $a \in M$, und ist n_a der nach außen gerichtete Normalenvektor ($|n_a| = 1$), so definieren wir:

$$\omega_a(v, u) := \langle n_a, u \times v\rangle \qquad \text{(Spatprodukt)}. \tag{9.55}$$

Diese symplektische Struktur bleibt offensichtlich ungeändert, wenn wir den Zylinder längs seiner Symmetrieachse verschieben oder um seine Symmetrieachse drehen.

Wir koordinatisieren M durch einen Winkel q ($0 < q < 2\pi$), nämlich der Auslenkung des Pendels relativ zu einer festen Achse, und durch den kanonischen Impuls des Pendels: $p = \partial L / \partial \dot q$ für $L = \frac{1}{2} m l^2 \dot q^2 - U(q)$. In solchen lokalen Koordinaten gilt:

$$\omega = dp \wedge dq.$$

Mit diesen Vorbereitungen sei nun $g^s :\ M \to M$ eine Translation des Zylinders um die Strecke s längs seiner Symmetrieachse. In Formeln: $q \circ g^s = q$ und $p \circ g^s = p + s$. Da eine solche Translation

ω invariant lässt, ist $(g^s)_{s\in\mathbb{R}}$ eine Einparametergruppe von kanonischen Transformationen. Die Einparametergruppe $(g^s)_{s\in\mathbb{R}}$ wird durch das Vektorfeld X,

$$X = \frac{d}{ds} g^s \Big|_{s=0} = \partial_p \,, \tag{9.56}$$

erzeugt. Dieses Vektorfeld ist zwar lokal Hamiltonsch:

$$\omega(\cdot\,, \partial_p) = -d\,q \quad \text{ist geschlossen}\,, \tag{9.57}$$

nicht aber global Hamiltonsch, denn die Koordinatenfunktion $q: \; M \to [0, 2\pi)$ ist als stetige Funktion nicht global auf M definiert, sondern hat eine Unstetigkeit in $q^{-1}(0)$.

9.7 Symmetrien und Erhaltungssätze

Die Nützlichkeit von Erhaltungssätzen bei der Lösung mechanischer Probleme ist in den Kapiteln über Newtonsche Mechanik und starre Körper hinreichend deutlich geworden: die Lösung der Bewegungsgleichungen für autonome Hamiltonsche Systeme mit einem Freiheitsgrad wird durch den Energiesatz auf eine Quadratur zurückgeführt. Es lässt sich zeigen, dass dies ein allgemeiner Sachverhalt ist: Hamiltonsche Systeme mit f Freiheitsgraden sind durch Quadratur lösbar, wenn f (unabhängige) Erhaltungssätze existieren. Das Aufspüren von Erhaltungssätzen ist daher ein vorrangiges Ziel des Mechanikers. Hierbei hilft uns das Noether-Theorem, das wir nun in der Hamiltonsche Mechanik autonomer Systeme formulieren.

Erste Integrale. Gegeben sei das Hamiltonsche System (M, ω, H). Der Phasenfluss sei hier mit $\phi^H : \; M \times \mathbb{R} \to M$, $(x, t) \mapsto \phi^H_t(x)$ bezeichnet, und wir wollen (der Bequemlichkeit halber) annehmen, dass er auf dem ganzen erweiterten Phasenraum erklärt sei. Wir nennen eine Funktion $f: \; M \to \mathbb{R}$ ein *erstes Integral* des Hamiltonschen Systems, wenn für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt: $f \circ \phi^H_t = f$. Da es sich bei $(\phi^H_t)_{t\in\mathbb{R}}$ um eine Einparametergruppe von Diffeomorphismen handelt, ist diese Bedingung äquivalent zu

$$\frac{d}{dt} f \circ \phi^H_t \Big|_{t=0} = 0. \tag{9.58}$$

Sind $X_H := I(dH)$ und $X_f := I(d\,f)$ die symplektischen Gradienten von H bzw. f, so gilt:

$$\frac{d}{dt} f \circ \phi^H_t \Big|_{t=0} = \mathcal{L}_{X_H} f = (d\,f)(X_H) = \omega(X_H, X_f). \tag{9.59}$$

Insbesondere folgt sofort, dass die Energie eines autonomen Hamiltonschen Systems erhalten ist:

$$\frac{d}{dt} H \circ \phi^H_t \Big|_{t=0} = \omega(X_H, X_H) = 0. \tag{9.60}$$

Bemerkung: Dies ist die koordinatenfreie Verallgemeinerung eines Arguments von Abschn. 1.6.3.

Zweimal Hamiltonsch. Es sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit. Darauf seien zwei Funktionen $f, g: \; M \to \mathbb{R}$ gegeben — wir haben jetzt also zwei "Hamiltonsche" Systeme (M, ω, f)

und (M, ω, g) und zwei global Hamiltonsche Flüsse ϕ^f, ϕ^g zu den global Hamiltonschen Vektorfeldern $X_f := I(d\,f)$ und $X_g := I(d\,g)$. Dann gilt die Gleichheit

$$\frac{d}{ds}\, g \circ \phi_s^f \bigg|_{s=0} = -\frac{d}{dt}\, f \circ \phi_t^g \bigg|_{t=0}, \tag{9.61}$$

denn nach Gleichung (9.59) ist $\frac{d}{dt} f \circ \phi_t^g \big|_{t=0} = \omega(X_g, X_f)$ und $\frac{d}{ds} g \circ \phi_s^f \big|_{s=0} = \omega(X_f, X_g)$, und mit $\omega(X,Y) = -\omega(Y,X)$ folgt die Aussage.

