# Diskrete stochastische Systeme in niedrigen Dimensionen: Die Physik des Straßenverkehrs

Andreas Schadschneider

Institut für Theoretische Physik

Universität zu Köln

Habilitationsschrift
vorgelegt der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität zu Köln

Köln, im März 1999

# Inhaltsverzeichnis

Liste der als Habilitationsschrift eingereichten Arbeiten:

I. M. Schreckenberg, A. Schadschneider, K. Nagel, N. Ito:
*Discrete stochastic models for traffic flow*
Phys. Rev. **E51**, 2939 (1995)

II. A. Schadschneider, M. Schreckenberg:
*Car-oriented mean-field theory for traffic flow models*
J. Phys. A: Math. Gen. **30**, L69 (1997)

III. A. Schadschneider, M. Schreckenberg:
*Garden of Eden states in traffic models*
J. Phys. A: Math. Gen. **31**, L225 (1998)

IV. A. Schadschneider:
*The Nagel-Schreckenberg model revisited*
Eur. Phys. J. **B10**, 573 (1999)

V. N. Rajewsky, L. Santen, A. Schadschneider, M. Schreckenberg:
*The asymmetric exclusion process: Comparison of update procedures*
J. Stat. Phys. **92**, 151 (1998)

VI. K. Klauck, A. Schadschneider:
*On the ubiquity of matrix-product states in one-dimensional stochastic processes with boundary interactions*
Physica **A271**, 102 (1999)

VII. B. Eisenblätter, L. Santen, A. Schadschneider, M. Schreckenberg:
*Jamming transition in a cellular automaton model for traffic flow*
Phys. Rev. **E57**, 1309 (1998)

VIII. R. Barlovic, L. Santen, A. Schadschneider, M. Schreckenberg:
*Metastable states in cellular automata for traffic flow*
Eur. Phys. J. **B5**, 793 (1998)

IX. D. Chowdhury, A. Schadschneider:
*Self-organization of traffic jams in cities: Effects of stochastic dynamics and signal periods*
Phys. Rev. **E59**, R1311 (1999)

# 1 Einleitung

Im Rahmen von interdisziplinären Fragestellungen spielen stochastische Systeme eine immer größer werdende Rolle. In den letzten Jahren sind sie erfolgreich zur Beschreibung von biologisch motivierten Problemen (z.B. Immunologie [1], Evolution [2], Brownsche Motoren [3]), soziologischen Phänomenen (Meinungsbildung [1, 4, 5] etc.), Börsenkursen („Econophysics“, siehe z.B. [1, 6]) und Straßenverkehr [7–9], um nur einige Anwendungen zu nennen, herangezogen worden. Ein Grund für diesen Erfolg ist, daß selbst scheinbar einfache stochastische Systeme ein erstaunlich komplexes Verhalten zeigen können.

Stochastische Systeme gehören i.a. zu den Nichtgleichgewichtssystemen. Dies macht ihre Untersuchung zur gleichen Zeit interessant und schwierig, denn im Gegensatz zur Gleichgewichtsphysik gibt es für das Nichtgleichgewicht keine ausgearbeitete allgemeine Theorie. Deshalb ist ein exemplarisches Vorgehen notwendig, bei dem man ein konkretes Modell im Detail untersucht, um daraus Rückschlüsse auf das allgemeine Verhalten zu ziehen. Ähnlich wie im Gleichgewicht ist das Verhalten niedrigdimensionaler Systeme besonders interessant, da hier Fluktuationen eine große Bedeutung zukommt [10].

Eine wichtige Rolle unter den Nichtgleichgewichtssystemen spielen die sog. „getriebenen Systeme“ [11]. Für deren Verhalten ist das Wechselspiel zwischen einer treibenden Kraft und Dissipation verantwortlich. Ein Beispiel hierfür ist der Fluß von Sand in einer vertikalen Röhre [12–14]. Die treibende Kraft ist dabei die Gravitation, die die Sandkörner beschleunigt. Auf der anderen Seite führen inelastische Stöße der Körner untereinander oder mit den Wänden der Röhre zu Dissipation. Aus dem Bereich der Festkörperphysik sind darüber hinaus ionische Leiter [15, 16] zu nennen.

In die Klasse der getriebenen Systeme gehören auch die hier im Mittelpunkt stehenden Modelle zur Beschreibung von Straßenverkehr. Über dessen offensichtliche praktische Bedeutung muß nicht viel gesagt werden. Aus unserer täglichen Erfahrung wissen wir, daß die Grenzen der Belastbarkeit des Straßennetzwerkes bald erreicht sind. Es scheint daher dringend erforderlich, Methoden zur Optimierung des Straßenverkehrs zu entwickeln. Hierbei kommt einfachen Modellen, z.B. bei der Verkehrsprognose, eine herausragende Rolle zu.

Die Modellierung von Straßenverkehr mit Methoden der Physik hat eine lange Tradition. Bereits in den fünfziger Jahren wurde intensiv begonnen, physikalische Modelle zur Beschreibung von Verkehr zu entwickeln. Diese lassen sich grob in zwei Klassen einteilen: a) Mikroskopische Modelle und b) makroskopische Modelle.

Mikroskopische Modelle unterscheiden zwischen den einzelnen Fahrzeugen und versuchen, deren Bewegungsgleichungen zu modellieren. Ein typischer Vertreter sind die sog. *Fahrzeugfolge-Modelle* [17]. Hier ist die Beschleunigung eines Fahrzeugs proportional zur Geschwindigkeitsdifferenz zum Vordermann. Um allerdings unphysikalische Effekte[1] und Unfälle zu vermeiden, muß man die Reaktionszeit der Fahrer berücksichtigen und die Proportionalitätskonstante, die auch als Sensitivität bezeichnet wird, selbst zu einer Funktion der Geschwindigkeit und des Abstandes zum Vordermann machen. In jüngster Zeit sind vor

[1] Z.B. die Divergenz der mittleren Geschwindigkeit bei kleinen Dichten

allem sog. *Optimum-Velocity-Modelle* [18] untersucht worden. Hier ist nicht die Geschwindigkeitsdifferenz zwischen aufeinanderfolgenden Fahrzeugen ausschlaggebend, sondern die Differenz der momentanen Geschwindigkeit zu einer Wunschgeschwindigkeit, die wiederum vom Abstand zum Vordermann abhängt.

Makroskopische Modelle verzichten auf eine Unterscheidung zwischen einzelnen Fahrzeugen. Statt dessen wird eine Kontinuumsnäherung durchgeführt. Man kommt so zu einer Beschreibung durch kontinuierliche Größen, z.B. der Dichte $\rho(x,t)$ und der mittleren Geschwindigkeit $v(x,t)$, die sehr stark der Hydrodynamik ähnelt. Das erste Modell in dieser Klasse der *hydrodynamischen Modelle* wurde von Lighthill und Whitham [19] vorgeschlagen. Die Zeitentwicklung der lokalen Dichte ergibt sich hier einfach aus der Kontinuitätsgleichung und der Annahme, daß der Strom $J(x,t)$ vollständig durch die lokale Dichte $\rho(x,t)$ bestimmt wird: $J(x,t) = J(\rho(x,t))$. Obwohl die Lighthill-Whitham-Theorie in vielen Aspekten kein realistisches Verhalten liefert, hat sie doch zu dem wichtigen Konzept der *kinematischen Wellen* geführt, die z.B. auch bei der Beschreibung von granularem Fluß eine wichtige Rolle [20] spielen.

Um eine realistischere Beschreibung zu erhalten, wurde die Lighthill-Whitham-Theorie im Laufe der Zeit durch weitere Wechselwirkungsterme ergänzt. Man kommt so z.B. zum Kerner-Konhäuser-Modell [21], das im wesentlichen aus einer Navier-Stokes-Gleichung für eine kompressible Flüssigkeit mit innerer Reibung besteht.

Die oben vorgestellten Methoden entstammen aus dem Bereich der klassischen Mechanik. Da es sich beim Straßenverkehr um ein Vielteilchensystem handelt, sind aber auch Methoden aus dem Bereich der statistischen Physik angewendet worden. In erster Linie wurde die Boltzmann-Gleichung benutzt, um eine mikroskopische Begründung für die makroskopischen Verkehrsmodelle zu geben [22, 23].

Alle Zugänge sind mit gewissen Problemen behaftet, keiner kann alle Aspekte befriedigend beschreiben. Für Anwendungen ist häufig eine mikroskopische Beschreibung vorzuziehen, da man einzelne Fahrzeuge unterscheiden möchte, z.B. um deren Reisezeit zu bestimmen. Die makroskopischen Modelle sind aber auch aus physikalischer Sicht unbefriedigend, da die Beziehung zwischen Strom und Dichte, das sog. Fundamentaldiagramm (siehe Kap. 2.2), eine Eingabegröße der Theorie ist. Auf der anderen Seite ist das Fundamentaldiagramm aber auch die wichtigste meßbare Kenngröße für Straßenverkehr und sollte daher im Prinzip aus dem Modell ableitbar sein. In diesem Sinne handelt es sich um eine phänomenologische Theorie, die keine vollständige mikroskopische Erklärung für das Verhalten liefert. Ein weiteres Problem stellt die Tatsache dar, daß die Modelle recht kompliziert sind und so nur wenig analytisch bekannt ist. Gleichzeitig sind sie aber auch nicht besonders gut für effiziente Computersimulationen geeignet. Letzteres ist wichtig für Anwendungen im Bereich der Verkehrsprognose, wenn man sehr große Straßennetzwerke schneller als in Echtzeit simulieren möchte.

In den letzten Jahren sind „moderne" Methoden aus der statistischen Physik in Form von *Zellularautomaten* [24] zur Beschreibung herangezogen worden. Zellularautomaten sind dynamische Systeme, die diskret in Raum, Zeit und Zustandsvariablen[2] (hier die

[2]Dies unterscheidet sie z.B. von diskretisierten Differentialgleichungen.

Geschwindigkeit) sind. Damit sind sie ideal für Computersimulationen geeignet [25]. Mit dem von Nagel und Schreckenberg [26] vorgeschlagenen Modell (siehe Abschnitt 2.3) läßt sich z.B. mittlerweile das gesamte Autobahnnetz Deutschlands mit bis zu 1 Millionen Fahrzeugen schneller als in Echtzeit simulieren [27, 28]. Damit hat man erstmals ein Modell an der Hand, mit dem im Prinzip großräumige Verkehrsprognosen möglich sind.

Die obige Darstellung kann natürlich nur einen kurzen Überblick geben. Die vorgestellten Modelle sind meist in vielen verschiedenen Varianten diskutiert worden. Für ausführlichere Darstellungen sei deshalb auf die Literatur verwiesen [7–9, 22, 29].

Obwohl die Fragestellung in ihrer Natur interdisziplinär ist, werden hier die physikalischen Aspekte im Vordergrund stehen. Straßenverkehr wird als ein physikalisches System betrachtet, an dem man experimentell gewisse Phänomene beobachtet. Diese möchte man dann mit Hilfe von theoretischen Modellen sowohl qualitativ als auch quantitativ verstehen. Letzteres ist eine Grundvoraussetzung für effektive verkehrsplanerische Maßnahmen. Ein gewisser Unterschied zur Physik besteht aber auf der experimentiellen Seite, denn häufig ist es unmöglich, gezielte Experimente zu machen, z.B. durch Variation der Parameter (Dichte, Höchstgeschwindigkeit etc.).

Auf der methodischen Seite stehen in vielen der hier vorgestellten Arbeiten analytische Verfahren im Vordergrund. Für niedrigdimensionale Systeme spielen Fluktuationen eine wichtige Rolle. Mean-Field-Ansätze liefern daher häufig keine guten Ergebnisse. Auf Grund der intrinsischen Stochastizität der hier untersuchten Modelle sind hochgenaue Computersimulationen zur Bestimmung ihrer grundlegenden Eigenschaften häufig recht aufwendig. Deshalb besteht ein verstärkter Bedarf an exakten Aussagen. Aber selbst zuverlässige analytische Approximationen können – gerade im Zusammenspiel mit Computersimulationen – viele wertvolle Informationen liefern. Methodisch besteht deshalb bei vielen hier vorgestellten Arbeiten ein Zusammenhang mit meinen Untersuchungen von hochkorrelierten Vielteilchensystemen der Festkörperphysik, insbesondere dem Matrixprodukt-Ansatz bei Spinsystemen [30–32] und Optimum-Grundzuständen von Fermionenmodellen [33–35]. Besonders deutlich wird dieser Zusammenhang im sog. Quantenformalismus für stochastische Systeme. Auf die Gemeinsamkeiten und Unterschiede wird in Abschnitt 2.1 ausführlich eingegangen.

Obwohl hier die physikalischen Aspekte der Modellierung von Straßenverkehr im Vordergrund stehen, sei betont, daß die Modelle bereits zahlreiche praktische Anwendungen gefunden haben. Beispielhaft seien hier nur Simulationen des deutschen Autobahnnetzes [27, 28] und des Stadtverkehrs in Duisburg [36] und Dallas/Fort Worth [37, 38] genannt.

Die vorliegende Schrift ist in drei Themenbereiche unterteilt. Die Gliederung erfolgte nach physikalischen und methodischen Gesichtspunkten. In [I–IV] steht die analytische Beschreibung des Nagel-Schreckenberg-Modells im Vordergrund, [V,VI] beschäftigen sich mit dem Matrixprodukt-Ansatz für stochastische Systeme und [VII–IX] untersuchen Phasenübergänge in Verkehrsmodellen. Es gibt jedoch viele Querverbindungen und die meisten der eingereichten Arbeiten können mehreren Themenbereichen zugeordnet werden.

# 2 Grundlagen

In den folgende Abschnitten werden kurz einige Punkte allgemeiner Bedeutung angesprochen. Es geht dabei sowohl um den allgemeinen Formalismus bei der physikalischen Beschreibung, als auch um die grundlegenden experimentellen Tatsachen aus der Verkehrsforschung. Schließlich wird das Nagel-Schreckenberg-Modell vorgestellt, dessen Varianten in allen Arbeiten [I–IX] eine Rolle spielen.

## 2.1 Die Mastergleichung

Stochastische Modelle sind i.a. durch die Übergangsraten $w(\boldsymbol{\tau} \to \tilde{\boldsymbol{\tau}})$ von einem Zustand $\boldsymbol{\tau} = \{\tau_1, \ldots, \tau_L\}$ in einen Zustand $\tilde{\boldsymbol{\tau}} = \{\tilde{\tau}_1, \ldots, \tilde{\tau}_L\}$ definiert. Hierbei sei bereits vorweggenommen, daß das betrachtete System diskret ist und aus $L$ Gitterplätzen (Zellen) besteht. Der Zustand der Zelle $j$ werde dabei durch die Zustandsvariable $\tau_j$ beschrieben. Im einfachsten Falle können diese Zustände durch die Besetzungszahl $n_j$ charakterisiert werden. Häufig unterscheidet man nur zwischen besetzten ($n_j = 1$) und leeren ($n_j = 0$) Zellen. In diesem Falle hätte man es mit einem Zweizustandsmodell zu tun. Natürlich sind auch komplexere Fälle denkbar, z.B. indem man Mehrfachbesetzungen zuläßt oder Teilchen, die noch einen inneren Freiheitsgrad (z.B. ihre Geschwindigkeit) besitzen.

Auf Grund der stochastischen Natur der Dynamik ist eine Beschreibung des Systems mit Hilfe einer geeigneten Wahrscheinlichkeitsverteilung sinnvoll. Die Wahrscheinlichkeit, das System zur Zeit $t$ in der Konfiguration $\boldsymbol{\tau} = \{\tau_1, \ldots, \tau_L\}$ zu finden, wird im folgenden mit $P(\boldsymbol{\tau}, t)$ bezeichnet. Die zeitliche Entwicklung dieser Wahrscheinlichkeit wird für einen Markov-Prozeß in kontinuierlicher Zeit durch eine *Mastergleichung* der Form

$$\frac{\partial P(\boldsymbol{\tau}, t)}{\partial t} = \sum_{\tilde{\boldsymbol{\tau}}} w(\tilde{\boldsymbol{\tau}} \to \boldsymbol{\tau}) P(\tilde{\boldsymbol{\tau}}, t) - \sum_{\tilde{\boldsymbol{\tau}}} w(\boldsymbol{\tau} \to \tilde{\boldsymbol{\tau}}) P(\boldsymbol{\tau}, t) \tag{1}$$

beschrieben.

