Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

A. Schadschneider
T. Micklitz

Mathematische Methoden der Physik
10. Übung

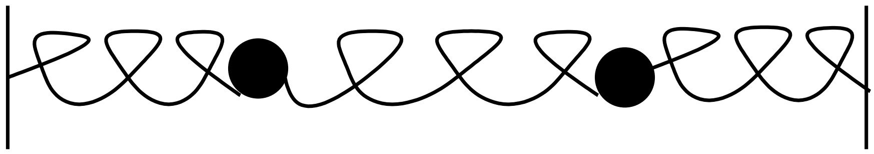
Wintersemester 2006/2007

31. Gekoppelte harmonische Oszillatoren **+4 Punkte*

a) Zwei identische Massenpunkte, welche durch eine Feder (mit Federkonstante k) gekoppelt und jeweils durch eine weitere Feder (mit identischen Federkonstanten f) an einer Wand befestigt sind (siehe Abbildung), lassen sich durch das folgende System gekoppelter DGLs beschreiben

$$\ddot{x}_1 = -kx_1 + f(x_2 - x_1) \tag{1}$$
$$\ddot{x}_1 = -kx_2 + f(x_1 - x_2), \tag{2}$$

wobei x_i die Auslenkung des Massenpunktes i aus seiner Ruhelage ist. Lösen Sie die Gleichungen (1), (2). Tipp: Relativ- und Schwerpunktkoordinaten!



b) Wie würden Sie vorgehen, um folgendes System gekoppelter DGLs zu lösen:

$$\ddot{x}_1 = k_1 x_1 + f x_2$$
$$\ddot{x}_1 = k_2 x_2 + f x_1?$$

32. Wärmeleitungsgleichung *4+4+4 Punkte*

In dieser Aufgabe wollen wir die Wärmeleitungsgleichung (auch "Diffusionsgleichung")

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = 0, \tag{3}$$

mit Anfangsbedingung

$$f(x,0) = h(x) \tag{4}$$

lösen. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

a) Fouriertransformieren Sie Gl. (3) und die Anfangsbedingung, Gl. (4), in der Ortskoordinate x,

b) Lösen Sie die resultierende partielle DGL 1. Ordnung,

c) Transformieren Sie die Lösung zurück in die Ortsdarstellung. (Sie können den in der Vorlesung besprochenen Faltungssatz benutzen!)

Wie sieht die Lösung aus, wenn die Anfangsbedingung durch $h(x) = \delta(x)$ gegeben ist?

33. Greensche Funktion der Schwingungsgleichung ** Punkte*

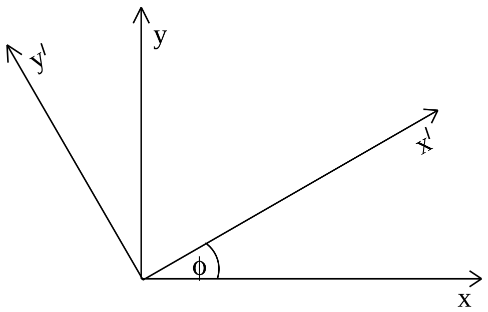
In der Vorlesung haben Sie die Greensche Funktion zu einem Differentialoperator, $\hat{D}$, als Lösung der Gleichung

$$\hat{D}G(t-s) = \delta(t-s) \tag{5}$$

kennengelernt. Wie lautet die Greensche Funktion zu $\hat{D} = \frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2$? Tipp: Benutzen Sie, daß $\int_{\mathbb{R}/\{-a,a\}} dx \frac{e^{ikx}}{a^2-x^2} = \frac{\pi \sin(ak)}{a}$.

34. Drehmatrix *4 Punkte*

Finden Sie durch geometrische Überlegungen die passende Drehmatrix zu der unten abgebildeten Transformation des Koordinatensystems. Wie sehen Basis- bzw. Koordinatentransformation aus?



35. SU(2) **+*+* Punkte*

Die Generatoren der zweidimensionalen unitären Drehgruppe $SU(2)$ sind die sogenannten Paulimatrizen,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

D.h. man kann die Gruppenelement $g \in SU(2)$ durch drei Winkel parametrisieren: $g(\alpha,\beta,\gamma) = \exp\left[i\left(\alpha\sigma_1 + \beta\sigma_2 + \gamma\sigma_3\right)\right]$. Dabei ist die exp-Funktion einer Matrix, M, durch ihre Reihendarstellung definiert, d.h. $\exp(M) = \sum_0^\infty \frac{M^k}{k!}$.

a) Zeigen Sie, daß die Paulimatrizen die folgenden Kommutatorrelationen erfüllen (ϵ_{ijk} ist der antisymmetrische ϵ-Tensor aus Aufgabe...):

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k.$$

b) Welche Eigenschaft muss W besitzen, damit $\exp(iW)$ unitär ist. Tipp: Entwickeln Sie die exp-Funktion in lineare Ordnung W! Überprüfen Sie, daß die Paulimatrizen diese Eigenschaft besitzen.

c) Berechnen Sie $\exp(i\alpha\sigma_2)$. Tipp: Zerlegen Sie die exp-Reihe in gerade und ungerade Potenzen von σ_2 und benutzen Sie, daß für beliebige $n \in \mathbb{N}$: $\sigma_2^{2n+1} = \sigma_2$ und $\sigma_2^{2n} = 1$.