Definition. Sei $\phi:\ M \times \mathbb{R} \to M$, $(x,s) \mapsto \phi_s(x)$, der Fluss eines global Hamiltonschen Vektorfeldes auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit (M, ω). Dann heißt $(\phi_s)_{s\in\mathbb{R}}$ eine Einparametergruppe von *Symmetrie-Transformationen* des Hamiltonschen Systems mit Hamilton-Funktion $H:\ M \to \mathbb{R}$, wenn H unter $(\phi_s)_{s\in\mathbb{R}}$ invariant ist, d.h.

$$H \circ \phi_s = H \quad \text{für alle} \ \ s \in \mathbb{R}. \tag{9.62}$$

Noether-Theorem:

> Zu jeder Einparametergruppe von Symmetrie-Transformationen eines autonomen Hamiltonschen Systems gehört ein Erhaltungssatz, und umgekehrt.

Bemerkung. Diese Formulierung des Noether-Theorems ist insofern speziell, als wir uns auf den autonomen Fall beschränken. Andererseits ist sie allgemeiner als die entsprechende Aussage in der Lagrange-Mechanik, wo nur eine der beiden Schlüsse gezogen werden kann, nämlich dass jede Einparametergruppe von Symmetrie-Transformationen einen Erhaltungssatz impliziert. Die Umkehrung (also: zu jedem Erhaltungssatz existiert eine Einparametergruppe von Symmetrie-Transformationen) lässt sich in der Lagrange-Mechanik nicht zeigen, was daran liegt, dass die Gruppe der Punkttransformationen zu "klein" ist.

Beweis. Sei $f:\ M \to \mathbb{R}$ eine Funktion und ϕ^f der Fluss von $X_f = I(d\,f)$. Ist $(\phi_s^f)_{s\in\mathbb{R}}$ eine Einparametergruppe von Symmetrie-Transformationen, so gilt: $\frac{d}{ds} H \circ \phi_s^f \big|_{s=0} = 0$. Nach Gleichung (9.61) folgt dann: $\frac{d}{dt} f \circ \phi_t^H \big|_{t=0} = 0$, d.h. f ist ein erstes Integral und es gilt der Erhaltungssatz $f = \text{const}$. Die Umkehrung folgt analog durch Vertauschen der Rollen von H und f.

Beispiel 1. Auf der symplektischen Mannigfaltigkeit $(M, \omega) = (\mathbb{R}^2, dp \wedge dq)$ hat das Hamiltonsche Vektorfeld $I(dp) = \partial_q$ den durch $(q,p) \circ g^s = (q+s, p)$ bestimmten Fluss g^s. Die von $I(dp)$ erzeugten kanonischen Transformationen bilden also die Gruppe der Translationen in q. Daher bedeutet die Aussage des Noether-Theorems hier Folgendes: sind die Raumtranslationen $q \mapsto q + s$ eine Einparametergruppe von Symmetrie-Transformationen des Hamiltonschen Systems mit Hamilton-Funktion H, d.h. gilt:

$$\frac{d}{ds} H \circ g^s \bigg|_{s=0} = \frac{\partial H}{\partial q} = 0, \tag{9.63}$$

so ist der Impuls erhalten: $p = \text{const}$. Umgekehrt bedingt Impulserhaltung die Translationsinvarianz der Hamilton-Funktion.

Sprechweise: Ist $\phi:\ M \times \mathbb{R} \to M$, $(x,s) \mapsto \phi_s(x)$ der Fluss eines Vektorfeldes X, so sagen wir auch, dass X die Einparametergruppe $(\phi_s)_{s\in\mathbb{R}}$ *erzeugt.*

Beispiel 2. Für ein Teilchen im Euklidischen Raum $(E_3\,, V \simeq \mathbb{R}^3, +)$ haben wir den Phasenraum $(M, \omega) = (E_3 \times V^*, \sum_{k=1}^3 dp_k \wedge dq_k)$. Wir betrachten die 3-Komponente (eigentlich die 21-Komponente) des Drehimpulses,

$$L_3 = L_{21} = p_2\, q_1 - q_2\, p_1\,, \tag{9.64}$$

und bestimmen wieder das zugehörige Hamiltonsche Vektorfeld. Sei dazu $I(dL_3) =: \sum_k (X_{q_k}\, \partial_{q_k} + X_{p_k}\, \partial_{p_k})$. Dann ergeben sich aus

$$\begin{aligned} dL_3 &= d(p_2\, q_1 - q_2\, p_1) = p_2\, dq_1 + q_1\, dp_2 - q_2\, dp_1 - p_1\, dq_2 \\ &= \omega(\cdot\,, IdL_3) = \sum_k (X_{q_k}\, dp_k - X_{p_k}\, dq_k) \end{aligned}$$

die Komponenten $X_{q_1} = -q_2\,,\ X_{q_2} = q_1\,,\ X_{q_3} = 0,\ X_{p_1} = -p_2\,,\ X_{p_2} = p_1\,,\ X_{p_3} = 0$, also

$$I(dL_3) = q_1\, \partial_{q_2} - q_2\, \partial_{q_1} + p_1\, \partial_{p_2} - p_2\, \partial_{p_1}\,. \tag{9.65}$$

Offensichtlich erzeugt $I(dL_3)$ die durch

$$\begin{aligned} (q_1, q_2, q_3; p_1, p_2, p_3) \circ g^\phi &= (q_1 \cos\phi - q_2 \sin\phi,\ q_1 \sin\phi + q_2 \cos\phi,\ q_3; \\ &\qquad p_1 \cos\phi - p_2 \sin\phi,\ p_1 \sin\phi + p_2 \cos\phi,\ p_3) \end{aligned}$$

definierte Einparametergruppe von Drehungen um die 3-Achse. Deshalb lautet das Noether-Theorem in diesem Fall folgendermaßen: sind die Drehungen um die 3-Achse eine Einparametergruppe von Symmetrie-Transformationen, so ist die 3-Komponente des Drehimpulses erhalten: $L_3 = \mathrm{const}$, und umgekehrt.