Diese Gleichung hat eine einfache anschauliche Interpretation. Es handelt sich um eine Gewinn-Verlust-Bilanz. Die erste Summe umfaßt alle Prozesse $\tilde{\boldsymbol{\tau}} \to \boldsymbol{\tau}$, bei denen Zustände $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$ in den betrachteten Zustand $\boldsymbol{\tau}$ übergehen (Gewinne), die zweite Summe dagegen alle Prozesse, bei denen der Zustand $\boldsymbol{\tau}$ in einen anderen Zustand übergeht (Verluste).

Im Rahmen dieser Arbeit steht die Untersuchung der stationären Zustände stochastischer Prozesse im Vordergrund, die durch die zeitunabhängige Lösungen $P(\boldsymbol{\tau})$ von (1) gegeben sind. Aus (1) erhält man dann die stationäre Master-Gleichung

$$\sum_{\tilde{\boldsymbol{\tau}}} w(\tilde{\boldsymbol{\tau}} \to \boldsymbol{\tau}) P(\tilde{\boldsymbol{\tau}}) = \sum_{\tilde{\boldsymbol{\tau}}} w(\boldsymbol{\tau} \to \tilde{\boldsymbol{\tau}}) P(\boldsymbol{\tau}). \tag{2}$$

Die hier betrachteten Prozesse erfüllen i.a. *nicht* die Bedingung des *detaillierten Gleichgewichts*, bei der die Beziehung (2) für jeden Summanden separat erfüllt wäre: $w(\tilde{\boldsymbol{\tau}} \to \boldsymbol{\tau}) P(\tilde{\boldsymbol{\tau}}) = w(\boldsymbol{\tau} \to \tilde{\boldsymbol{\tau}}) P(\boldsymbol{\tau})$. Dies unterscheidet sie von Gleichgewichtssystemen. Sie lassen sich i.a. auch nicht als leicht gestörte Gleichgewichtssysteme auffassen und z.B. im Rahmen der „linear response“ Theorie behandeln. In diesem Sinne spricht man dann von Systemen „fernab vom Gleichgewicht“.

Um die Dynamik vollständig zu charakterisieren, muß man angeben, in welcher Reihenfolge die Zustände der einzelnen dynamischen Variablen (Teilchen oder Zellen) aktualisiert werden. Hier gibt es verschiedene Möglichkeiten. Bei der *zufällig-sequentiellen (random-sequential) Dynamik* wird jeweils eine zufällig ausgesuchte Zelle aktualisiert. Diese Dynamik wird durch eine Mastergleichung der Form (1) beschrieben.

Neben dieser zeitkontinuierlichen Dynamik gibt es verschiedene zeitdiskrete Dynamiken. Hier wird ein Zeitschritt $t \to t+1$ dadurch definiert, daß alle Zellen bzw. Teilchen genau einmal aktualisiert worden sind. Bei der *parallelen Dynamik* geschieht dies für alle Zellen gleichzeitig[3]. Daneben gibt es verschiedene Formen von *geordnet-sequentiellen Dynamiken*. Hier wird die Aktualisierung in einer festen Reihenfolge (z.B. von links nach rechts) vorgenommen.

Die Mastergleichung für die zeitdiskreten Dynamiken erhält man aus (1) durch Diskretisierung der Zeitableitung:

$$P(\boldsymbol{\tau}, t+1) = \sum_{\tilde{\boldsymbol{\tau}}} W(\tilde{\boldsymbol{\tau}} \to \boldsymbol{\tau}) P(\tilde{\boldsymbol{\tau}}, t) \tag{3}$$

wobei $W(\tilde{\boldsymbol{\tau}} \to \boldsymbol{\tau}) = w(\tilde{\boldsymbol{\tau}} \to \boldsymbol{\tau}) \cdot \Delta t$ die Übergangswahrscheinlichkeiten sind und $\sum_{\tilde{\boldsymbol{\tau}}} W(\boldsymbol{\tau} \to \tilde{\boldsymbol{\tau}}) = 1$ benutzt wurde.

Häufig benutzt man *Zellularautomaten*, um in einfacher Weise Nichtgleichgewichtssysteme zu modellieren [39, 40]. Zellularautomaten sind Modelle, die in Raum, Zeit und Zustandsvariable diskret sind[4]. Man kann sich dies so vorstellen, daß man den Raum in Zellen unterteilt, die sich nur in endlich vielen Zuständen befinden können.

Im folgenden soll ein kurzer Überblick über den sogenannten Quanten-Formalismus [41] zur Beschreibung stochastischer Systeme gegeben werden.

Jeder Konfiguration $\boldsymbol{\tau}$ wird ein Vektor $|\boldsymbol{\tau}\rangle = |\tau_1, ..., \tau_L\rangle$ so zugeordnet, daß die Menge aller $\{\boldsymbol{\tau}\}$ eine Orthonormalbasis des Konfigurationsraumes bildet, d.h. man hat $\langle \tilde{\boldsymbol{\tau}} | \boldsymbol{\tau} \rangle = \delta_{\tilde{\boldsymbol{\tau}}, \boldsymbol{\tau}}$.

Mit Hilfe der Gewichte $P(\boldsymbol{\tau}, t)$ definiert man nun die Zustandsvektoren

$$|P(t)\rangle = \sum_{\boldsymbol{\tau}} P(\boldsymbol{\tau}, t) |\boldsymbol{\tau}\rangle , \tag{4}$$

d.h. es gilt $P(\boldsymbol{\tau}, t) = \langle \boldsymbol{\tau} | P(t) \rangle$.

Mit diesen Definitionen läßt sich nun die Mastergleichung (1) in Form einer Schrödinger-Gleichung in imaginärer Zeit umschreiben:

$$\frac{\partial}{\partial t} |P(t)\rangle = -\mathcal{H}\, |P(t)\rangle \tag{5}$$

[3]Eine Variante ist die *Untergitter-parallele Dynamik*, bei der verschiedene Untergitter nacheinander parallel aktualisiert werden.

[4]Manchmal verwendet man den Begriff „Zellularautomat“ nur für Modelle mit paralleler Dynamik. Hier soll der Begriff aber etwas weiter gefaßt werden.

mit einem *stochastischen* „Hamilton-Operator“ $\mathcal{H}$, der i.a. nicht hermitesch ist. Er ist durch seine Matrixelemente in obiger Basis definiert:

$$\langle \boldsymbol{\tau} | \mathcal{H} | \tilde{\boldsymbol{\tau}} \rangle = -w(\tilde{\boldsymbol{\tau}} \to \boldsymbol{\tau}) \tag{6}$$

für die Außerdiagonalelemente ($\boldsymbol{\tau} \neq \tilde{\boldsymbol{\tau}}$) und

$$\langle \boldsymbol{\tau} | \mathcal{H} | \boldsymbol{\tau} \rangle = \sum_{\boldsymbol{\tau} \neq \tilde{\boldsymbol{\tau}}} w(\boldsymbol{\tau} \to \tilde{\boldsymbol{\tau}}) \tag{7}$$

für die Diagonalelemente. Man beachte, daß die Außerdiagonalelemente von $\mathcal{H}$ nichtpositiv und alle Spaltensummen gleich 0 sind. Matrizen mit diesen Eigenschaften werden auch als *stochastische Matrizen* bezeichnet [42].

Für stochastische Prozesse, die durch homogene, zeitunabhängige Übergangsraten zwischen nächsten Nachbarn definiert sind, läßt sich der Hamilton-Operator $\mathcal{H}$ als Summe lokaler Operatoren mit Nächst-Nachbar-Wechselwirkung schreiben [41]:

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^{L} h_{j,j+1} \quad . \tag{8}$$

Der stationäre Zustand $|P_0\rangle$ des zugrundeliegenden stochastischen Prozesses korrespondiert nun zum „Grundzustand“ des stochastischen Hamilton-Operators $\mathcal{H}$ mit der „Grundzustandsenergie“ $E_0 = 0$:

$$\mathcal{H} | P_0 \rangle = 0. \tag{9}$$

Die speziellen Eigenschaften von stochastischen Matrizen stellen sicher, daß die Realteile der anderen Eigenwerte $E_\lambda$ von $\mathcal{H}$ nicht negativ sind [42]. Die Existenz des Eigenwertes $E_0 = 0$ folgt aus der Tatsache, daß man leicht einen linken Eigenvektor[5] zu diesem Eigenwert finden kann, nämlich $\langle 0 | = \sum_{\boldsymbol{\tau}} \langle \boldsymbol{\tau} |$. Damit lassen sich Mittelwerte einer Observablen $\mathcal{A}(\boldsymbol{\tau})$ zur Zeit $t$ ausdrücken durch $\langle \mathcal{A} \rangle(t) = \sum_{\boldsymbol{\tau}} \mathcal{A}(\boldsymbol{\tau}) P(\boldsymbol{\tau}, t) = \langle 0 | \mathcal{A} | P(t) \rangle$.

Formal hat der oben vorgestellte Formalismus zur Beschreibung stochastischer Systeme große Ähnlichkeit mit dem bekannten Formalismus der Quantenmechanik von Vielteilchensystemen. Es gibt jedoch eine Reihe von Unterschieden, auf die hier kurz hingewiesen werden soll. Im Gegensatz zur Quantenmechanik ist $|P(t)\rangle$ selbst eine Wahrscheinlichkeit (siehe (4)). Deshalb sind Erwartungswerte nicht durch $\langle P(t) | \mathcal{A} | P(t) \rangle$ gegeben, sondern durch $\langle 0 | \mathcal{A} | P(t) \rangle$. Der stationäre Zustand entspricht zwar dem Grundzustand eines Vielteilchen-Hamiltonoperators, die zugehörige Fragestellung ist jedoch etwas anders. Bei den quantenmechanischen Problemen ist man i.a. zunächst daran interessiert, wie die Grundzustandsenergie von den Modellparametern (Kopplungskonstanten, Dichten etc.) abhängt. Dies ist bei stochastischen Sytemen anders. Hier kennt man die „Grundzustandsenergie“ bereits. Sie ist 0 für alle Werte der Systemparameter (siehe (9)). Im Vordergrund steht deshalb die

[5] Da $\mathcal{H}$ nicht hermitesch ist, muß man zwischen linken und rechten Eigenvektoren unterscheiden.

Berechnung von Erwartungswerten anderer Variablen. Bei den hier betrachteten Modellen ist dies i.a. der Strom im stationären Zustand.

Im Quantenformalismus für zeitlich diskrete Dynamiken führt man statt eines stochastischen Hamiltonoperators zweckmässigerweise eine Transfermatrix $\mathcal{T}$ ein. Für die geordnet-sequentiellen Dynamiken ist $\mathcal{T}$ ein Produkt aus lokalen Transfermatrizen $t_{j,j+1}$. Allgemein hat die Mastergleichung dann die Gestalt

$$|P(t+1)\rangle = \mathcal{T}|P(t)\rangle, \tag{10}$$

d.h. der stationäre Zustand ist gerade ein Eigenvektor von $\mathcal{T}$ zum Eigenwert 1.

## 2.2 Experimentelle Tatsachen aus der Verkehrsforschung

Im folgenden werden kurz einige wesentliche empirische Beobachtungen am Straßenverkehr, wie sie für das Verständnis wichtig sind, skizziert. Ausführlichere Darstellungen findet man z.B. in [9, 43, 44].

Die wichtigste Kenngröße zur Charakterisierung von Verkehrsflüssen ist das sog. *Fundamentaldiagramm*. Hiermit bezeichnet man die Beziehung zwischen Fahrzeugdichte $\rho$ und dem Strom (Fluß) $J$. In der Praxis ist man natürlich an einer „Optimierung“ des Fundamentaldiagrammes interessiert.

Bei kleinen Fahrzeugdichten bewegen sich die Autos nahezu wechselwirkungsfrei (Freiflußbereich). Hier ist die Beziehung zwischen $\rho$ und $J$ linear und die Proportionalitätskonstante ist gerade die freie oder Wunschgeschwindigkeit $v_{\text{frei}}$ der Autos. Bei mittleren Dichten werden Wechselwirkungen wichtig und führen zu Abweichungen vom linearen Verhalten. Der Fluß erreicht ein Maximum und nimmt danach wieder ab. Es bilden sich mehr und mehr Staus (gestauter Bereich), die schließlich zum Zusammenbruch des Flußes führen. Diese Überlegungen bestimmen bereits die charakteristische Form eines Fundamentaldiagramms.

Abb. 1 (links) zeigt ein typisches experimentell bestimmtes Fundamentaldiagramm. Dichte und Strom werden lokal gemessen. Jeder Punkt repräsentiert die Mittelung über Zeitintervalle von wenigen Minuten.

Bei der Untersuchung von Verkehrsmodellen geht man bei der Bestimmung des Fundamentaldiagramms häufig etwas anders vor. Man kann periodische Randbedingungen benutzen und so die Erhaltung der Teilchenzahl erzwingen. Damit wird die Dichte $\rho$ zu einer globalen Größe, die durch die Wahl der Anfangsbedingungen kontrolliert werden kann. Natürlich kann man auch lokale Messungen durchführen. Für ergodische Systeme erwartet man jedoch identische Ergebnisse. Im thermodynamischen Limes erhält man dann die idealisierte Form des Fundamentaldiagrammes, wie in Abb. 1 (rechts) angedeutet. Unter Verkehrsforschern wird die idealisierte Form des Fundamentaldiagramms bis heute kontrovers diskutiert [45]. Neben einer stetig-differenzierbaren Form wie in Abb. 1 (rechts) werden häufig Hinweise auf eine sog. „Inverse-Lambda“-Form gefunden, die schematisch in Abb. 2 dargestellt ist. Das Besondere ist hier, daß $J$ keine eindeutige Funktion der Dichte ist. Dieses Verhalten ist eng verknüpft mit der Existenz von metastabilen Zuständen und Hystereseeffekten und wird in Abschnitt 5.2 ausführlich diskutiert.

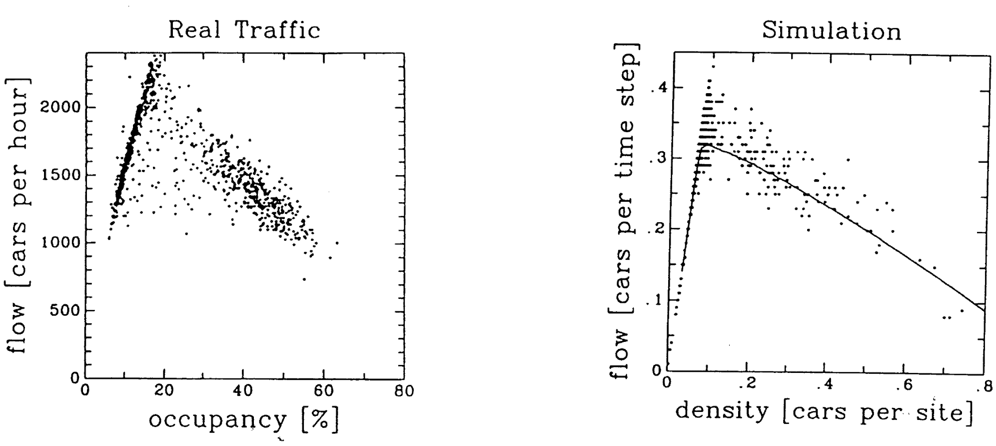


Abbildung 1: links: Ein experimentelles Fundamentaldiagramm. rechts: Ein Fundamentaldiagramm aus Monte-Carlo-Simulationen des NaSch-Modells.

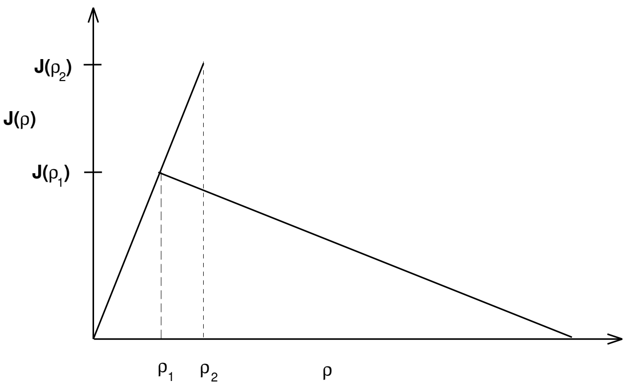


Abbildung 2: Schematische Darstellung eines Fundamentaldiagramms mit „Inverser-Lambda“-Form.

Ein weiteres charakteristisches Phänomen ist die spontane Staubildung, der sog. „Stau aus dem Nichts“. Hier entsteht ein Stau ohne ersichtlichen äußeren Grund (Unfall, Baustelle o.ä.) durch eine lokale Fluktuation. Bei einer hinreichend großen Verkehrsdichte kann ein leichtes Abbremsen eines Fahrzeugs durch eine Kette von Überreaktionen (nachfolgende Fahrzeuge bremsen etwas stärker ab, als es idealerweise nötig wäre) dazu führen, daß schließlich ein Auto stehen bleibt und so einen Stau auslöst. Dieses Phänomen ist aus Beobachtungen an realem Verkehr seit langem bekannt. Ein klassisches Beispiel ist in Abb. 3 gezeigt. Aus Luftbeobachtungen hat man die Trajektorien einzelner Fahrzeuge auf einer Schnellstraße bestimmt. Man erkennt deutlich den gestauten Bereich, der sich mit einer charakteristischen Geschwindigkeit von etwa 15 $km/h$ entgegen der Fahrtrichtung bewegt.

In letzter Zeit hat man bei Messungen an mehrspurigen Straßen Hinweise auf die Existenz einer weiteren Phase gefunden, die man als „synchronisierten Verkehr“ bezeichnet [47].

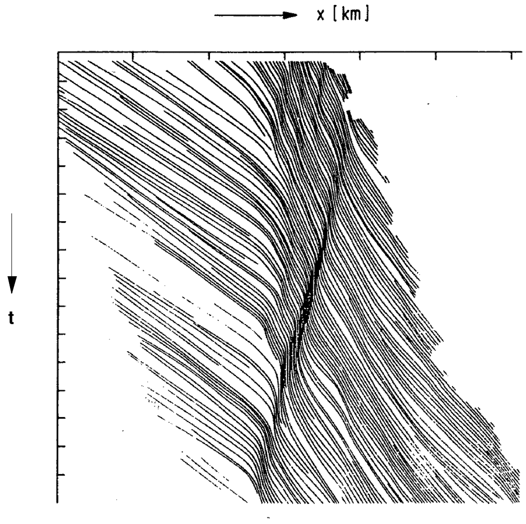


Abbildung 3: Experimentelle Beobachtung des „Staus aus dem Nichts“ (aus [46]).

Verkehrsmodelle sollten in der Lage sein, die typische Form des Fundamentaldiagrammes und das Phänomen der spontanen Staubildung zu reproduzieren. Dies ist natürlich nur eine Minimalforderung an die Modelle. Für viele Anwendungen ist eine mikroskopische Beschreibung vorteilhaft. Aus theoretischer Sicht sind Modelle befriedigender, bei denen nicht Meßgrößen (z.B. das Fundamentaldiagramm) Eingabeparameter sind. Schließlich sollten die Modelle einfach genug sein, um eine schnelle Simulation von großen Netzwerken zu ermöglichen, und flexibel genug, um auf unterschiedliche Situationen angewandt werden zu können.

## 2.3 Das Nagel-Schreckenberg-Modell

Bei dem von Nagel und Schreckenberg (NaSch) vorgeschlagenen Modell [26] handelt es sich um einen probabilistischen Zellularautomaten. Man stellt sich dabei vor, daß die Straße in Zellen einer festen Länge unterteilt wird, die durch durch den Platzbedarf eines Autos im dichtesten Stau festgelegt wird. Gewöhnlich setzt man die Zellenlänge gleich 7.5 m. Jede Zelle ist nun entweder leer oder durch *ein* Fahrzeug besetzt. Der Zustand des Fahrzeugs wird dabei durch seine momentane Geschwindigkeit $v_j$ charakterisiert, die auf Grund der Diskretheit von Raum und Zeit auch nur diskrete Werte $v_j = 0, 1, \ldots, v_{max}$ annehmen kann. Im einfachsten Fall ist die Höchstgeschwindigkeit $v_{max}$ für alle Fahrzeuge gleich. Die Zeitentwicklung eines Zustandes wird durch die folgenden vier Regeln definiert, die jeweils auf alle Fahrzeuge gleichzeitig anzuwenden sind (parallele Dynamik):

**R1** Beschleunigung: $v_j(t + 1/3) = \min(v_j(t) + 1, v_{max})$

**R2** Abbremsen: $v_j(t + 2/3) = \min(d_j(t), v_j(t + 1/3))$

**R3** „Trödeln“: $v_j(t+1) \stackrel{p}{=} \max(v_j(t+2/3)-1,0)$ mit Wahrscheinlichkeit $p$

**R4** Fahren: Fahrzeug $j$ bewegt sich $v_j(t+1)$ Zellen weiter.

Hierbei bezeichnet $d_j(t)$ die Zahl der freien Zellen vor Fahrzeug $j$, also den Abstand zum Vordermann. Ein Zeitschritt $t \to t+1$ entspricht etwa einer Sekunde in realer Zeit [26], liegt also in der Größenordnung der kleinsten relevanten Zeitskala, der Reaktionszeit.

Die Regeln R1–R4 haben eine einfache anschauliche Interpretation. R1 beschreibt den Vorwärtsdrang der Autofahrer, die versuchen ihre Wunschgeschwindigkeit[6] $v_{max}$ zu erreichen. Auf Grund dieser Regel gehört das NaSch-Modell zur Klasse der getriebenen Systeme fernab vom Gleichgewicht. Die Regel R2 dient der Vermeidung von Unfällen. Hierbei werden keine Antizipationseffekte berücksichtigt, denn ein Fahrzeug bremst bei einem zu kleinen Abstand unabhängig davon, ob der Vordermann sich vielleicht auch im gleichen Zeitschritt bewegt oder nicht. In dieser Regel ist die Wechselwirkung zwischen den Fahrzeugen enthalten. Die „Trödelregel“ R3 ist für das stochastische Verhalten des Modells verantwortlich. Hier verringert ein Fahrzeug mit der (Trödel-) Wahrscheinlichkeit $p$ seine Geschwindigkeit um eine Einheit. Dieser Schritt modelliert eine Vielzahl von Effekten, die bei realem Verkehr eine Rolle spielen, auf eine höchst einfache aber doch effektive Art und Weise. In ihm spiegelt sich das nicht perfekte Fahrverhalten der Fahrer wieder, die auch auf freier Strecke nicht konstant mit Höchstgeschwindigkeit fahren. Statt dessen treten Fluktuationen der Geschwindigkeit auf. Außerdem beinhaltet diese Regel solch wichtige Effekte wie Überreaktionen beim Bremsen oder verzögertes Beschleunigen. Gerade die Modellierung der Überreaktionen beim Bremsen ist entscheidend für den Realismus des Modells, denn sie führen gerade zum Auftreten des „Staus aus dem Nichts“. Muß ein Fahrer auf Grund eines zu geringen Abstandes zum Vordermann abbremsen, so kann dies zu einer Kettenreaktion führen. Auf Grund einer Kette von Überreaktionen kann es bei genügend großen Verkehrsdichten passieren, daß ein Fahrzeug sogar zum Stehen kommt und damit einen spontanen Stau verursacht, indem es folgende Fahrzeuge ebenfalls zum Anhalten zwingt. Im letzten Teilschritt schließlich bewegen sich die Fahrzeuge um die in den Schritten R1–R3 bestimmte neue Geschwindigkeit weiter.

Die NaSch-Regeln sind minimal in dem Sinne, daß man kein realistisches Verhalten (siehe Abschnitt 2.2) mehr erhält, wenn man eine von ihnen wegläßt. Selbst die Reihenfolge der Regeln ist wichtig. Vertauscht man z.B. R2 und R3, so gibt es keine spontane Staubildung mehr, da die Überreaktionen beim Bremsen nicht mehr auftreten. In komplexeren Situationen, z.B. Mehrspurverkehr [48–52], ist es natürlich notwendig, den Regelsatz um neue Regeln zu erweitern. Außerdem ist die Verwendung einer parallelen Dynamik entscheidend. Für zufällig-sequentielle Dynamik erhält man kein realistisches Verhalten [I].

[6]Diese ist i.a. nicht gleich der Höchstgeschwindigkeit des Autos, sondern kann z.B. durch eine Geschwindigkeitsbeschränkung gegeben sein.

# 3 Analytische Beschreibung des NaSch-Modells

Zellularautomaten sind auf Grund ihrer diskreten Struktur ideal für Computersimulationen geeignet [25]. Trotzdem sind analytische Beschreibungen aus verschiedenen Gründen wünschenswert. Dies gilt insbesondere für probabilistische Zellularautomaten. Auf Grund ihrer intrinsischen Stochastizität muß man hier über sehr viele Konfigurationen mitteln, um die Fluktuationen zu minimieren und hochgenaue Meßergebnisse zu erhalten. Zusammen mit den anderen Limitierungen von Computersimulationen (z.B. durch finite-size-Effekte) macht es dies häufig schwer, subtile Effekte zu erkennen und zu verstehen. In diesen Fällen sind exakte Lösungen besonders wünschenswert. Aber auch approximative analytische Verfahren können hier wertvolle Hinweise liefern. Beispiele für ein effektives Zusammenspiel von analytischen Methoden und Monte-Carlo-Simulationen finden sich in den Abschnitten 5.1 und 5.3.

Um die Physik des NaSch-Modells zu verstehen, wurde zunächst der stationäre Zustand für periodische Randbedingungen untersucht. Dazu wurden in [I–III] verschiedene *mikroskopische* Theorien entwickelt. Diese leiten sich – im Gegensatz zu phänomenologischen Theorien – direkt aus der Mastergleichung für die mikroskopischen Zustandsvariablen ab.

Im folgenden werden die grundlegenden Ideen dieser Verfahren kurz vorgestellt. Abschnitt 3.4 enthält eine Diskussion der zugrundeliegenden Physik, wie sie sich aus den analytischen Ergebnissen und dem Vergleich mit Monte-Carlo-Simulationen ableiten läßt.

Obwohl alle Verfahren im Prinzip auch zur Beschreibung der vollen Dynamik herangezogen werden können, wird im folgenden nur der stationäre Zustand betrachtet. Hier sind die Observablen zeit- und auf Grund der Translationsinvarianz des stationären Zustandes auch ortsunabhängig.

## 3.1 Die Cluster-Approximation

Die einfachste mikroskopische Beschreibung des NaSch-Modells erhält man, wenn man Korrelationen zwischen den Zuständen benachbarter Zellen vollständig vernachlässigt. Die zentralen Größen einer solchen *Mean-Field-Theorie* (MFT) sind die Wahrscheinlichkeiten $P(\tau)$, eine Zelle im Zustand $\tau$ zu finden. Dabei ist $\tau = v$, wenn die Zelle durch ein Fahrzeug mit Geschwindigkeit $v$ besetzt ist, und $\tau = -1$ für eine leere Zelle.

Die $P(\tau)$ lassen sich im Rahmen der MFT für beliebige Parameterwerte $v_{max}$, $p$ und $\rho$ angeben [I]. Vergleicht man die hieraus bestimmten Fundamentaldiagramme mit denen aus Computersimulationen, so fällt auf, daß die MFT den Fluß deutlich unterschätzt. Korrelationen spielen daher eine wichtige Rolle. Da die MF-Flüsse zu klein sind, kann man auch bereits qualitative Aussagen über die Natur der Korrelationen machen: Sie müssen zur Erhöhung des Flusses beitragen. Dies ist nur möglich, wenn die Wahrscheinlichkeit, vor einem Fahrzeug einen leeren Platz zu finden, gegenüber der MF-Vorhersage erhöht ist. Dieser Effekt wird in Anlehnung an die Terminologie der Festkörperphysik als *Teilchen-Loch-Anziehung* bezeichnet [53], [I]. Eine quantitative Definition wird in Abschnitt 3.4 gegeben.

Die *Cluster-Approximation* ist eine systematische Verbesserung der MFT, die kurzreichweitige Korrelationen zwischen den Zellen exakt berücksichtigt [I][7]. Bei der $n$-Cluster-Approximation wird ein Cluster aus $n$ benachbarten Zellen exakt behandelt. Dieser Cluster wird dann auf selbstkonsistente Weise an den Rest des Systems angekoppelt.

Für einen $n-$Cluster, der aus $n$ Zellen im Zustand $\boldsymbol{\tau}_j^{(n)}(t) = (\tau_j(t), \ldots, \tau_{j+n-1}(t))$ zur Zeit $t$ besteht, kann man eine exakte Gleichung für die Zeitentwicklung der Clusterwahrscheinlichkeit $P(\tau_j(t), \ldots, \tau_{j+n-1}(t))$ ableiten. Man muß dabei jeweils die $v_{max}$ Zellen zur linken und zur rechten dieses Cluster berücksichtigen. Deren Zustand bestimmt, ob Autos in den zentralen Cluster hineinfahren bzw. ihn verlassen können. Deshalb hängt der Zustand $\boldsymbol{\tau}_j^{(n)}(t+1)$ des Cluster zur Zeit $t+1$ nicht nur von seinem eigenen Zustand zur $t$ ab, sondern auch von $(\tau_{j-v_{max}}(t), \ldots, \tau_{j-1}(t))$ und $(\tau_{j+n}(t), \ldots, \tau_{j+n+v_{max}-1}(t))$. Im stationären Zustand hat die Mastergleichung für einen $n-$Cluster die folgende Struktur:

$$P(\boldsymbol{\tau}^{(n)}) = \sum_{\boldsymbol{\tau}^{(n+2v_{max})}} W(\boldsymbol{\tau}^{(n+2v_{max})} \to \boldsymbol{\tau}^{(n)}) P(\boldsymbol{\tau}^{(n+2v_{max})}). \tag{11}$$

Dabei ist $\boldsymbol{\tau}^{(n+2v_{max})} = (\tau_{j-v_{max}}, \ldots, \tau_{j+n+v_{max}-1})$. Die Übergangswahrscheinlichkeiten $W(\boldsymbol{\tau}^{(n+2v_{max})} \to \boldsymbol{\tau}^{(n)})$ werden aus den Regeln R1-R4 bestimmt. Die Mastergleichung für einen $n-$Cluster beinhaltet also $(n+2v_{max})-$Cluster-Wahrscheinlichkeiten. In einem translationsinvarianten stationären Zustand hängen die Wahrscheinlichkeiten $P(\boldsymbol{\tau}(t))$ nicht von $j$ ab.

Um aus der Hierarchie von Mastergleichungen (11) für verschiedene Clustergrößen einen Satz von geschlossenen Gleichungen zu gewinnen, muß man die $(n+2v_{max})-$Cluster durch die $n-$Cluster-Wahrscheinlichkeiten ausdrücken. Dies geht i.a. nur approximativ. Man faktorisiert daher in ein Produkt aus $n-$Clustern. Dies ist in Abb. 4 für $n = 1, 2, 3$ und $v_{max} = 2$ veranschaulicht.

Die Wahrscheinlichkeit $P(\boldsymbol{\tau})$ das System in der Konfiguration $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_L)$ zu finden, hat in der 1-Cluster-Näherung die einfache Form

$$P(\tau_1, \ldots, \tau_L) = \prod_{j=1}^{L} P(\tau_j). \tag{12}$$

Dies entspricht gerade der Mean-Field-Theorie. Für die 2-Cluster-Approximation hat man eine Faktorisierung der Form

$$P(\tau_1, \ldots, \tau_L) \propto P(\tau_1, \tau_2) P(\tau_2, \tau_3) \cdots P(\tau_{L-1}, \tau_L) P(\tau_L, \tau_1). \tag{13}$$

Die 3-Cluster-Näherung ist in Abb. 4c grafisch dargestellt.

I.a. liefert die Mastergleichung $(v_{max}+1)^n$ nichtlineare Gleichungen für die $n$-Cluster-Approximation. Diese Zahl kann mit Hilfe der sog. Kolmogorov-Konsistenzbedingungen [54] reduziert werden. Trotzdem ist eine Lösung des Gleichungssystems (11) (mit faktorisierten Clusterwahrscheinlichkeiten) nur für relativ kleine Clustergrößen möglich [I]. Die

[7] Erste Ergebnisse finden sich in [53].