9.8 Die Poisson-Klammer

Definition. Die Poisson-Klammer $\{f, g\}$ zweier differenzierbarer Funktionen f und g auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit (M, ω) ist die Ableitung von f in Richtung des Flusses ϕ^g des Hamiltonschen Vektorfeldes $I(dg)$:

$$\{f, g\} := \frac{d}{dt} f \circ \phi_t^g \bigg|_{t=0}. \tag{9.66}$$

Durch Bilden der Poisson-Klammer zweier differenzierbarer Funktionen auf M erhält man also wieder eine Funktion auf M.

Eigenschaften (der Poisson-Klammer):

1. Nach Gleichung (9.58) ist eine differenzierbare Funktion $f: M \to \mathbb{R}$ genau dann ein erstes Integral des Hamiltonschen Systems (M, ω, H), wenn ihre Poisson-Klammer mit H verschwindet:
$$\{f, H\} = 0. \tag{9.67}$$
2. Nach Gleichung (9.61) ist die Poisson-Klammer schiefsymmetrisch:
$$\{f, g\} = -\{g, f\}. \tag{9.68}$$

3. Nach Gleichung (9.59) können wir schreiben:

$$\{f, g\} = \omega\big(I(d\,g), I(d\,f)\big). \tag{9.69}$$

9.8.1 Koordinatendarstellung der Poisson-Klammer

Sei ω in lokalen Koordinaten $x_1, \ldots, x_{2f}$ dargestellt durch $\omega = \frac{1}{2}\sum_{i,j} \omega_{ij}\, dx_i \wedge dx_j$, und sei $X^g = I(d\,g) = \sum_{j=1}^{2f} X^g_j\, \partial_j$. Dann folgt aus $\omega(\cdot\,, X^g) = dg = \sum_i (\partial g/\partial x_i) dx_i$ die Beziehung $\sum_{i,j} dx_i\, \omega_{ij}\, X^g_j = \sum_i dx_i\, \partial g/\partial x_i$, also $\sum_j \omega_{ij}\, X^g_j = \partial g/\partial x_i$. Inversion dieser linearen Gleichung liefert $X^g_j = \sum_i (\omega^{-1})_{j\,i}\, \partial g/\partial x_i$, wobei die Koeffizienten $(\omega^{-1})_{j\,i}$ durch die Gleichung

$$\sum_i (\omega^{-1})_{j\,i}\, \omega_{ik} = \delta_{jk} \tag{9.70}$$

bestimmt werden oder, anders ausgedrückt, $\big((\omega^{-1})_{j\,i}\big)$ ist die zu (ω_{ij}) inverse Matrix. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \{g, h\} &= \omega(Idh, Idg) \\ &= \sum_{i,j} \omega_{ij} \left(\sum_k (\omega^{-1})_{ik} \frac{\partial h}{\partial x_k}\right) \left(\sum_l (\omega^{-1})_{j\,l} \frac{\partial g}{\partial x_l}\right) = \sum_{i,j} \frac{\partial g}{\partial x_i}\, (\omega^{-1})_{ij}\, \frac{\partial h}{\partial x_j}\,. \end{aligned} \tag{9.71}$$

Poisson-Klammer kanonisch. Ist die symplektische Struktur ω bezüglich eines Satzes von Koordinatenfunktionen $q_1, \ldots, q_f; p_1, \ldots, p_f$ in Normalform, $\omega = \sum_k dp_k \wedge dq_k$, so gilt:

$$\boxed{\{g, h\} = \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{\partial g}{\partial q_k}\frac{\partial h}{\partial p_k} - \frac{\partial g}{\partial p_k}\frac{\partial h}{\partial q_k}\right)}\,. \tag{9.72}$$

Zum Beweis dieser Formel benützt man Gleichung (9.71) und die Matrizen

$$(\omega_{ij}) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{1}_f \\ \mathbf{1}_f & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \big((\omega^{-1})_{ij}\big) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1}_f \\ -\mathbf{1}_f & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \tag{9.73}$$

Für den Spezialfall $f = q_k$ und $g = p_l$ ergibt sich

$$\{q_k, p_l\} = \delta_{kl}\,, \quad \{q_k, q_l\} = 0 = \{p_k, p_l\} \qquad (k, l = 1, \ldots, f). \tag{9.74}$$

Insbesondere folgt mit

$$\dot F = \sum_{k=1} \left(\frac{\partial F}{\partial q_k}\dot q_k + \frac{\partial F}{\partial p_k}\dot p_k\right) = \sum_{k=1} \left(\frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k}\right), \tag{9.75}$$

dass die kanonischen Bewegungsgleichungen (für $F = q_k$ oder $F = p_k$ oder irgendeine Funktion $F:\ M \to \mathbb{R}$) mit Hilfe der Poisson-Klammer folgendermaßen geschrieben werden können:

$$\boxed{\dot F = \{F, H\}}\,. \tag{9.76}$$

Bemerkung. Diese Formulierung kann als Ausgangspunkt für die Quantenmechanik dienen.