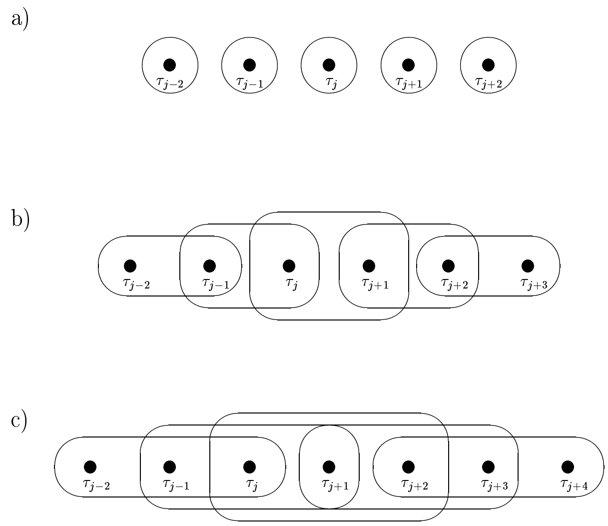


Abbildung 4: Die $n-$Cluster-Näherung für a) $n = 1$ (d.h. Mean-Field), b) $n = 2$ und c) $n = 3$. Gezeigt ist jeweils der zentrale $n-$Cluster, der auf Platz $j$ beginnt, und alle anderen Cluster, die in der Mastergleichung (11) im Fall $v_{max} = 2$ berücksichtigt werden müssen.

Qualität der Näherung nimmt mit wachsendem $n$ zu und für $n \to \infty$ wird das $n$-Cluster-Ergebnis exakt.

Für $v_{max} = 1$ ist allerdings schon die 2-Cluster-Approximation exakt [53],[I]. Dies äußert sich darin, daß alle höheren Approximationen identische Resultate liefern. Die Clusterwahrscheinlichkeiten $P(n_j, n_{j+1})$ (mit den Besetzungszahlen $n_j$) im stationären Zustand sind explizit durch

$$\begin{aligned} P(0,0) &= 1 - \rho - P(1,0), \\ P(1,1) &= \rho - P(1,0), \\ P(1,0) &= P(0,1) = \frac{1}{2\bar{p}} \left[ 1 - \sqrt{1 - 4\bar{p}\rho(1-\rho)} \right], \end{aligned} \tag{14}$$

gegeben, mit $\bar{p} = 1 - p$. Mit Hilfe von kombinatorischen Argumenten kann man zeigen [I], daß (13) und (14) den stationären Zustand exakt beschreiben.

Mit $J(\rho, p) = \bar{p}P(1,0)$ erhält man für den Fluß

$$J(\rho, p) = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - 4\bar{p}(1-\rho)\rho} \right). \tag{15}$$

Da für $v_{max} = 1$ nur sehr kurzreichweitige Korrelationen existieren, liegt die Vermutung nahe, daß diese auch für $v_{max} > 1$ dominieren und deshalb die Cluster-Approximation gute Ergebnisse liefert. Allerdings erhält man für $v_{max} = 2$ schon für die 2-Cluster-Approximation ein nichtlineares Gleichungssystem, das nur numerisch gelöst werden kann. Die mit der $n$-Cluster-Approximation ($n = 1, \ldots, 5$) bestimmten Fundamentaldiagramme

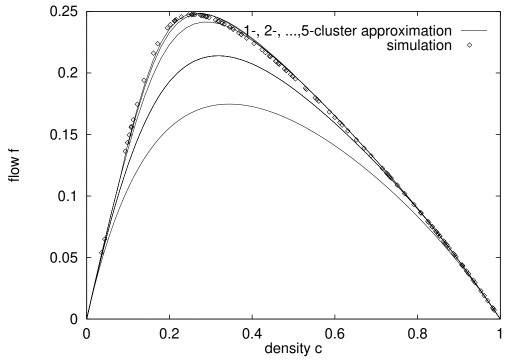


Abbildung 5: Vergleich von Simulationsergebnissen mit der $n$-Cluster-Approximation ($n = 1, \ldots, 5$ von unten nach oben) für das Fundamentaldiagramm für $v_{max} = 2$ und $p = 1/2$.

werden in Abb. 5 mit den Ergebnissen von Monte Carlo Simulationen verglichen. Man findet eine schnelle Konvergenz und schon für $n = 4$ ist die Differenz zwischen den Simulationsergebnissen und der Cluster-Approximation sehr klein.

## 3.2 Fahrzeug-orientierte Mean-Field-Theorie

Die *Fahrzeug-orientierte Mean-Field-Theorie (car-oriented mean-field, COMF)* [II] ist eine andere Möglichkeit, Korrelationen bei der analytischen Beschreibung zu berücksichtigen.

Die Regeln R1-R4 lassen sich vollständig durch $d_j$ und $v_j$ ausdrücken. Deshalb kann der Zustand des Systems statt durch Besetzungszahlen $\tau_j$ auch durch die Abstände und Geschwindigkeiten[8]. Eine solche Beschreibung ist bei Computersimulationen für kleine Dichten sinnvoll [I], da man es dann mit einer kleineren Anzahl von Variablen – und somit geringerem Speicherbedarf und erhöhter Rechengeschwindigkeit – im Vergleich zur Besetzungszahldarstellung zu tun hat.

Die zentrale Größe bei COMF ist die Wahrscheinlichkeit $P_n(v)$, daß ein Auto mit Geschwindigkeit $v$ genau $n$ freie Zellen vor sich findet. Auf diese Art und Weise werden gewisse langreichweitige Korrelationen berücksichtigt. Das Wesentliche an COMF ist, daß Korrelationen *zwischen* den Abständen vernachlässigt werden.

Für $v_{max} = 1$ erhält man aus der Mastergleichung folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
P_0(t+1) &= \bar{g}(t)\left[P_0(t) + \bar{p}P_1(t)\right], \\
P_1(t+1) &= g(t)P_0(t) + \left[\bar{p}g(t) + p\bar{g}(t)\right]P_1(t) + \bar{p}\bar{g}(t)P_2(t), \\
P_n(t+1) &= pg(t)P_{n-1}(t) + \left[\bar{p}g(t) + p\bar{g}(t)\right]P_n(t) + \bar{p}\bar{g}(t)P_{n+1}(t), \quad (n \geq 2) \qquad (16)
\end{aligned}$$

wobei $g(t) = \bar{p}\sum_{n\geq 1} P_n(t) = \bar{p}[1 - P_0(t)]$ die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, daß ein Auto im nächsten Zeitschritt fährt. $\bar{g}(t) = 1 - g(t)$ ist dann die Wahrscheinlichkeit, daß das

[8] Für eine vollständige Äquivalenz muß man noch die Position $x_1$ eines festen Fahrzeuges $j = 1$ angeben. Aus $x_1$, $\{d_j\}$ und $\{v_j\}$ kann man dann eindeutig $\{\tau_j\}$ bestimmen.

Auto nicht fährt. Als Beispiel betrachten wir die Gleichungen für $n \geq 2$. Da die Geschwindigkeitsdifferenz zweier Fahrzeuge höchstens $v_{max} = 1$ beträgt, muß ein Abstand von $n$ Zellen zur Zeit $t+1$ aus einem Abstand der Länge $n-1$, $n$ oder $n+1$ im vorigen Zeitschritt hervorgegangen sein. Ein Abstand $n-1$ entwickelt sich in $n$, wenn nur das erste Fahrzeug fährt (das passiert mit Wahrscheinlichkeit $g(t)$) und das zweite Auto im Trödelschritt bremst (mit Wahrscheinlichkeit $p$), d.h. die Gesamtwahrscheinlichkeit für diesen Prozeß ist $pg(t)P_{n-1}(t)$. Auf ähnliche Art erhält man die Wahrscheinlichkeit, daß sich der Abstand nicht ändert aus der Wahrscheinlichkeit $\bar{p}g(t)$, daß beide Autos fahren und der Wahrscheinlichkeit $p\bar{g}(t)$, daß beide Autos nicht fahren. Der Abstand verringert sich um 1, wenn das hintere Auto fährt, das vordere aber nicht (Wahrscheinlichkeit $\bar{p}\bar{g}(t)$).

Drückt man $g(t)$ durch die $P_n$ aus, so erhält man ein System von unendlich vielen nichtlinearen Gleichungen. Dieses kann aber mit Hilfe von Erzeugendenfunktionen gelöst werden [II]. Für $v_{max} = 1$ findet man eine rein exponentielle Abstandsverteilung $P_n = Cz^n$ ($n \geq 1$), wobei $C$ und $z$ von $\rho$ und $p$ abhängen. Für den Fluß $J(\rho, p) = \rho g$ wird das exakte Ergebnis (15) reproduziert.

Im Fall $v_{max} = 2$ erhält man zwei gekoppelte Systeme vom Typ (16), da man nun zwischen $P_n(v=1)$ und $P_n(v=2)$ zu unterscheiden hat. Diese Systeme kann man wieder lösen, man findet aber nicht den exakten stationären Zustand [II].

## 3.3 Paradiesische Zustände

Ein wichtiger Effekt der parallelen Dynamik ist die Existenz von Konfigurationen, die durch die Dynamik niemals erreicht werden können [III]. Diese Konfigurationen bezeichnet man als *paradiesische Zustände* oder *Garten Eden Zustände* [55], da es für sie keinen Vorgänger gibt. Hat man sie einmal verlassen, so kann man nicht mehr zurückkehren. Sie können daher nur in der Anfangskonfiguration auftreten. Ein einfaches Beispiel im NaSch-Modell ist in Abb. 6 gezeigt. Die Geschwindigkeit eines Fahrzeuges entspricht gerade der Zahl der Zellen, um die es sich im letzten Zeitschritt bewegt hat. Für die Konfiguration aus Abb. 6 heißt das, daß sich die beiden Fahrzeuge im vorherigen Zeitschritt in der gleichen Zelle befunden haben müßten. Da dies aber nicht erlaubt ist, kann sich eine lokale Konfiguration wie die angegebene nicht unter der NaSch-Dynamik entwickeln.

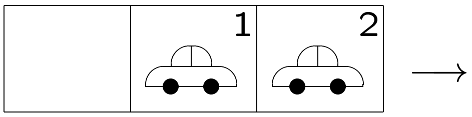


Abbildung 6: Ein paradiesischer Zustand im NaSch-Modell mit $v_{max} \geq 2$.

Solche Zustände waren in anderen Modellen schon länger bekannt [55]. In [III] wurde deren Existenz erstmals für analytische Rechnungen ausgenutzt. Die paradiesischen Zustände lassen sich klassifizieren und aus dem Konfigurationsraum eliminieren. Die Frage, ob ein Zustand paradiesisch ist oder nicht, läßt sich durch die Untersuchung lokaler

Konfigurationen entscheiden. Für $v_{max} = 1$ gibt es zwei lokale Garten Eden Zustände, für $v_{max} = 2$ sind es bereits zehn. In dem reduzierten Raum kann man dann eine einfache Mean-Field-Approximation durchführen (*paradiesische Mean-Field-Theorie, pMF*). Die Resultate der pMF stellen eine erhebliche Verbesserung gegenüber der einfachen MF-Theorie dar [III]. Überraschenderweise erhält man für $v_{max} = 1$ das exakte Ergebnis (15).

## 3.4 Mikroskopische Struktur des stationären Zustandes

Wie bereits erwähnt, unterschätzt die MFT den Fluß erheblich. Die Diskrepanz wird mit wachsendem $v_{max}$ größer. Korrelationen spielen daher eine wichtige Rolle. Wie in Kap. 3.1 erläutert, existiert eine Teilchen-Loch-Anziehung. Mathematisch läßt sich diese im Rahmen der 2-Cluster-Näherung für den Fall $v_{max} = 1$ durch $P(1,0) > P(1)P(0) = \rho(1-\rho)$ ausdrücken. Um die Ursachen der Teilchen-Loch-Anziehung zu verstehen, sind die analytischen Verfahren sehr hilfreich.

Für $v_{max} = 1$ sind alle vorgestellten Verfahren (2-Cluster, COMF und pMF) exakt. Dies bedeutet, daß nur Korrelationen benachbarter Zellen wichtig sind. Besonders aufschlußreich ist die Tatsache, daß pMF exakt ist. Es gibt daher keine „echten“ Korrelationen, sondern deren Ursache liegt vollständig in der Existenz paradiesischer Zustände. Zugleich versteht man hiermit den Unterschied zur zufällig-sequentiellen Dynamik, bei der bereits die MFT das exakte Ergebnis liefert. In diesem Fall ist der stationäre Zustand also vollständig unkorreliert.

Die Situation ändert sich für den Fall $v_{max} > 1$. Hier ist pMF nicht mehr exakt[9]. Es existieren daher „echte“ Korrelationen. Dies erklärt die in [I] gemachte Beobachtung, daß das NaSch-Modell für $v_{max} = 1$ und $v_{max} > 1$ qualitativ unterschiedliches Verhalten zeigt. Außerdem macht es verständlich, warum bisher eine exakte Bestimmung des stationären Zustandes für $v_{max} > 1$ nicht gelungen ist.

Interessant ist auch die Abhängigkeit der mikroskopischen Struktur des stationären Zustands vom Trödelparameter $p$. Um diese besser zu verstehen, ist es hilfreich, die deterministischen Fälle $p = 0$ und $p = 1$ zu untersuchen.

Für $p = 0$ ist das Verhalten vollständig durch den mittleren Abstand zum Vordermann bestimmt [56]. Für Dichten $\rho \leq 1/(v_{max}+1)$ arrangieren die Autos sich so, daß alle Abstände größer als $v_{max}$ sind. Im stationären Zustand fahren sie daher mit der Geschwindigkeit $v_{max}$. Für Dichten $\rho > 1/(v_{max}+1)$ ist dies nicht mehr möglich. Hier wird die Geschwindigkeit durch den mittleren Abstand $\bar{d} = \frac{L-N}{N} = \frac{1-\rho}{\rho}$ zum Vordermann bestimmt. Das Fundamentaldiagramm ist daher durch

$$J(\rho) = \begin{cases} v_{max}\rho & \text{für } \rho \leq 1/(v_{max}+1), \\ 1-\rho & \text{für } \rho > 1/(v_{max}+1) \end{cases} \tag{17}$$

gegeben. Dabei ist zu beachten, daß der stationäre Zustand nicht eindeutig ist, sondern durch die Anfangsbedingung bestimmt wird.

[9] Genausowenig ist die MFT exakt im Fall zufällig-sequentieller Dynamik.

Für $p = 0$ gibt es keine spontane Staubildung, denn Überreaktionen sind nicht möglich. Das Verhalten wird durch eine rein „repulsive“ Wechselwirkung zwischen den Fahrzeugen bestimmt.

Der Fall $p = 1$ ist nicht äquivalent zu einem Modell mit Höchstgeschwindigkeit $v_{max} - 1$. Für diesen Wert des Trödelparameters wird ein stehendes Fahrzeug niemals fahren können. Deshalb wird der Fluß im stationären Zustand verschwinden, sobald ein Auto mit Geschwindigkeit 0 existiert. Dies kann auf Grund der Anfangsbedingung geschehen oder durch Wechselwirkungen. Allerdings existieren für Dichten $\rho \leq 1/3$ und $v_{max} > 1$ metastabile Zustände mit nicht verschwindendem Fluß. So ist z.B. für $\rho = 1/3$ der Zustand ..1..1..1.. stationär mit Fluß $J = 1/3$. Allerdings sind diese Zustände instabil unter lokalen Störungen. Die Änderung der Geschwindigkeit *eines* Fahrzeuges auf 0 oder die Reduzierung *eines* Abstandes auf 0 oder 1 genügt, um den Fluß zusammenbrechen zu lassen.

Das Verhalten für $0 < p < 1$ interpoliert zwischen diesen beiden Grenzfällen. Besonders interessant ist der Grenzfall $p \to 0$. Ein Vergleich der Ergebnisse von Monte-Carlo-Simulationen mit den analytischen Resultaten zeigt, daß sowohl das COMF-Fundamentaldiagramm als auch jene aus der 3-Cluster-Approximation asymptotisch exakt sind. Schon für den „realistischen“ Wert $p = 0.1$ ist die Übereinstimmung exzellent [IV]. Die 2-Cluster-Näherung kann dagegen nicht alle Korrelationen richtig erfassen. Hier gibt es deutliche Abweichungen im Limes $p \to 0$.