Beispiel. Für ein System mit zwei Freiheitsgraden, $M = \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}^2)^*$, $\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2$, sei $\ell = p_2\, q_1 - q_2\, p_1$ der Drehimpuls bzgl. des Ursprungs und $\phi := \arctan(q_1/q_2)$ ein (lokal definierter) Winkel in der Ortsebene. Dann liefert eine leichte Rechnung:

$$\{\phi, \ell\} = \sum_{k=1}^{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial q_k}\frac{\partial \ell}{\partial p_k} - \frac{\partial \phi}{\partial p_k}\frac{\partial \ell}{\partial q_k}\right) = 1. \tag{9.77}$$

Das ist das erwartete Ergebnis, denn der symplektische Gradient $I(d\ell)$ einer Komponente ℓ des Drehimpulses erzeugt bekanntlich Drehungen um die entsprechende Achse.

9.8.2 Woher kommt die symplektische Struktur?

In der in Abschnitt 9.4 gegebenen allgemeinen Definition Hamiltonscher Systeme ist die symplektische Struktur ω Teil der Axiomatik. Dieser Umstand provoziert die Frage, ob sich ω aus irgendeinem konstruktiven Prinzip ergibt oder schlechterdings "vom Himmel" fällt. Für Lagrange-Systeme ist die Antwort klar. In diesem Fall haben wir einen Ortsraum mit Koordinatenfunktionen $q_1, ..., q_f$, eine Lagrange-Funktion $L(q, \dot{q})$ und kanonische Impulse $p_k = \partial L / \partial \dot{q}_k$. Die symplektische Struktur ist hier immer $\omega = \sum_{k=1}^{f} dp_k \wedge dq_k$, und man zeigt leicht, dass sie nicht von der Koordinatenwahl abhängt.

Anders verhält es sich für Hamiltonsche Systeme wie den klassischen Spin, die keine Lagrange-Funktion besitzen. In diesem Fall ist dem Dozenten keine gute Antwort auf die Frage nach der Herkunft der symplektischen Struktur im Rahmen der klassischen Mechanik bekannt. Ähnlich wie beim Hamiltonschen Prinzip der kleinsten Wirkung erschließen sich Ursprung und tiefere Bedeutung der symplektischen Struktur erst im Rahmen der Quantenmechanik, wie folgt.

Grundlegend für die Hamiltonsche Mechanik ist der Phasenraum M. Physikalische Observable wie Ort, Impuls, Drehimpuls, Energie usw. sind Funktionen auf dem Phasenraum, $f : M \to \mathbb{R}$. Solche Funktionen bilden eine Algebra, d.h. sie können linear kombiniert und multipliziert werden, $(\alpha f + \beta g)(x) := \alpha f(x) + \beta g(x)$ und $(f \cdot g)(x) := f(x) g(x)$. Das Produkt ist kommutativ, $f \cdot g = g \cdot f$. Die Observablen der klassischen Mechanik bilden also eine *kommutative* Algebra.

In diesem algebraischen Zugang gelangt man (Dirac folgend) zur Quantenmechanik, indem man die Algebra der Observablen *nichtkommutativ* macht: das kommutative Produkt $f \cdot g = g \cdot f$ wird durch ein nichtkommutatives Produkt $f * g \neq g * f$ ersetzt. Das Korrespondenzprinzip verlangt, dass die Quantenmechanik für $\hbar \to 0$ (Plancksche Konstante gegen Null) in die klassische Mechanik übergeht. Dementsprechend besitzt das quantenmechanische $*$-Produkt eine Entwicklung nach Potenzen von $\hbar$, deren nullter Term das kommutative Produkt ist: $f * g = f \cdot g + \mathcal{O}(\hbar)$. Die führende nichtkommutative Korrektur wird durch die Poisson-Klammer bestimmt:

$$f * g = f \cdot g + \frac{\mathrm{i}\hbar}{2} \{f, g\} + \mathcal{O}(\hbar^2), \tag{9.78}$$

wobei $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ die imaginäre Einheit ist. Hiermit lässt sich die Poisson-Klammer durch einen Grenzübergang formal isolieren:

$$\{f, g\} = \lim_{\hbar \to 0} (\mathrm{i}\hbar)^{-1} (f * g - g * f) \,. \tag{9.79}$$

Wie wir wissen, hängt die Poisson-Klammer mit der symplektischen Struktur durch $\omega(Idf, Idg) = \{g, f\}$ zusammen. Wird die klassische Mechanik also als Grenzfall der Quantenmechanik gesehen, dann fällt die symplektische Struktur eines Hamiltonschen Systems nicht vom Himmel, sondern ist in der nichtkommutativen Algebra der quantenmechanischen Observablen kodiert. Für den Fall des klassischen Spins folgt die symplektische Struktur letztlich aus der Quanten-Algebra des Spins.

9.9 Liouvillescher Satz

Wir betrachten eine symplektische Mannigfaltigkeit (M, ω) der Dimension $2f$ und definieren eine Volumenform Ω durch

$$\Omega := \frac{1}{f!}\,\omega^{\wedge f} = \frac{1}{f!}\,\omega \wedge \omega \wedge \cdots \wedge \omega. \tag{9.80}$$

Ist ω in lokalen Koordinaten durch $\omega = \sum_{k=1}^{f} dp_k \wedge dq_k$ gegeben, so zeigt man leicht, dass gilt:

$$\Omega = dp_1 \wedge dq_1 \wedge dp_2 \wedge dq_2 \wedge \ldots \wedge dp_f \wedge dq_f\,. \tag{9.81}$$

Eine direkte Konsequenz der Definition kanonischer Transformationen und des Satzes von Abschnitt 9.6 (Hamiltonsche Flüsse) ist

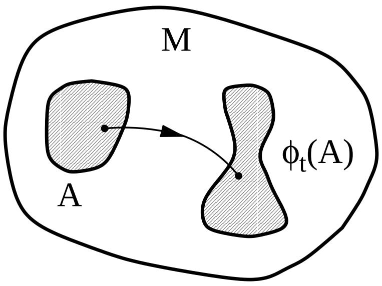
Satz (Liouville). Jeder Hamiltonsche Fluss ϕ ist volumenerhaltend, d.h. mit $\mathrm{vol}(\phi_t(U)) := \int_{\phi_t(U)} \Omega$ gilt $\mathrm{vol}(\phi_t(U)) = \mathrm{vol}(U) = \mathrm{const}$ für jedes Gebiet $U \subset M$.

Beweis. Wir benützen den Transformationssatz $\int_{\phi_t(U)} \Omega = \int_U \phi_t^* \Omega$. Da das Zurückziehen von Formen mit dem äußeren Produkt vertauscht, überträgt sich die Invarianz von $\omega = \phi_t^* \omega$ auf Ω:

$$\phi_t^* \Omega = \frac{1}{f!}\,(\phi_t^* \omega) \wedge \cdots \wedge (\phi_t^* \omega) = \frac{1}{f!}\,\omega \wedge \cdots \wedge \omega = \Omega, \tag{9.82}$$

woraus folgt:

$$\mathrm{vol}(\phi_t(U)) = \int_U \phi_t^* \Omega = \int_A \Omega = \mathrm{vol}(U) = \mathrm{const}. \tag{9.83}$$



Bemerkungen:

(i) Der Liouvillesche Satz gilt auch für nichtautonome Hamiltonsche Systeme.

(ii) Man nennt Ω eine *Integralinvariante* (nach Poincaré). Neben Ω existiert eine ganze Serie weiterer Integralinvarianten, nämlich: ω, $\omega \wedge \omega$, ..., $\omega^{\wedge k} = \omega \wedge \omega \wedge \cdots \wedge \omega$ (k Faktoren), ..., $\Omega = \omega^{\wedge f}$. Die allgemeine Aussage lautet: Ist A ein $2k$-dimensionales Flächenstück auf M und $\phi_t(A)$ sein Bild unter ϕ_t, so gilt $\int_{\phi_t(A)} \omega^{\wedge k} = \mathrm{const}$.

(iii) Der Liouvillesche Satz hat viele Anwendungen (siehe z.B. Abschnitt 8.6); u.a. spielt er eine bedeutende Rolle in der Begründung der Thermodynamik aus der statistischen Mechanik.

9.10 Erzeugende Funktionen

Wir kehren zum elementaren Fall $f = 1$, $M = \mathbb{R}^2$, $\omega = dp \wedge dq$ zurück. Für eine kanonische Transformation $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ setzen wir $Q = q \circ \psi$ und $P = p \circ \psi$. Dann gilt

$$d\,(p\,dq - P\,dQ) = dp \wedge dq - dP \wedge dQ = \omega - \omega = 0. \tag{9.84}$$

Die Differenz von 1-Formen $p\,dq - P\,dQ$ ist also geschlossen und nach dem Poincaré-Lemma für $M = \mathbb{R}^2$ auch exakt. Es existiert somit eine Funktion $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$dS = p\,dq - P\,dQ. \tag{9.85}$$

Definition. Wir nennen eine kanonische Transformation $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *vom Typ 1* (bzw. *Typ 2*), wenn q und $q \circ \psi$ (bzw. $p \circ \psi$) einen Satz unabhängiger Koordinaten bilden.

Typ 1. Sei nun ψ vom Typ 1. Dann lässt sich eine Funktion $S_1(q, Q) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ finden, so dass $S = S_1(q, Q)$. Aus der linearen Unabhängigkeit von dq und dQ folgt nach Einsetzen von $dS = \frac{\partial S_1}{\partial q}(q, Q)\,dq + \frac{\partial S_1}{\partial Q}(q, Q)\,dQ$ in (9.85), dass $S_1(q, Q)$ den folgenden Gleichungen genügt:

$$p = \frac{\partial S_1}{\partial q}(q, Q), \qquad P = -\frac{\partial S_1}{\partial Q}(q, Q). \tag{9.86}$$

Diese Schritte lassen sich umkehren und zur Konstruktion von kanonischen Transformationen benützen. Dazu geben wir uns eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $S_1(q, Q)$ vor. Unter der Voraussetzung $\partial^2 S_1/\partial q \partial Q \neq 0$ können wir dann die erste Gleichung in (9.86) lokal nach Q auflösen und erhalten $Q = \tilde{Q}(q, p)$. Diese Beziehung setzen wir in die zweite Gleichung von (9.86) ein und erhalten $P = \tilde{P}(q, p)$. Per Konstruktion gilt dann $dp \wedge dq = dP \wedge dQ$. Die Funktion $S_1(q, Q)$ heißt eine *erzeugende Funktion* vom Typ 1.

Beispiel. Die Wahl $S_1(q, Q)$ ergibt $p = Q$ und $q = -P$.