Eine genauere Untersuchung zeigt aber deutliche Unterschiede in der Qualität von 3-Cluster-Approximation und COMF [IV]. Es wurden starke Hinweise darauf gefunden, daß die 3-Cluster-Näherung auch für andere Meßgrößen asymptotisch exakt ist. Bei COMF dagegen treten bei einigen Observablen deutliche Abweichungen zu den Simulationsergebnissen auf. So wird z.B. die Zahl der Fahrzeuge mit Geschwindigkeit 1 über- und die mit der Geschwindigkeit 2 unterschätzt. Dies ist umso erstaunlicher, als die (gewichtete) Summe aus diesen beiden Größen, d.h. der Fluß, richtig wiedergegeben wird. Der Grund für diese Abweichungen liegt darin, daß COMF nicht in der Lage ist, die lokale Struktur des stationären Zustandes zu erfassen [IV]. Insbesondere die Stabilität von Konfigurationen vom Typ '.1.1.1.' wird überschätzt. Diese sind aber instabil unter Fluktuationen des Abstandes, die in COMF gerade vernachlässigt werden.

Für kleine $p$ wird die mikroskopische Struktur des stationären Zustandes durch die repulsive Wechselwirkung zwischen den Fahrzeugen dominiert. Mit wachsendem $p$ erkennt man aber ein Tendenz zur Phasenseperation in gestaute und Freiflußbereiche. Ein stehendes Fahrzeug kann hier auch bei niedrigen Dichten einen Stau auslösen, da die Anfahrwahrscheinlichkeit relativ gering ist. Die entstehenden Staus sind typischerweise nicht kompakt, sondern von der Form '.0.0.0.', da ein auf den Stau auffahrendes Fahrzeug mit großer Wahrscheinlichkeit noch einmal trödelt. Insgesamt kann man sagen, daß das Verhalten des NaSch-Modells für $0 < p < 1$ durch die Konkurrenz der beiden „Fixpunkte“ $p = 0$ und $p = 1$ bestimmt wird.

# 4 Matrixprodukt-Ansatz

Bei den in Kapitel 3 beschriebenen Methoden handelt es sich im Prinzip um Näherungsverfahren, die in Spezialfällen zu exakten Ergebnissen führen. Es stellt sich nun die Frage, ob es möglich ist, systematisch nach exakten Lösungen zu suchen. Für stochastische Systeme in einer Dimension gibt es tatsächlich eine Technik, die dies erlaubt, den sog. Matrixprodukt-Ansatz.

Die Bedeutung des Matrixprodukt-Ansatzes für Quantenspinketten wurde zuerst in [30–32] erkannt (siehe auch [57, 58]). Insbesondere in [32] konnte gezeigt werden, daß der MPA eng mit dem Konzept des *Optimum-Grundzustandes* (OGZ) zusammenhängt. Dieses Konzept wird in Abschnitt 4.1 ausführlich vorgestellt. Ist der Grundzustand eines Vielteilchensystems ein OGZ, so kann seine Bestimmung auf ein lokales Problem zurückgeführt werden.

Der Matrixprodukt-Ansatz für OGZ hat sich mittlerweile zu einem Standardverfahren für Spinsysteme entwickelt. In jüngster Zeit hat er vor allem Anwendungen auf Leitersysteme [59, 60] und zweidimensionale Spinmodelle [61] gefunden und so wesentlich zu einem vertieften Verständnis dieser Systeme beigetragen.

Die Bedeutung des Matrixprodukt-Ansatzes wird auch dadurch unterstrichen, daß sich bei der sogenannten Dichtematrix-Renormierung der Zustand asymptotisch einem Matrixprodukt-Zustand nähert [62].

Die ersten Anwendungen des Matrixprodukt-Ansatzes für stochastische Systeme finden sich in [57, 63]. In den letzten Jahren konnte sogar gezeigt werden, daß eine Verallgemeinerung des OGZ, der sogenannte *Cancelling*-Mechanismus[10], generisch für deren stationäre Zustände ist. Dies wird ausführlich in Abschnitt 4.2 erläutert.

## 4.1 Optimum-Grundzustände und MPA

Betrachten wir zunächst eine Quantenspinkette mit periodischen Randbedingungen, die durch einen Hamilton-Operator der Form $\mathcal{H} = \sum_{j=1}^{L} h_{j,j+1}$ beschrieben wird, wobei $h_{j,j+1}$ ein lokaler *hermitescher* Hamiltonian ist, der nur auf die Spins $j$ und $j+1$ wirkt.

Man kann durch Addition einer geeigneten Konstanten immer erreichen, daß der kleinste Eigenwert von $h_{j,j+1}$ – die lokale Grundzustandsenergie – gleich Null ist. Dann ist $h_{j,j+1}$ positiv-semidefinit und somit auch $\mathcal{H}$ als Summe positiv-semidefiniter Operatoren. Deshalb ist Null eine untere Schranke für die (globale) Grundzustandsenergie $E_0$ von $\mathcal{H}$, d.h. $E_0 \geq 0$. Im Normalfall ist $E_0$ echt größer als Null ($E_0 > 0$) und lokal angeregte Zustände von $h_{j,j+1}$ tragen zum globalen Grundzustand bei. In diesem Fall ist eine explizite Konstruktion des globalen Grundzustandes i.a. nicht möglich.

Im Spezialfall $E_0 = 0$ dagegen ist

$$\mathcal{H}|\psi_0\rangle = 0 \tag{18}$$

[10]In Ermangelung eines gebräuchlichen deutschen Ausdruckes wird im folgenden weiter die englische Form verwendet.

und deshalb gilt für alle $j$

$$h_{j,j+1}\,|\psi_0\rangle \;=\; 0. \tag{19}$$

Ein Zustand $|\psi_0\rangle$ heißt *Optimum-Grundzustand* von $\mathcal{H}$ genau dann, wenn die Bedingung (19) erfüllt ist. Dies bedeutet insbesondere, daß die Grundzustandsenergie unabhängig von der Systemgröße ist, d.h. es gibt keine finite-size Korrekturen.

Die grundlegende Idee des MPA besteht nun darin, den Grundzustand als ein Produkt von Matrizen (in einem Hilfsraum) auszudrücken:

$$|\psi_0\rangle \;=\; \mathrm{Spur}\,(m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_L)\,. \tag{20}$$

Die Einträge $(m_j)_{\alpha,\beta}$ der Matrix $m_j$ sind Linearkombinationen $(m_j)_{\alpha,\beta} = \sum_n A_n^{(\alpha,\beta)}|n\rangle_j$ der Basiszustände $|n\rangle_j$ des lokalen Hilbertraumes am Platz $j$. '$\cdot$' bezeichnet die gewöhnliche Matrixmultiplikation in Verbindung mit einem Tensorprodukt der Matrixelemente. Unter einem MPA versteht man im engeren Sinne einen Ansatz der Form (20) mit endlichdimensionalen Matrizen $m_j$. Man beachte, daß $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_L$ die gleiche Dimension wie die Matrizen $m_j$ hat, aber die Einträge sind nun komplizierte Linearkombinationen von Tensorprodukt-Zuständen. In [30–32] wurden z.B. Spin-1-Ketten untersucht. In diesem Fall besteht die lokale Basis $|n\rangle_j$ aus den $S^z-$Eigenzuständen $|+\rangle_j$, $|0\rangle_j$ und $|-\rangle_j$ und die $m_j$ sind $2 \times 2-$Matrizen.

Die Spur in (20) garantiert die Translationinvarianz des Grundzustandes. Für andere Randbedingungen muß sie durch eine geeignete Linearkombination der Elemente von $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_L$ ersetzt werden.

Die Bedingung (19) ist erfüllt, falls

$$h_{j,j+1}\,(m_j \cdot m_{j+1}) \;=\; 0\;, \tag{21}$$

d.h. alle Einträge von $m_j \cdot m_{j+1}$ sind lokale Grundzustände von $h_{j,j+1}$.

Eine zu (20) äquivalente Darstellung ist

$$m_j = \sum_n A_n |n\rangle_j \tag{22}$$

mit geeigneten Matrizen $A_n$. Im Gegensatz zu den $m_j$ sind die Elemente von $A_n$ reelle Zahlen.

Nach Vertauschung von Hilfs- und Zustandsraum kann (20) auch in der Form

$$|\psi_0\rangle = \mathrm{Spur}(A \otimes A \otimes \ldots \otimes A) \quad , \tag{23}$$

geschrieben werden. $A$ ist der Vektor mit den (matrixwertigen) Komponenten $A_n$. Die Bedingung (21) nimmt die Form

$$h_{j,j+1}\,(A \otimes A) \;=\; 0\;, \tag{24}$$

an. Es gibt also zwei äquivalente Darstellungen (20) und (23) von $|\psi_0\rangle$ und der zugehörigen Optimalitätsbedingung (21) bzw. (24).

## 4.2 MPA für stochastische Prozesse

Im folgenden wird nun gezeigt, wie der MPA zur Konstruktion stationärer Zustände $|P_0\rangle$ stochastischer Prozesse benutzt werden kann. Im Gegensatz zum Fall der Quantenspinketten ist die „Grundzustandsenergie" des stochastischen Hamilton-Operators $\mathcal{H}$ definiert durch (6) und (7) bereits bekannt. Aus (5) erkennt man, daß $\mathcal{H}|P_0\rangle = 0$ und deshalb ist die Grundzustandsenergie Null, und zwar *unabhängig* von der Systemgröße. Dies liefert bereits einen ersten Hinweis auf die Anwendbarkeit des MPA und einer geeigneten Verallgemeinerung des OGZ-Konzeptes.

Hinrichsen et al. [64] haben erkannt, daß es für stochastische Prozesse sinnvoll ist, für einen MPA der Form (23) die Bedingung (19) durch die allgemeinere Bedingung

$$h_{j,j+1}(A \otimes A) = X \otimes A - A \otimes X \ , \tag{25}$$

zu ersetzen. Der Vektor $X$ ist i.a. verschieden von $A$, hat aber die gleiche Struktur. Für periodische Randbedingungen sieht man sofort, daß sich die divergenzartigen Terme auf der rechten Seite von (25) bei Summation über $j$ wegheben.

Für $X = A$ reduziert sich (25) zu (24). Dies ist z.B. immer für Quantenspinketten mit den Standardsymmetrien der Fall. In diesem Sinne kann man daher (25) als Verallgemeinerung des OGZ-Konzeptes ansehen. Man bezeichnet (25) aus naheliegenden Gründen auch als *Cancelling-Mechanismus*. Er erlaubt es, die Bestimmung des stationären Zustandes auf ein lokales Problem zurückzuführen.

Da die Struktur des stationären Zustandes bekannt ist, lassen sich allgemeine Ergebnisse ableiten. So wurden z.B. in [65] allgemeine Zusammenhänge zwischen Erwartungswerten eines Modells mit geordnet-sequentieller und des gleichen Modells mit Untergitter-paralleler Dynamik gefunden.

Für den Fall nicht-periodischer Randbedingungen garantiert (25) alleine nicht mehr die Stationarität und man benötigt zusätzliche Bedingungen für die Ränder. Für einen stochastischen Hamilton-Operator der Form

$$\mathcal{H} = h_1 + \sum_{j=1}^{L-1} h_{j,j+1} + h_L \tag{26}$$

ist dies leicht möglich. Die Operatoren $h_1$ bzw. $h_L$ wirken dabei nur auf den Randplätzen 1 bzw. $L$. Man überprüft leicht, daß die Bedingungen

$$\langle W|h_1 A \ = \ -\langle W|X \ , \tag{27}$$

$$h_L A|V\rangle \ = \ X|V\rangle \tag{28}$$

mit geeigneten Vektoren $\langle W|$ und $|V\rangle$ sicherstellen, daß die Stationaritätsbedingung erfüllt ist. Der MPA hat in diesem Fall nicht die Form (23), sondern

$$|P_0\rangle = \frac{1}{Z_L}\langle\langle W|A \otimes \cdots \otimes A|V\rangle\rangle \ , \tag{29}$$

mit der Normierungskonstanten $Z_L$. Dies spiegelt die Tatsache wider, daß der stationäre Zustand nicht mehr translationsinvariant ist. Die Klammern $\langle\langle ... \rangle\rangle$ sollen andeuten, daß das Skalarprodukt in jeder Komponente des Vektors $A \otimes ... \otimes A$ zu bilden ist.

Etwas expliziter haben die Gewichte $P(\boldsymbol{\tau})$ einer Konfiguration $\boldsymbol{\tau} = \{\tau_1, \ldots, \tau_L\}$ im stationären Zustand eines Zweizustandsprozesses mit $A = (E, D)^t$ die Form

$$P(\tau_1, \ldots, \tau_L) = \frac{1}{Z_L} \langle W| \prod_{j=1}^{L} [\tau_j D + (1 - \tau_j) E] \, |V\rangle. \tag{30}$$

Damit hat man ein einfaches Rezept zur Berechnung des Gewichtes einer beliebigen Konfiguration $\boldsymbol{\tau}$: Übersetze die Konfiguration in ein Produkt von Matrizen durch Identifikation eines leeren Platzes ($\tau_j = 0$) mit $E$ und eines besetzten Platzes ($\tau_j = 1$) mit $D$. Damit korrespondiert z.B. die Konfiguration $011001\cdots$ mit dem Produkt $EDDEED\cdots = ED^2E^2D\cdots$. Das Gewicht erhält man dann durch Bildung des Matrixelementes mit den Vektoren $\langle w|$ und $|v\rangle$.

Setzt man die Matrixdarstellung der Operatoren $h_{j,j+1}$, $h_1$ und $h_L$ in (25), (27), (28) ein, so erhält man ein System quadratischer Gleichungen in $E, D, X_1$ und $X_2$, das man als die *Algebra* des Ansatzes (25) bezeichnet. Die Dimension der Matrizen ist durch den Ansatz noch nicht bestimmt.

Eine wichtige Anwendung des MPA für stochastische Systeme ist die Lösung des sog. *asymmetrischen Exklusionsprozesses* (*asymmetric simple exclusion process, ASEP*). Hierbei handelt es sich im wesentlichen[11] um ein NaSch-Modell mit $v_{max} = 1$ und offenen Randbedingungen. Im Inneren hüpfen die Teilchen mit der Rate $p$ nach rechts auf einen freien Platz[12]. Ist der erste Platz unbesetzt, so wird dort mit der Rate $\alpha$ ein Teilchen in das System gesetzt. Entsprechend werden Teilchen vom letzten Platz mit der Rate $\beta$ entfernt[13]. Im ASEP ist also im Gegensatz zum NaSch-Modell die Teilchenzahl nicht mehr erhalten.

Der ASEP ist nicht nur von theoretischem Interesse, z.B. als einfaches Modellsystem für randinduzierte Phasenübergänge (siehe Abschnitt 5.3). Er hat auch zahlreiche Anwendungen, z.B. auf die Kinetik der Biopolymerisation [66], Oberflächenwachstum etc. [67]. Eine naheliegende Anwendung im Bereich des Straßenverkehrs ist die sog. „Bottleneck-Situation", wie man sie z.B. auf Grund von Baustellen antrifft. Dort kommt es häufig zu einer vorübergehenden Verengung von mehreren Fahrspuren auf eine einzige. Solche Situationen lassen sich mit dem ASEP einfach beschreiben, wobei die Raten $\alpha$ und $\beta$ jeweils die Übergangsbereiche zwischen Ein- und Mehrspurverkehr modellieren.

Für den Fall des ASEP erhält man für eine geeignete Wahl von $X$ die sogenannte

[11] Im engeren Sinne bezeichnet man mit ASEP den Prozeß mit zufällig-sequentieller Dynamik.

[12] Wir folgen hier der Konvention, die Hüpfwahrscheinlichkeit mit $p$ zu bezeichnen. Dies entspricht einem Trödelparameter $1 - p$ im NaSch-Modell.

[13] Für zeitlich diskrete Dynamiken sind $p$, $\alpha$ und $\beta$ Wahrscheinlichkeiten.

„DEHP-Algebra" [63]

$$\begin{aligned} p\,DE &= D+E \quad , &(31)\\ \alpha\langle W|E &= \langle W| \quad , &(32)\\ \beta D|V\rangle &= |V\rangle \quad . &(33)\end{aligned}$$

Man kann explizite Darstellungen für $D$, $E$, $\langle W|$ und $|V\rangle$ finden [63]. Auf der Linie

$$\alpha+\beta=p \tag{34}$$

existieren eindimensionale Darstellungen, d.h. die Matrizen $E$ und $D$ sind in diesem Falle reelle Zahlen. In allen anderen Fällen sind die Matrizen aber unendlich-dimensional [63].

Die Anwendbarkeit des MPA ist nicht auf zufällig-sequentielle Dynamik beschränkt. In [68–70] und [V] wurde gezeigt, daß eine Verallgemeinerung auf zeitlich diskrete Dynamiken möglich ist. Auch in diesen Fällen hat der stationäre Zustand die Form[14] (29). Wie in Abschnitt 2.1 ausgeführt, ist die zentrale Größe hier eine Transfermatrix. In den Fällen, in denen sich die Transfermatrix aus lokalen Transfermatrizen $t_{j,j+1}$ aufbauen läßt, kann man den Cancelling-Mechanismus einfach angeben. Für die geordnet-sequentielle Dynamik (entgegen der Bewegungsrichtung) erhält man z.B. [69],[V]

$$\begin{aligned} t_{j,j+1}\,[A\otimes X] &= X\otimes A\,, &(35)\\ t_L A|V\rangle &= X|V\rangle\,, &(36)\\ \langle W|t_1 X &= \langle W|A\,. &(37)\end{aligned}$$

Bei der Aktualisierung wird zunächst am rechten Ende der Kette ein „Defekt" $X$ erzeugt (siehe (36)), der dann sukzessive durch die $t_{j,j+1}$ nach links transportiert und dort wieder vernichtet wird (siehe (37)). Dabei erhält man den Anfangszustand zurück.

Die Bedeutung des MPA für eindimensionale stochastische Systeme wird durch ein interessantes Ergebnis von Krebs und Sandow [71] besonders unterstrichen. Sie konnten zeigen, daß für Prozesse mit Nächst-Nachbar-Wechselwirkung, offenen Randbedingungen und zufällig-sequentieller Dynamik der stationäre Zustand generisch von der Form (29) mit einem Cancelling-Mechanismus (25), (27), (28) ist.

Im Hinblick auf die Anwendung des MPA auf Verkehrsmodelle mit $v_{max} > 1$ ist eine Verallgemeinerung dieses Resultates auf längerreichweitige Wechselwirkungen interessant. Das Entscheidende hierbei ist nun, den richtigen Cancelling-Mechanismus zu finden. Dies ist in [VI] gelungen. Zur Vereinfachung wird im folgenden nur der Fall der Wechselwirkung zwischen übernächsten Nachbarn diskutiert. Solche Prozesse werden durch einen stochastischen Hamiltonoperator der Form

$$\mathcal{H}=h_{1,2}+\sum_{j=1}^{L-2}h_{j,j+1,j+2}+h_{L-1,L} \tag{38}$$

[14] Eine Ausnahme ist der Fall Untergitter-paralleler Dynamik. Dort spiegelt sich die Untergitterstruktur im Ansatz wieder: $|\psi_0\rangle=\frac{1}{Z_L}\langle\langle A\otimes X\otimes\ldots\otimes A\otimes X\rangle\rangle$.

beschrieben[15]. In [VI] konnte für einen MPA vom Typ (29) gezeigt werden, daß sich mit einem Cancelling-Mechanismus der Form

$$\begin{aligned} h_{j,j+1,j+2}(A \otimes A \otimes A) &= X \otimes A - A \otimes X \,, & (39)\\ \langle W|h_{1,2}A &= -\langle W|X \,, & (40)\\ h_{L-1,L}A|V\rangle &= X|V\rangle & (41) \end{aligned}$$

eine zum Krebs-Sandow-Ergebnis analoge Aussage beweisen läßt. Formal sieht dies dem Mechanismus (25), (27), (28) sehr ähnlich. Man beachte jedoch, daß der Vektor $X$ nicht mehr die gleiche Struktur wie der Vektor $A$ haben muß. Für $m-$Zustandsmodelle hat $A$ $m$ Elemente, $X$ aber $m^2$.

(39)–(41) enthält als Spezialfall einen Mechanismus, der in [72] vorgeschlagen wurde, jedoch nur für sehr spezielle Modelle anwendbar ist.

Obiges Ergebnis ist nicht auf Wechselwirkungen zwischen übernächsten Nachbarn beschränkt, sondern gilt in entsprechender Verallgemeinerung für beliebige Wechselwirkungsreichweiten $r \geq 2$ [VI].

Als erste Anwendung konnte ein stochastisches Verkehrsmodell mit $v_{max} > 1$ exakt gelöst werden, ebenso ein Modell mit $v_{max} = 1$, bei dem die Trödelwahrscheinlichkeit von der Zahl der freien Zellen vor dem Fahrzeug abhängt [VI] (siehe auch [73]).

Für geordnet-sequentielle und Untergitter-parallele Dynamik lassen sich mit geeigneten Cancelling-Mechanismen ebenfalls Verallgemeinerung des Krebs-Sandow-Ergebnisses angeben [65, 74]. Lediglich die parallele Dynamik hat sich bisher einem solchen allgemeinen Zugang durch den MPA verschlossen. Zwar sind mittlerweile spezielle Lösungen (für den ASEP) bekannt [75, 76], die Frage, wie ein allgemeiner Cancelling-Mechanismus für parallele Dynamik auszusehen hat, ist aber noch unbeantwortet.

# 5 Phasenübergänge

Wie schon mehrfach betont, gibt es keine allgemeine Theorie des Nichtgleichgewichts. Dies gilt insbesondere für Phasenübergänge in Systemen fern vom Gleichgewicht. Im Gegensatz zu Gleichgewichtsphasenübergängen, wo solch wichtige Konzepte wie Universalität, Renormierungsgruppe etc. herangezogen werden können, fehlt hier ein geeigneter theoretischer Rahmen. Man muß daher hoffen, daß die Untersuchung geeigneter Modelle wertvolle Informationen zum Verständnis komplexer Phänomene liefert.

Im folgenden werden Phasenübergänge zwischen qualitativ verschiedenen stationären Zuständen diskreter stochastischer Modelle untersucht. Man findet ein reichhaltiges Repertoire an Übergängen (Übergänge erster Ordnung, kritisches Verhalten, Crossover) und einige überraschende Ergebnisse, die man in dieser Form im Gleichgewicht nicht beobachtet.

[15] Es sind auch Dreiteilchenprozesse erlaubt.

## 5.1 Phasenübergang im NaSch-Modell

Im deterministischen Grenzfall $p = 0$ lassen sich die stationären Zustände des NaSch-Modells leicht charakterisieren (siehe Abschnitt 3.4). Für Dichten $\rho \leq \rho^* := 1/(v_{max} + 1)$ ordnen sich die Fahrzeuge so an, daß alle mindestens $v_{max}$ freie Zellen vor sich haben. Dann gibt es keine Wechselwirkung zwischen den Autos und sie bewegen sich alle mit der Geschwindigkeit $v_j = v_{max}$. Für Dichten $\rho > \rho^*$ ist eine solche Anordnung nicht mehr möglich. Hier gibt es zwangsläufig Wechselwirkungen zwischen den Fahrzeugen.

Das qualitativ unterschiedliche Verhalten in den beiden „Phasen" läßt sich durch einen Ordnungsparameter charakterisieren. Eine geeignete Wahl ist [VII]

$$m = \frac{1}{L}\sum_{j=1}^{L} n_j n_{j+1}, \tag{42}$$

die Anzahl der Nächst-Nachbar-Paare. Für $\rho \leq \rho^*$ ist im stationären Zustand $m = 0$, für $\rho > \rho^*$ ist $m > 0$ („Fahrzeuge fahren aufeinander auf"). Damit kann man tatsächlich von einem Phasenübergang sprechen. Dieser ist von 2. Ordnung, denn bei $\rho^*$ divergiert die Korrelationslänge $\xi$ der Dichte-Dichte-Korrelationsfunktion [VII]

$$G(r) = \frac{1}{L}\sum_{j=1}^{L} n_j n_{j+r} - \rho^2 \simeq C e^{-r/\xi} - \rho^2. \tag{43}$$

$n_j$ ist dabei die Besetzungszahl der Zelle $j$, d.h. $n_j = 0$ für eine leere Zelle und $n_j = 1$ für eine besetzte Zelle.

Was ändert sich an diesem Bild, wenn man $p > 0$ betrachtet ? In diesem Falle bilden sich bereits für $\rho \leq \rho^*$ spontane Staus. Deshalb ist der Ordnungsparameter $m$ nicht mehr exakt gleich Null. Dies trifft auch für alle anderen Kandidaten eines Ordnungsparameters zu [VII], was die Vermutung nahelegt, daß es für $p > 0$ keinen „echten" Phasenübergang im NaSch-Modell gibt.

Zur Bestätigung dieser Vermutung wurden in [VII] umfangreiche Computersimulationen durchgeführt. Verschiedene Methoden zur Charakterisierung des Übergangspunktes $\rho_c(p)$ wurden untersucht [VII], [77–83]. Es zeigte sich, daß die Verfahren keinen eindeutigen Wert für $\rho_c(p)$ ergeben, obwohl immer $\rho_c(p) < \rho^*$ zu gelten scheint.

Aufschlußreich ist das Verhalten der Korrelationslänge $\xi(p)$. Sie ist für alle $p > 0$ endlich, divergiert aber im Grenzfall $p \to 0$ wie $\xi(p) \propto p^{-1/2}$. Hier spielen die analytischen Ergebnisse aus Abschnitt 3 eine wichtige Rolle, denn für den Fall $v_{max} = 1$ konnte dies anhand der exakten Lösung auch analytisch nachgewiesen werden [VII,IV].

Messungen der Lebensdauern von Staus[16] im NaSch-Modell haben gezeigt [77], daß es einen Cutoff bei großen Zeiten gibt. Hierbei handelt es sich nicht um einen finite-size- oder finite-time-Effekt. Insgesamt ergibt sich für $p > 0$ ein konsistentes Bild, wenn man

[16]Ein Problem hierbei ist, daß es viele Definitionen eines Staus gibt. In [77] sind alle die Fahrzeuge gestaut, die nach dem Bremsschritt R2 eine Geschwindigkeit $v < v_{max}$ haben.

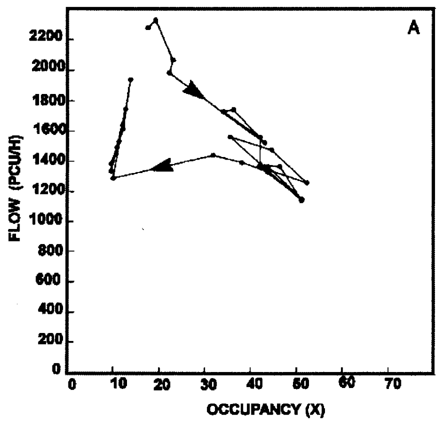


Abbildung 7: Zeitreihe einer Flußmessung (aus [45]).

annimmt, daß statt eines „echten" Phasenüberganges nur ein *Crossover* vorliegt. Das Verhalten ist in vielen Aspekten analog zu einem Phasenübergang in einem endlichen System. Auch dort findet man keine echten Divergenzen, sondern lediglich ausgeprägte Extrema. Außerdem ist die Lage dieser Extrema gegenüber den kritischen Werten im thermodynamischen Limes verschoben. Diese Verschiebung kann für unterschiedliche Größen verschieden sein. Genau dieses Verhalten findet man für das NaSch-Modell. Andere Arbeitsgruppen [77, 79, 83] sind zu ähnlichen Schlüssen gekommen. Lediglich in [81] wird noch die Meinung vertreten, daß es sich um einen echten kritischen Punkt handelt, an dem Phasenseparation vorliegt. Allerdings sind dort vorgestellten numerischen Methoden nicht in der Lage, die subtilen Unterschiede zwischen einem Crossover und einem echten Phasenübergang zu erfassen.

## 5.2 Metastabile Zustände

Gemessene, zeitgemittelte Fundamentaldiagramme haben häufig nicht eine einfache Gestalt wie z.B. in Abb. 1 (rechts) oder Abb. 5, sondern ähneln eher der in Abb. 2 gezeigten schematischen Form. In einem Dichtebereich $\rho_1 < \rho < \rho_2$ ist die Fluß–Dichte–Beziehung nicht eindeutig, sondern besteht aus zwei Ästen. Messungen an realem Verkehr haben auch gezeigt, daß in diesem Bereich Hysterese-Effekte auftreten. Abb. 7 zeigt die Zeitreihe einer Messung des Fundamentaldiagrammes. Der erste Meßwert befindet sich auf dem Ast mit hohem Fluß. Mit zunehmender Dichte wird der Fluß kleiner. Danach verringert sich die Dichte wieder und der Fluß steigt an, erreicht jedoch nicht wieder den Ausgangswert, sondern einen deutlich niedrigeren Fluß. Die Zustände auf dem Hochflußast sind i.a. nicht stabil unter Störungen. Trotzdem zeigen sie häufig sehr lange Lebensdauern. In diesem Sinne spricht man auch von *metastabilen Zuständen*.

Ein mikroskopisches Verkehrsmodell sollte in der Lage sein, ein solches Verhalten zu beschreiben und die Bedingungen für sein Auftreten zu charakterisieren. Es stellt sich heraus, daß das NaSch-Modell in seiner ursprünglichen Form nicht in der Lage ist, das oben beschriebene Verhalten zu reproduzieren. Deshalb wurde in [VIII] systematisch nach minimalen Erweiterungen des NaSch-Modells gesucht, die dies können. Zwei Modelle [84, 85] waren bereits vorher in einem anderen Zusammenhang vorgeschlagen worden. Allerdings wurde dort nicht erkannt, daß in diesen Modellen Hysterese-Effekte ähnlich den in realem Verkehr beobachteten auftreten. Erste Hinweise hierauf wurden in [86] gefunden. Demnach lassen sich Hysterese-Effekte mit Hilfe sogenannter *Slow-to-start*–Regeln implementieren. Darunter faßt man alle Regeln zusammen, die zu einem verzögerten Anfahren stehender Fahrzeuge führen. Man kann verschiedene Klassen unterscheiden: a) räumliche Regeln: Stehende Fahrzeuge benötigen mehr Platz zum Anfahren [84, 86]; b) zeitliche Regeln: Stehende Fahrzeuge fahren nicht direkt bei der ersten Möglichkeit los [85–87] und c) geschwindigkeitsabhängige Regeln. Letztere wurden in [VIII] entwickelt und sind eine einfache Verallgemeinerung der NaSch-Regeln. Im sogenannten VDR–Modell ist der Trödelparameter $p$ keine Konstante mehr, sondern hängt von der Geschwindigkeit des Fahrzeuges nach dem vorherigen Zeitschritt ab. Die NaSch-Regeln **R1** – **R4** werden um eine Regel **R0** ergänzt, die vor **R1** auszuführen ist:

**R0** Trödelparameter: Bestimme für jedes Fahrzeug $p_j = p(v_j(t))$.

Im einfachsten Fall einer slow-to-start Regel wählt man

$$p(v) = \begin{cases} p_0 & \text{falls } v = 0 \\ p & \text{falls } v > 0 \end{cases} \tag{44}$$

mit $p_0 > p$. Für stehende Fahrzeuge ist der Trödelparameter also größer als für fahrende. Diese einfache Änderung hat dramatische Konsequenzen.

Um die Unterschiede zum NaSch-Modell besonders deutlich zu machen, wird im folgenden der Fall $p \ll p_0$ betrachtet. Man erhält dann ein Fundamentaldiagramm wie in Abb. 2 gezeigt [VIII]. Auf dem Hochflußast ähnelt die mikroskopische Struktur der Zustände der des NaSch-Modells. Sie sind sehr homogen und der Fluß ist in sehr guter Näherung durch

$$J_{\text{hom}}(\rho) = \rho(v_{max} - p) \tag{45}$$

gegeben. Auf dem anderen Ast haben die Zustände jedoch eine gänzlich andere Struktur. Hier findet man Phasenseparation in einen großen gestauten Bereich und ein Freifluß-Regime. Ein einfaches phänomenologisches Argument [VIII] liefert in diesem Bereich für den Fluß

$$J_{\text{sep}}(\rho) = (1 - p_0)(1 - \rho). \tag{46}$$

Die Phasenseparation ist eine Folge der Slow-to-Start-Regel, die zu einer Verringerung des Ausflußes $J_{aus}$ aus einem Stau führt. Im NaSch-Modell ist dieser Ausfluß fast identisch mit dem maximal möglichen Fluß $J_{max}$, d.h. dem Maximum des Fundamentaldiagramms. Die Slow-to-Start-Regel verringert ihn aber erheblich und trägt so zur Stabilisierung des Staus bei. Experimentell findet man $J_{max}/J_{aus} \approx 1.5$ [88].