Typ 2. Nicht alle kanonischen Transformationen sind vom Typ 1. Zum Beispiel fallen für die identische Transformation die Funktionen q und Q zusammen und sind nicht unabhängig. Es ist also nicht möglich, die identische Transformation aus einer erzeugenden Funktion $S_1(q, Q)$ zu gewinnen. Dies lässt sich jedoch mit Typ 2 bewerkstelligen. Sei jetzt ψ vom Typ 2. Dann setzen wir

$$S =: S_2(q, P), \tag{9.87}$$

wobei jetzt $dS = p\,dq + Q\,dP$ gelten soll. Wir bilden das Differential,

$$p\,dq + Q\,dP = dS = \frac{\partial S_2}{\partial q}(q, P)\,dq + \frac{\partial S_2}{\partial P}(q, P)\,dP, \tag{9.88}$$

und folgern aus der linearen Unabhängigkeit von dq und dP die Relationen

$$p = \frac{\partial S_2}{\partial q}(q, P), \qquad Q = \frac{\partial S_2}{\partial P}(q, P). \tag{9.89}$$

Offensichtlich hat die identische Transformation $Q = q$, $P = p$ die erzeugende Funktion $S_2(q, P) = qP$. Auch hier kann man wieder umgekehrt vorgehen. Für eine vorgegebene erzeugende Funktion

$S_2(q,P)$ löst man die erste Gleichung in (9.89) nach P auf und setzt das Resultat in die zweite Gleichung von (9.89) ein.

Mitteilung. Im Formalismus der *kanonischen Störungsrechnung* benützt man als Ausgangspunkt eine erzeugende Funktion vom Typ 2: $S_2(q,P) = qP + \epsilon\, f(q,P)$ mit kleinem Parameter ϵ. Ein monumentales Resultat dieses Formalismus (genauer: von trickreichen Verbesserungen desselben) ist das Theorem von Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM-Theorem).

9.11 Elektrodynamik als Lagrange-System

Als kurzen Nachtrag zum Lagrange-Formalismus kehren wir zur Elektrodynamik zurück und betrachten das Wirkungsfunktional

$$S = \int L\, dt, \qquad L = \int_{E_3} \left(\tfrac{1}{2} E \wedge D - \tfrac{1}{2} B \wedge H - \phi\,\rho + A \wedge j\right). \tag{9.90}$$

Hierbei sind die Funktion ϕ (elektrisches Skalarpotential) und die 1-Form A (magnetisches Vektorpotential) ein Satz von Potentialen für die zeitabhängigen Feldstärken, d.h.

$$B = dA, \quad E = -d\phi - \dot{A}. \tag{9.91}$$

Man prüft schnell nach, dass mit diesem Ansatz die homogenen Maxwell-Gleichungen ($dB = 0$ und $\dot{B} = -dE$) identisch erfüllt sind. Die Ladungsdichte ρ und Stromdichte j sind hier als vorgegeben zu betrachten. Den nichtmateriellen Teil des Wirkungsfunktionals S kennen wir schon aus Abschnitt 7.6 (Spule in Bewegung: Relativitätsprinzip).

Raum-Zeit-Formulierung. Es soll nun gezeigt werden, dass die Euler-Lagrange-Gleichungen zum obigen Wirkungsfunktional (mit den Potentialen ϕ, A als verallgemeinerten "Ortsfreiheitsgraden" q) mit den inhomogenen Maxwell-Gleichungen übereinstimmen. Zu diesem Zweck ist es bequem (obschon nicht nötig), zu Raum-Zeit-Größen überzugehen:

$$F = B + E \wedge dt, \quad G = D - H \wedge dt, \quad \mathcal{A} = -\phi\, dt + A, \quad J = \rho - j \wedge dt. \tag{9.92}$$

Wir haben dann $F = d\mathcal{A}$ (und somit automatisch die homogenen Maxwell-Gleichungen $dF = 0$), und das Wirkungsfunktional verkürzt sich zu

$$S[\mathcal{A}] = \int_{M_4} \left(\tfrac{1}{2} F \wedge G - \mathcal{A} \wedge J\right). \tag{9.93}$$

Aufgabe. Das Wirkungsfunktional (9.93) hat die Funktional-Ableitung

$$\frac{d}{ds} S[\mathcal{A} + s\alpha]\bigg|_{s=0} = \int_{M_4} (d\alpha \wedge G - \alpha \wedge J), \tag{9.94}$$

und nach dem Hamiltonschen Prinzip der kleinsten Wirkung folgen die inhomogenen Maxwell-Gleichungen

$$dG = J. \tag{9.95}$$

9.12 Elektrodynamik als Hamiltonsches System

Der Übergang zur Hamiltonschen Formulierung der Elektrodynamik wird dadurch erschwert, dass die verallgemeinerten Ortsfreiheitsgrade $\mathcal{A} = -\phi\, dt + A$ nicht eichinvariant, also nicht voll physikalisch sind. Wir umgehen diese Komplikation, indem wir direkt mit den Feldstärken E und B arbeiten. (Warnung: Die Ausführungen werden stark komprimiert sein. Für mehr Details verweise ich auf mein Skript zur Vorlesung Quantenfeldtheorie I.)