Zum Nachweis der Hysterese-Effekte variiert man die Dichte langsam („adiabatisch") durch Hinzufügen oder Entfernen von Fahrzeugen im stationären Zustand. Startet man mit einem relativ homogenen Zustand auf dem Hochflußast so erhält man tatsächlich Kurven, die denen in Abb. 7 ähneln. Alternativ kann man bei fester Teilchenzahl Simulationen mit unterschiedlichen Anfangsbedingungen durchführen. Startet man mit einem homogenen Zustand, bei dem alle Autos im wesentlichen den gleichen Abstand zum Vordermann haben, so erhält man einen Zustand mit hohem Fluß. Beginnt man andererseits mit einem Megastau, bei dem alle Fahrzeuge direkt hintereinander stehen, so entwickelt sich ein phasenseparierter Zustand.

Obige Ergebnisse sind auch von großer praktischer Relevanz. Bereits in den sechziger Jahren hat man die Tunnel, die Manhattan mit New Jersey verbinden, mit einem Ampelsystem ausgestattet, um die Zahl der einfahrenden Fahrzeuge zu steuern. Auf diese Weise ließ sich der Hochflußast stabilisieren und der Durchfluß um 20% steigern [89]. Mit dem VDR-Modell konnte nun eine mikroskopische Begründung für diesen Effekt gegeben werden [VIII], [90].

## 5.3 Das Phasendiagramm des ASEP

Die Tatache, daß die hier betrachteten Modelle sich nicht im Gleichgewicht befinden, führt zu einigen überraschenden Ergebnissen, die man so aus der Gleichgewichtsphysik nicht kennt. Man ist z.B. gewohnt, daß im thermodynamischen Limes die Randbedingungen das Verhalten im Innern nicht beeinflußen. Dies ist bei getriebenen Systemen anders. Es gibt sogar Phasenübergänge, die durch einfache Änderungen der Randbedingungen induziert werden, sog. *randinduzierte Phasenübergänge* [91, 92]. Dies läßt sich am Beispiel des ASEP veranschaulichen, der ein reichhaltiges Phasendiagramm aufweist. Es besteht aus drei Phasen A, B und C, die durch die funktionale Abhängigkeit des Stromes von den Übergangsraten charakterisiert sind.

In der Niedrigdichtephase A ($\alpha < \beta, \alpha_c(p)$) ist der Strom unabhängig von $\beta$. Die Teilchen werden hier sehr effektiv im Inneren der Kette transportiert und am rechten Rand entfernt. Der limitierende Faktor für den Strom ist daher die Rate $\alpha$, mit der Teilchen dem System zugeführt werden. Ein analoges Verhalten findet man in der Hochdichtephase B ($\beta < \alpha, \beta_c(p)$). Hier ist die Rate $\beta$, mit der die Teilchen aus dem System entfernt werden, der limitierende Faktor und der Strom hängt nicht von $\alpha$ ab. Im Inneren der Kette bildet sich ein Dichteprofil mit einer relativ hohen Dichte aus.

In der Höchstflußphase C schließlich ist der Strom unabhängig von den Randraten $\alpha$ und $\beta$. Hier ist die Transportfähigkeit im Inneren der Kette der limitierende Faktor, denn der Strom erreicht hier den maximalen Wert, der in einem periodischen System möglich ist (Maximum des Fundamentaldiagramms).

Die Phasen A und B lassen sich in zwei Unterphasen AI und AII bzw. BI und BII unterteilen, die sich durch das asymptotische Verhalten der Dichteprofile an den Rändern unterscheiden [93]. Die Phasengrenze zwischen AI und AII (bzw. BI und BII) ist durch die Gerade $\beta = \beta_c(p)$ (für $0 \leq \alpha \leq \alpha_c$) bzw. $\alpha = \alpha_c(p)$ (für $0 \leq \beta \leq \beta_c$) gegeben.

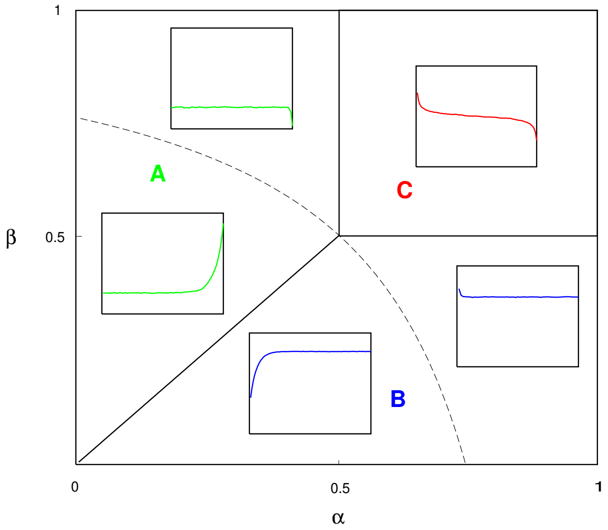


Abbildung 8: Das Phasendiagramm des ASEP mit paralleler Dynamik. Auf der gestrichelten Linie ist die 2-Cluster-Approximation exakt. Außerdem wird die charakteristische Form des Dichteprofils in den jeweiligen Phasen gezeigt.

In [V] wurde mit Hilfe des MPA und von Computersimulationen gezeigt, daß das Phasendiagramm für alle untersuchten Dynamiken (zufällig-sequentiell, geordnet-sequentiell, Untergitter-parallel und parallel) qualitativ identisch ist.

Die Übergänge zwischen den einzelnen Phasen lassen sich durch zwei Korrelationslängen $\xi_\alpha$ und $\xi_\beta$ charakterisieren, die (für festes $p$) nur von $\alpha$ bzw. $\beta$ abhängen. Mit Hilfe der Lösung durch einen MPA ist es möglich, diese Größen explizit zu bestimmen. Neben $\xi_\alpha$ und $\xi_\beta$ spielt eine dritte Längenskala eine Rolle, nämlich $\xi^{-1} = |\xi_\alpha^{-1} - \xi_\beta^{-1}|$.

Der Übergang von AII (bzw. BII) in die Phase C ist kontinuierlich. Er wird durch die Divergenz der Längenskala $\xi_\alpha$ (bzw. $\xi_\beta$) getrieben.

Der Übergang zwischen der Hoch- und der Niedrigdichtephase ist dagegen von 1. Ordnung. $\xi_\alpha$ und $\xi_\beta$ bleiben hier endlich, aber $\xi$ divergiert. Auf der Übergangslinie findet man ein lineares Dichteprofil, das durch die Diffusion einer Domänenwand zwischen einem Niedrigdichtebereich am linken Ende und einem Hochdichtebereich am rechten Ende der Kette erzeugt wird.

In [V] konnten auch erstmals quantitative Aussagen für den Fall paralleler Dynamik gemacht werden. Dies war möglich durch die Kombination von analytischen und numerischen Methoden. Im Phasendiagramm existiert eine spezielle Linie $(1-\alpha)(1-\beta) = 1-p$ mit flachem Dichteprofil, die durch alle drei Phasen geht. Auf dieser Linie wird die 2-Cluster-Approximation aus Abschnitt 3.1 exakt und erlaubt daher quantitative Aussagen für das gesamte Phasendiagramm, die mit Hilfe von Computersimulationen verifiziert wurden. Mittlerweile existieren vollständige Lösungen für alle Parameterwerte [75, 76], die die Vorhersagen aus [V] bestätigen.

Die allgemeine Struktur des Phasendiagramms ist inzwischen noch besser verstanden.

In [94] wurde eine phänomenologische Theorie entwickelt, bei der das Phasendiagramm aus der Dynamik von Domänenwänden bestimmt wird (siehe auch [95]). Dieses ansprechende physikalische Bild erlaubt quantitative Vorhersagen aus dem Fundamentaldiagramm und konnte z.B. für das allgemeine NaSch-Modell ($v_{max} > 1$) mit offenen Rändern bestätigt werden [96]. Da sich die Struktur des Phasendiagramms auf das Fundamentaldiagramm des periodischen Systems zurückführen läßt[17], macht diese phänomenologische Theorie verständlich, warum sie unabhängig von der Dynamik ist.

Abschließend soll noch erwähnt werden, daß nicht nur Änderungen der Randbedingungen Phasenübergänge induzieren können. *Einzelne* Defekte können eine ähnliche Wirkung haben. So kann z.B. ein Fahrzeug mit erhöhtem Trödelparameter bereits bei geringen Dichten einen Stau induzieren [97–101]. Hier gibt es gewisse Analogien zur Bose-Einstein-Kondensation [98]. Ein ortsfester Defekt, z.B. durch lokale erhöhte Trödelparameter, kann zur Phasenseperation in Hoch- und Niedrigdichtephasen führen [96, 102–106].

## 5.4 Staubildung im Stadtverkehr

Etwa zeitgleich mit dem NaSch-Modell wurde von Biham, Middleton und Levine (BML) [107] ein einfaches Modell für Stadtverkehr vorgestellt. Beim BML-Modell steht allerdings nicht eine detaillierte und realistische Beschreibung der Fahrzeugdynamik im Vordergrund. Statt dessen wird die Dynamik durch Ampeln kontrolliert. Im BML-Modell betrachtet man ein Straßennetzwerk aus $N$ parallelen Straßen in Süd-Nord-Richtung (positive $x$-Richtung) die von $N$ Straßen in West-Ost-Richtung (positive $y$-Richtung) gekreuzt werden. Fahrzeuge können sich nur von einer Kreuzung zur nächsten bewegen ($v_{max} = 1$). Ein Abbiegen oder Wechseln der Straße ist im einfachsten Fall nicht erlaubt. Die Dynamik der Fahrzeuge wird durch synchronisierte Ampeln gesteuert, die alternierend eine Süd-Nord- oder West-Ost-Bewegung zulassen. Die Wechselwirkung zwischen den Fahrzeugen kommt wie beim NaSch-Modell durch das Ausschlußprinzip zustande. Ansonsten ist die Dynamik aber deterministisch, d.h. es gibt keinen Trödelparameter. Stochastizität kommt lediglich über die Anfangsbedingungen ins Spiel.

Das BML-Modell läßt sich als deterministischer 3-Zustands-Zellularautomat auffassen. Die Zellen entsprechen den Kreuzungen und können entweder leer oder durch ein nach Norden oder ein nach Osten fahrendes Auto besetzt sein.

Die Parameter des Modells sind neben der Zahl $N \times N$ der Kreuzungen, die Dichten $\rho_x$ und $\rho_y$ auf den West-Ost- bzw. Süd-Nord-Straßen, die für alle Straßen gleich sein sollen.

Das BML-Modell zeigt einen Phasenübergang 1. Ordnung von einer Freifluß- zu einer gestauten Phase [107]. Der Ordnungsparameter ist die (über Anfangsbedingungen gemittelte) mittlere Geschwindigkeit $\bar{v} = \frac{1}{N}\sum_j v_j$, wobei $v_j = 1$, wenn sich das Auto im letzten Zeitschritt bewegt hat, und $v_j = 0$ sonst. $\bar{v}$ verschwindet bei einer kritischen Fahrzeugdichte $\rho_c$ diskontinuierlich.

Es sind zahlreiche Verallgemeinerungen des BML-Modells untersucht worden. Man kann z.B. Abbiegen erlauben [108] oder mit Hilfe sequentieller Dynamik „Grüne Wellen“

[17] Eine wesentliche Rolle spielt z.B. die Zahl der lokalen Maxima des Fundamentaldiagramms.

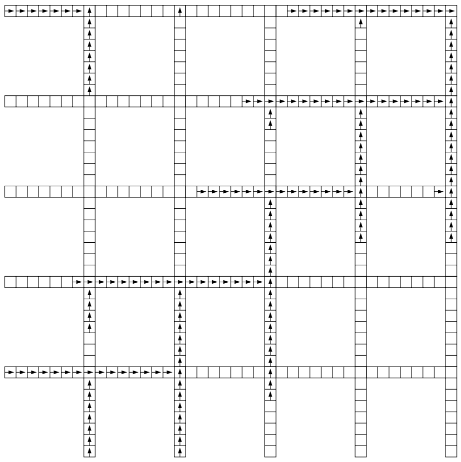

Abbildung 9: Eine vollständig gestaute Konfiguration im Modell für Stadtverkehr.

simulieren [109].

In [IX] wurde ein realistischeres Modell entwickelt, das die wesentlichen Elemente des NaSch- und des BML-Modells vereinigt. Das Modell besteht wie das BML-Modell aus einem System von $N \times N$ Kreuzungen. Diese sind jedoch durch endliche Straßenabschnitte aus $D-1$ Zellen mit NaSch-Dynamik verbunden (siehe Abb. 9). Die Länge jeder Straße beträgt daher $L = ND$ Zellen. Für $D = 1$ erhält man das BML-Modell.

Die Dynamik an den Kreuzungen wird im einfachsten Fall wieder von synchronisierten Ampeln gesteuert. Als neue Zeitskala tritt dabei die Länge $T$ einer Grün- (Rot-)phase auf. Als relevante Parameter hat man neben den Parametern $\rho_x$, $\rho_y$, $N$ des BML-Modells und $v_{max}$, $p$ des NaSch-Modells die neue Zeitskala $T$ und den Abstand $D$ zweier Kreuzungen.

Ähnlich wie im BML-Modell kommt es bei einer hinreichend großen Dichte $\rho_*(D,T)$ zur Bildung vollständig gestauter Konfigurationen (siehe Abb. 9). Der Mechanismus ist aber etwas anders als im BML-Modell, denn im deterministischen Fall $p = 0$ gibt es für $\rho < 1$ keinen vollständigen Stau. Ein Fahrzeug wird nicht lange genug auf der Kreuzung stehen, um die Fahrzeuge der anderen Fahrtrichtung zu blockieren, denn es fährt los, sobald es eine freie Zelle vor sich hat. Anders als im BML-Modell ist also die Existenz eines vollständig gestauten Zustandes wesentlich mit dem Trödelparameter $p > 0$ verbunden.

Der durchschnittliche Fluß im System hängt wesentlich von der Länge der Ampelphase $T$ ab. Interessanterweise ist die Dichte, bei der der Fluß maximal wird, keine monotone Funktion von $T$ [IX]. Dies spiegelt das komplexe Wechselspiel von Ampeldynamik und Fahrzeugdynamik wider. Für große $T$ bilden sich während der Rotphase lange Staus vor den Ampeln. Die Grünphase ist aber lang genug, damit die Fahrzeuge ihre optimale Geschwindigkeit $v_{\rm opt}$ (= mittlere Geschwindigkeit im NaSch-Modell = $J(\rho)/\rho$) erreichen können. Für kleine $T$ kommen nicht alle Fahrzeuge vor den Ampeln zum Stillstand. Allerdings ist die Grünphase auch kürzer als die Relaxationszeit im NaSch-Modell und die Autos erreichen nicht die optimale Geschwindigkeit $v_{\rm opt}$.

Die Untersuchung des Modelles in seiner einfachsten Version zeigt bereits ein sehr komplexes Verhalten des Systems. In gerade begonnenen Arbeiten steht das Verhalten für nicht-synchronisierte Ampelschaltungen im Vordergrund, z.B. im Hinblick auf „Grüne Wellen". Diese Ergebnisse werden von großer praktischer Bedeutung für die Optimierung des Stadtverkehrs sein.

# 6 Zusammenfassung und Ausblick

Die in dieser Schrift zusammengestellten Arbeiten dokumentieren die Fortschritte, die in den letzten Jahren sowohl beim Verständnis von getriebenen Nichtgleichgewichtssystemen als auch bei deren Anwendungen im Bereich der Verkehrsforschung gemacht wurden.

Das Nagel-Schreckenberg-Modell hat sich mittlerweile zum Standardmodell für die Computersimulation von großen Verkehrsnetzwerken entwickelt. Es ist deshalb besonders wichtig, die Eigenschaften dieses Modells im Detail zu verstehen. Mit den hier vorgestellten analytischen Methoden, die die Computersimulation effektiv ergänzen, wurde ein vertieftes Verständnis der zugrundeliegenden mikroskopischen Physik erzielt.

Dieses Verständnis wiederum konnte zur Weiterentwicklung der Modelle genutzt werden. Ein Beispiel hierfür ist das VDR-Modell aus Abschnitt 5.2, das in natürlicher Weise Möglichkeiten zur Flußoptimierung aufzeigt.