Lagrange-Funktion. Um in der Lagrange-Funktion (9.90) der Elektrodynamik die physikalisch unbestimmten Eichpotentiale ϕ und A durch die physikalisch bestimmten Feldstärken E und B zu ersetzen, drücken wir die Ladungsdichte ρ und die Stromdichte j durch eine Polarisierung $P \in \tilde{\Omega}^2(E_3)$ sowie eine Magnetisierung $M \in \tilde{\Omega}^1(E_3)$ aus:

$$\rho = -dP, \quad j = \dot{P} + dM. \tag{9.96}$$

Ein solches Vorgehen kennen wir schon aus dem Abschnitt 7.11 über Elektrodynamik in Materie. Der Unterschied zu vorher ist, dass wir jetzt ρ und j als Ganzes (also nicht nur den unkontrollierbaren Materieanteil) auf diese Weise ausdrücken. Durch Einsetzen in (9.90) und partielles Integrieren entsteht ein potentialfreier Ausdruck für die Lagrange-Funktion:

$$L - \frac{d}{dt}\int_{E_3} A \wedge P = \int_{E_3} \left(E \wedge (\tfrac{1}{2}D + P) - B \wedge (\tfrac{1}{2}H - M) \right). \tag{9.97}$$

Der zweite Summand auf der linken Seite hat als totale Zeitableitung bekanntlich keine Auswirkung auf die Euler-Lagrange-Gleichungen und wird daher im Folgenden weggelassen.

Kanonischer Impuls. Für den Übergang zur Hamilton-Formulierung wählt man die sogenannte *temporale* Eichung $\phi \equiv 0$, also $E = -\dot{A}$ und $B = dA$. Mit dieser Wahl ist die elektrische Feldstärke E (oder ihr Negatives) als verallgemeinerte "Geschwindigkeit" im Sinne der Lagrange-Mechanik zu betrachten. Den kanonischen Impuls erhalten wir dann wie immer durch Bilden der (Funktional-)Ableitung der Lagrange-Funktion nach der Geschwindigkeit (schematische Formel):

$$\frac{\delta L}{\delta E} = D + P \equiv \mathcal{D}. \tag{9.98}$$

Als wichtige Eigenschaft des kanonischen Impulses ist hier zu vermerken, dass die 2-Form $\mathcal{D}$ geschlossen ist: $d\mathcal{D} = dD + dP = \rho - \rho = 0$.

Die Hamilton-Funktion als Legendre-Transformierte der Lagrange-Funktion ergibt sich zu

$$\mathcal{H} = \int_{E_3} E \wedge \mathcal{D} - L = \int_{E_3} \left(\tfrac{1}{2} E \wedge D + \tfrac{1}{2} B \wedge H - B \wedge M \right). \tag{9.99}$$

Poisson-Klammer. Um die kanonischen Gleichungen aufstellen zu können, benötigen wir neben der Hamilton-Funktion eigentlich eine symplektische Struktur. Stattdessen geben wir die äquivalente Poisson-Klammer an. Dazu schreiben wir die magnetische Feldstärke B (als Ableitung $B = dA$ der verallgemeinerten Ortsfreiheitsgrade A) und den kanonischen Impuls $\mathcal{D} = D + P$ in der Form (für beliebige Koordinaten x^i)

$$B = \sum_{i<j} B_{ij}\, dx^i \wedge dx^j, \quad \mathcal{D} = \sum_{i=1}^{3} \mathcal{D}_i \star dx^i. \tag{9.100}$$

Wir konstatieren dann den folgenden Ausdruck für die Poisson-Klammer:

$$\{\mathcal{D}_i(\bullet), B_{jk}(\bullet')\} = \left(\langle \partial_i, \partial_j \rangle \frac{\partial}{\partial x^k} - \langle \partial_i, \partial_k \rangle \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \delta(\bullet - \bullet'). \tag{9.101}$$

In kartesischen Koordinaten x^i hat man die Vereinfachung $\langle \partial_i, \partial_j \rangle = \delta_{ij}$ und $\langle \partial_i, \partial_k \rangle = \delta_{ik}$. Die Poisson-Klammern von $\mathcal{D}$ mit sich und B mit sich verschwinden. Die Materie-Größen P und M spielen die Rolle von externen Parametern.

Kanonische Gleichungen. Die Richtigkeit der behaupteten Poisson-Klammer wird durch Aufstellen der kanonischen Gleichungen *a posteriori* nachgewiesen. Zu diesem Zweck müssen wir die Hamilton-Funktion durch den kanonischen Impuls (anstelle der verallgemeinerten Geschwindigkeit E) ausdrücken:

$$\mathcal{H} = \int_{E_3} \left(\frac{1}{2\varepsilon_0} (\mathcal{D} - P) \wedge \star (\mathcal{D} - P) + \tfrac{1}{2} B \wedge H - B \wedge M \right). \tag{9.102}$$

Eine kurze Rechnung (die allerdings ein gewisses Verständnis der Dirac-Distribution $\delta(\bullet - \bullet')$ und der Ko-Ableitung $\delta = - \star d \star$ auf 2-Formen erfordert), führt in kartesischen Koordinaten zu

$$\dot{\mathcal{D}}_i(\bullet) = \{\mathcal{D}_i(\bullet), \mathcal{H}\} = \sum_{j<k} \int_{E_3} \{\mathcal{D}_i(\bullet), B_{jk}(\bullet')\} (B/\mu_0 - \star M)_{jk}(\bullet') \, \mathrm{dvol}_{\bullet'} = (-\delta B/\mu_0 + \delta \star M)_i(\bullet).$$

Koordinatenfrei geschrieben lautet dieses Ergebnis

$$\dot{\mathcal{D}} = - \star \delta B/\mu_0 + \star \delta \star M = d\,(H - M). \tag{9.103}$$

Mit $\dot{\mathcal{D}} = \dot{D} + \dot{P}$ und $\dot{P} + dM = j$ folgt das Ampere-Maxwell-Gesetz:

$$\dot{D} = dH - dM - \dot{P} = dH - j. \tag{9.104}$$

Durch ähnliche Rechnung findet man

$$\dot{B}_{ij}(\bullet) = \{B_{ij}(\bullet), \mathcal{H}\} = \sum_k \int_{E_3} \{B_{ij}(\bullet), \mathcal{D}_k(\bullet')\} \big(\star (\mathcal{D} - P)/\varepsilon_0 \big)_k (\bullet') \, \mathrm{dvol}_{\bullet'} = (-dE)_{ij}(\bullet).$$

Ohne Mühe erkennen wir hier das Induktionsgesetz $\dot{B} = -dE$ wieder.

Resümee. In der Hamiltonschen Formulierung der klassischen Dynamik des elektromagnetischen Feldes mittels der Hamilton-Funktion (9.99) und der Poisson-Klammer (9.101) erhält man als kanonische Gleichung für $\dot{D}$ das Ampere-Maxwell-Gesetz und für $\dot{B}$ das Induktionsgesetz von Faraday. (Die ohne Zeitableitung formulierten Gesetze $d\mathcal{D} = 0$ und $dB = 0$ sind Anfangsbedingungen, die unter der so definierten Dynamik invariant bleiben. Zusätzlich postuliert man die Gesetze $D = \varepsilon_0 \star E$ und $B = \mu_0 \star H$, wodurch die Minkowski-metrische Struktur der Raum-Zeit ausgedrückt wird.)

Entwarnung. Das Material der Abschnitte 9.11 und 9.12 gehört <u>nicht</u> zum Klausur-Stoff!

9.13 Nachtrag zur Magnetostatik: Biot-Savart-Gesetz

In Antwort auf eine Hörerfrage tragen wir die folgende Ergänzung zur Magnetostatik nach.

Biot-Savart-Gesetz. Darunter verstehen wir die Lösung des Ampere-Gesetzes $dH = j$ für die magnetische Erregung H unter der Bedingung $\delta H = 0$ ($\Leftrightarrow dB = 0$). Im Formenkalkül hat man (für einen Punkt $p \in E_3$)

$$\boxed{H_p = \int_{E_3} \frac{\iota(p - \bullet) j}{4\pi |p - \bullet|^3} \, \mathrm{dvol}_\bullet} \qquad \text{(Biot-Savart)}, \tag{9.105}$$

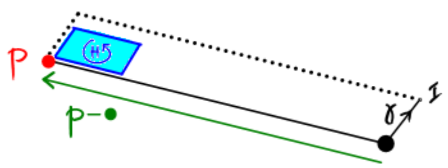
oder, genauer, nach Kontraktion mit einem (axialen) Vektor $v \in V \simeq \mathbb{R}^3$:

$$H_p(v) = \int_{E_3} \frac{j_\bullet(p - \bullet, v)}{4\pi |p - \bullet|^3} \, \mathrm{dvol}_\bullet \,, \tag{9.106}$$

oder in kartesischen Komponenten ($k, l = 1, 2, 3$):

$$H_k(\mathbf{r}) = \int_{E_3} \frac{\sum_l (\mathbf{r} - \mathbf{r}')^l j_{lk}(\mathbf{r}')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \, d^3 r'. \tag{9.107}$$

Visualisierung.



Das Stromlinienstück $j = I\gamma$ trägt zur 2-Kette der magnetischen Erregung H im Punkt p das von γ und $p - \bullet$ aufgespannte Parallelogramm  mit Gewichtsfaktor $I/(4\pi |p - \bullet|^2)$ bei.

Mantra. Das Vektorprodukt (und mit ihm die Rechte-Hand-Regel) sind auch hier fehl am Platz und kommen in der obigen Formel stimmigerweise nicht vor :-).

Herleitung (des Biot-Savart-Gesetzes). Wir lösen die Bedingung $dB = 0 = \delta H$ durch den Ansatz

$$H = -\delta C, \quad C \in \tilde{\Omega}^2(E_3). \tag{9.108}$$

Als Motivation kann die Identifikation $C \equiv \star A/\mu_0$ dienen (Vektorpotential A), denn

$$-\delta C = \star d \star C = \star dA/\mu_0 = \star B/\mu = H, \tag{9.109}$$

und es gilt $\delta H = -\delta^2 C = 0$ wegen $\delta^2 = 0$. Das Ampere-Gesetz $dH = j$ lautet nun $-d\delta C = j$. Für den nächsten Schritt stellen wir die Bedingung $dC = 0$ (was der Coulomb-Eichung $d \star A = 0$ entspricht) und subtrahieren $\delta dC = 0$ auf der linken Seite. Es folgt die Poisson-Gleichung

$$-\triangle C = j. \tag{9.110}$$

(Nebenbei bemerkt ist $dC = 0$ wegen $d\triangle = \triangle d$ konsistent mit der magnetostatischen Bedingung $dj = 0$.) Die Lösung $C = (-\triangle)^{-1} j$ der Poisson-Gleichung ist

$$C_p = \int_{E_3} \frac{j_\bullet}{4\pi |p - \bullet|} \, \mathrm{dvol}_\bullet \quad \text{also} \quad C_p(u, v) = \int_{E_3} \frac{j_\bullet(u, v)}{4\pi |p - \bullet|} \, \mathrm{dvol}_\bullet \,. \tag{9.111}$$

Die Behauptung (Biot-Savart) folgt durch Differenzieren ($-\delta C = H$) mit

Aufgabe. In kartesischen Koordinaten x_i hat $C = \sum_{i<j} C_{ij}\,[dx_i \wedge dx_j\,;\mathrm{Or}]$ die Ko-Ableitung

$$\delta C = \sum\nolimits_j \left(\sum\nolimits_i \partial_i C_{ij}\right) [dx_j\,;\mathrm{Or}]. \tag{9.112}$$