Obwohl in erster Linie die Terminologie der „Verkehrsphysik" benutzt wurde, um ein eingängiges Bild von den Vorgängen zu erhalten, sind die hier gewonnenen Erkenntnisse doch von allgemeiner Bedeutung für die Physik getriebener Systeme weit ab vom Gleichgewicht. Die vorgestellten analytischen Verfahren sind nicht nur auf das Nagel-Schreckenberg-Modell anwendbar. Eine besondere Bedeutung kommt dem Matrixprodukt-Ansatz zu, da er in gewisser Weise die generische Form des stationären Zustandes eindimensionaler stochastischer Systeme darstellt. Damit hat man für diese Nichtgleichgewichtsmodelle einen Schritt in Richtung eines einheitlichen mathematischen Rahmens getan, der die Ableitung allgemeiner Ergebnisse ermöglicht.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß die Synergie von Verkehrsforschung und statistischer Physik wichtige Einblicke ermöglicht hat, von der beide Disziplinen gleichermaßen profitieren. Angesichts vieler offener Fragen und praktischer Probleme sind hier auch in Zukunft noch viele interessante Resultate zu erwarten.

# Literatur


[1] S. Moss de Oliveira, P.M.C. de Oliveira, D. Stauffer: *Evolution, Money, War and Computers*, Teubner-Texte zur Physik **34** (1999)

[2] P. Bak, K. Sneppen: Phys. Rev. Lett. **71**, 4083 (1993)

[3] F. Jülicher, A. Adjani, J. Prost: Rev. Mod. Phys. **69**, 1269 (1997)

[4] W. Weidlich: Phys. Rep. **204**, 1 (1991)

[5] S. Galam: Physica **A230**, 174 (1996)

[6] J.-P. Bouchaud, M. Potters: *Théorie des Risques Financiers*, Collection Aléa Saclay (1997)

[7] D.E. Wolf, M. Schreckenberg, A. Bachem (Hrsg.): *Traffic and Granular Flow*, World Scientific, Singapore (1996)

[8] M. Schreckenberg, D.E. Wolf (Hrsg.): *Traffic and Granular Flow '97*, Springer (1998)

[9] D. Helbing: *Verkehrsdynamik*, Springer (1997)

[10] V. Privman (Hrsg.): *Nonequilibrium Statistical Mechanics in One Dimension*, Cambridge University Press (1997)

[11] B. Schmittmann, R.K.P. Zia: *Statistical Mechanics of Driven Diffusive Systems*, Academic Press (1995)

[12] H.H. Jaeger, S.R. Nagel: Science **255**, 1523 (1992)

[13] H.J. Herrmann: Phys. World **11**, 31 (1997)

[14] L.P. Kadanoff: Rev. Mod. Phys. **71**, 435 (1999)

[15] W. Dieterich, P. Fulde, I. Peschel: Adv. Phys. **29**, 527 (1980)

[16] S. Sandow, S. Trimper, D. Mukamel: Phys. Rev. **B51**, 2805 (1995)

[17] L.A. Pipes: J. Appl. Phys. **24**, 274 (1953)

[18] M. Bando, K. Hasebe, A. Nakayama, A. Shibata, Y. Sugiyama: Jpn. Jrl. Ind. Appl. Math. **11**, 203 (1994)

[19] M.J. Lighthill, G.B. Whitham: Proc. Roy. Soc. **A229**, 317 (1955)

[20] M. Leibig: Phys. Rev. **E**bf 49, 184 (1994)

[21] B.S. Kerner, P. Konhäuser: Phys. Rev. **E50**, 54 (1994)

[22] I. Prigogine, R. Herman: *Kinetic Theory of Vehicular Traffic*, American Elsevier (1971)

[23] D. Helbing: Phys. Rev. **E53**, 2366 (1996)

[24] S. Wolfram: *Theory and Applications of Cellular Automata*, World Scientific (1986)

[25] D. Stauffer: J. Phys. A: Math. Gen. **24**, 909 (1991)

[26] K. Nagel, M. Schreckenberg: J. Phys. I France **2**, 2221 (1992)

[27] K. Nagel: Dissertation, Universität zu Köln (1995)

[28] M. Rickert: Diplomarbeit, Universität zu Köln (1994)

[29] K. Nagel: Phys. Rev. **E53**, 4655 (1996)

[30] A. Klümper, A. Schadschneider, J. Zittartz: J. Phys. A: Math. Gen. **24**, L955 (1991)

[31] A. Klümper, A. Schadschneider, J. Zittartz: Z. Phys. **B87**, 281 (1992)

[32] A. Klümper, A. Schadschneider, J. Zittartz: Europhys. Lett, **24** 293 (1993)

[33] J. de Boer, V. E. Korepin, A. Schadschneider: Phys. Rev. Lett. **74**, 789 (1995)

[34] J. de Boer, A. Schadschneider: Phys. Rev. Lett. **75**, 4298 (1995)

[35] C. Dziurzik, A. Schadschneider, J. Zittartz: zur Veröffentlichung eingereicht bei Eur. Phys. J. **B**

[36] J. Esser, M. Schreckenberg: Int. J. Mod. Phys. **C8**, 1025 (1997)

[37] M. Rickert, K. Nagel: Int. J. Mod. Phys. **C8**, 483 (1997)

[38] K. Nagel, C.L. Barrett: Int. J. Mod. Phys. **C8**, 505 (1997)

[39] G.Y. Vichniac: Physica **D10**, 96 (1984)

[40] B. Chopard, M. Droz: *Cellular Automata Modeling of Physical Systems*, Cambridge University Press (1998)

[41] F.C. Alcaraz, M. Droz, M. Henkel, V. Rittenberg: Ann. Phys. **230**, 250 (1994)

[42] N.G. van Kampen: *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*, Elsevier (Amsterdam, 1992)

[43] A.D. May: *Traffic Flow Fundamentals*, Prentice Hall (1990)

[44] B.S. Kerner: in *Traffic and Granular Flow '97*, Springer (1998)

[45] F.L. Hall, B.L. Allen, M.A. Gunter: Transpn. Res. A **20**, 197 (1986)

[46] J. Treiterer: Ohio State Technical Report No. PB 246 094 (1975)

[47] B.S. Kerner, H. Rehborn: Phys. Rev. **E53**, 4275 (1996)

[48] M. Rickert, K. Nagel, M. Schreckenberg, A. Latour: Physica **A231**, 534 (1996)

[49] P. Wagner, K. Nagel, D.E. Wolf: Physica **A234**, 687 (1997)

[50] K. Nagel, D.E. Wolf, P. Wagner, P. Simon: Phys. Rev. **E58**, 1425 (1998)

[51] D. Chowdhury, D.E. Wolf, M. Schreckenberg: Physica **A235**, 417 (1997)

[52] W. Knospe, L. Santen, A. Schadschneider, M. Schreckenberg: Physica **A265**, 614 (1999)

[53] A. Schadschneider, M. Schreckenberg: J. Phys. A: Math. Gen. **26**, L679 (1993)

[54] H.A. Gutowitz, J.D. Victor, B.W. Knight: Physica **28D**, 18 (1987)

[55] E.F. Moore: Proc. Symb. Appl. Math. **14**, 17 (1962)

[56] K. Nagel, H.J. Herrmann: Physica **A199**, 254 (1993)

[57] V. Hakim, J.P. Nadal: J. Phys. A: Math. Gen. **16**, L213 (1983)

[58] M. Fannes, B. Nachtergaele, R. Werner: Comm. Math. Phys. **144**, 443 (1992)

[59] H. Niggemann, J. Zittartz: J. Phys. A: Math. Gen. **31**, 9819 (1998)

[60] H.-J. Mikeska, A.K. Kolezhuk: Int. J. Mod. Phys. **12**, 2325 (1998)

[61] H. Niggemann, A. Klümper, J. Zittartz: Z. Phys. **B104**, 103 (1997)

[62] S. Rommer, S. Östlund: Phys. Rev. **B55**, 2164 (1997)

[63] B. Derrida, M.R. Evans, V. Hakim, V. Pasquier: J. Phys. A: Math. Gen. **26**, 1493 (1993)

[64] H. Hinrichsen, S. Sandow, I. Peschel: J. Phys. A: Math. Gen. **29**, 2643 (1996)

[65] N. Rajewsky, M. Schreckenberg: Physica **A245**, 139 (1997)

[66] G. Schütz: Int. J. Mod. Phys. **B11**, 197 (1997)

[67] A.L. Barabási, H.E. Stanley: *Fractal Concepts in Surface Growth*, Cambridge University Press (1995)

[68] H. Hinrichsen: J. Phys. A: Math. Gen. **29**, 3659 (1996)

[69] N. Rajewsky, A. Schadschneider, M. Schreckenberg: J. Phys. A: Math. Gen. **29**, L305 (1996)

[70] A. Honecker, I. Peschel: J. Stat. Phys. **88**, 319 (1997)

[71] K. Krebs, S. Sandow: J. Phys. A: Math. Gen. **30**, 3165 (1997)

[72] F. Eßler, V. Rittenberg: J. Phys. A: Math. Gen. **29**, 3375 (1996)

[73] T. Antal, G. Schütz: preprint (1998)

[74] K. Klauck, A. Schadschneider: in Vorbereitung

[75] M.R. Evans, N. Rajewsky, E.R. Speer: `cond-mat/9810306`

[76] J. de Gier, B. Nienhuis: `cond-mat/9812403`

[77] K. Nagel: Int. J. Mod. Phys. **C5**, 567 (1994)

[78] G. Csányi, J. Kertész: J. Phys. A: Math. Gen. **28**, L427 (1995) (Erratum: **29**, 471 (1996))

[79] M. Sasvari, J. Kertész: Phys. Rev. **E56**, 4104 (1997)

[80] S. Lübeck, M. Schreckenberg, K.D. Usadel: Phys. Rev. **E57**, 1171 (1998)

[81] L. Roters, S. Lübeck, K.D. Usadel: Phys. Rev. **E59**, 2672 (1999)

[82] S. Cheybani, J. Kertész, M. Schreckenberg: J. Phys. A: Math. Gen. **31**, 9787 (1998)

[83] D. Chowdhury, A. Pasupathy, S. Sinha: Eur. Phys. J. **B5**, 781 (1998)

[84] M. Takayasu, H. Takayasu: Fractals **1**, 860 (1993)

[85] S.C. Benjamin, N.F. Johnson, P.M. Hui: J. Phys. A: Math. Gen. **29**, 3119 (1996)

[86] A. Schadschneider, M. Schreckenberg: Ann. Physik **6**, 541 (1997)

[87] D. Chowdhury, L. Santen, A. Schadschneider, S. Sinha, A. Pasupathy: J. Phys. A: Math. Gen. **32** (im Druck)

[88] B.S. Kerner, H. Rehborn: Phys. Rev. **E53**, 1297 (1996)

[89] H. Greenberg, A. Daou: Operations Res. **8**, 524 (1960)

[90] R. Barlovic: Diplomarbeit, Universität Duisburg (1998)

[91] J. Krug: Phys. Rev. Lett. **67**, 1882 (1991)

[92] M. Henkel, G. Schütz: Physica **A206**, 187 (1994)

[93] G. Schütz, E. Domany: J. Stat. Phys. **72**, 277 (1993)

[94] A.B. Kolomeisky, G. Schütz, E.B. Kolomeisky, J.P. Straley: J. Phys. A: Math. Gen. **31**, 6911 (1998)

[95] L.G. Tilstra, M.H. Ernst: J. Phys. A: Math. Gen. **31**, 5033 (1998)

[96] L. Santen: Dissertation, Universität zu Köln (1999)

[97] T. Nagatani: Phys. Rev. **E51**, 922 (1995)

[98] M.R. Evans: Europhys. Lett. **36**, 13 (1996)

[99] M.R. Evans: J. Phys. A: Math. Gen. **30**, 5669 (1997)

[100] J. Krug, P.A. Ferrari: J. Phys. A: Math. Gen. **29**, L465 (1996)

[101] D.V. Ktitarev, D. Chowdhury, D.E. Wolf: J. Phys. A: Math. Gen. **30**, L221 (1997)

[102] S.A. Janowsky, J.L. Lebowitz: Phys. Rev. **A45**, 618 (1992)

[103] Z. Csahok, T. Vicsek: J. Phys. A: Math. Gen. **27**, L591 (1994)

[104] S. Yukawa, M. Kikuchi, S. Tadaki: J. Phys. Soc. Jpn. **63**, 3609 (1994)

[105] G. Tripathy, M. Barma: Phys. Rev. **E58**, 1911 (1998)

[106] W. Knospe, L. Santen, A. Schadschneider, M. Schreckenberg: in „Traffic and Granular Flow '97“, hrsg. von M. Schreckenberg und D.E. Wolf, Springer (1998)

[107] O. Biham, A.A. Middleton, D. Levine: Phys. Rev. **A46**, R6124 (1992)

[108] J.A. Cuesta, F.C. Martínez, J.M. Molera, A. Sánchez: Phys. Rev. **E48**, 4175 (1993)

[109] J. Török, J. Kertész: Physica **A231**, 515 (1996)

# Danksagung

Während meiner wissenschaftlichen Laufbahn hatte ich das Vergnügen, mit vielen Kollegen fruchtbare Gespräche zu führen, die sich als äußerst wertvoll für meine Arbeit erwiesen haben. Es ist leider nicht möglich, ihnen allen namentlich meinen Dank auszusprechen. Ich möchte aber die Gelegenheit nutzen und all denjenigen besonders danken, die wesentlichen Einfluß auf die hier vorgestellten Ergebnisse hatten.

Ohne Prof. Dr. Johannes Zittartz wären die vorgestellten Arbeiten nicht möglich gewesen. Er hat in vielen Gesprächen wesentlich zu meiner physikalischen Bildung beigetragen und mir mit manchem praktischen und persönlichen Rat geholfen. Dafür danke ich ihm, ebenso wie für die Freiheit bei der Verfolgung eigener Ideen.

Besonders zu Dank verpflichtet bin ich auch Prof. Dr. Michael Schreckenberg. Er hat mich mit dem Gebiet der „Verkehrsphysik“ bekannt gemacht. In den letzten Jahren hat unsere erfreuliche Zusammenarbeit zu vielen interessanten Resultaten geführt. Ich möchte auch unser gutes persönliches Verhältnis hervorheben, das neben unserer äußerst fruchtbaren wissenschaftlichen Kooperation auch gemeinsame Interessen außerhalb der Physik umfaßt.

Dr. Ludger Santen danke ich für die intensive Zusammenarbeit in den letzten Jahren, die mir – auch durch unser freundschaftliches Verhältnis – immer sehr viel Spaß gemacht hat.

Bei Herrn Kai Klauck bedanke ich mich für die gute Kooperation und viele Diskussionen, die sicherlich in der Zukunft noch zu zahlreichen weiteren interessanten Ergebnissen führen werden.

Dank gebührt auch den „Nesthäkchen“ unserer Gruppe, Georg Diedrich und Ansgar Kirchner, für die vielversprechende Zusammenarbeit.

Bedanken möchte ich mich auch bei Prof. Dr. Debashish Chowdhury. Die Zusammenarbeit mit ihm ist durch seinen Enthusiasmus und seine freundliche Art ein großes Vergnügen.

Den Duisburger Kollegen aus der Arbeitsgruppe von Michael Schreckenberg danke ich für die guten Kontakte in den letzten Jahren, insbesondere Bernd Eisenblätter, Robert Barlovic und Wolfgang Knospe für unsere erfolgreichen gemeinsamen Arbeiten.

Obwohl nicht direkt an den vorgestellten Arbeiten beteiligt, schulde ich doch Priv.-Doz. Dr. Andreas Klümper meinen besonderen Dank. In unserer langjährigen freundschaftlichen Zusammenarbeit wurden z.B. die Grundlagen für die Arbeiten über den Matrixprodukt-Ansatz geschaffen.

Dr. Harald Niggemann danke ich für viele wertvolle Diskussionen – nicht nur über physikalische Probleme – in den letzten Jahren.

Weiterhin möchte ich mich bei allen meinen Koautoren bedanken. Es war mir immer ein besonderes Anliegen, durch den wissenschaftlichen Austausch mit Kollegen meiner Arbeit eine persönliche Dimension hinzuzufügen. Meine Koautoren haben mir dies leicht gemacht.

Schließlich möchte ich mich bei allen jetzigen und früheren Mitgliedern des Institutes für Theoretische Physik der Universität zu Köln und des Institute for Theoretical Physics der

State University of New York in Stony Brook bedanken. Die angenehme und freundliche Atmosphäre in diesen Instituten hat wesentlich zum Gelingen meiner Arbeit beigetragen.

Für die kritische Durchsicht der vorgelegten Schrift bedanke ich mich bei Kai Klauck, Harald Niggemann und Ludger Santen.