
Mathematische Methoden der Physik

12. Übung

Wintersemester 2006/2007

36. Anwendungen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen * Punkte

- a) Zeigen Sie, dass Real- und Imaginärteil einer analytischen Funktion $f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ die *Laplace-Gleichung*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

bzw.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

erfüllen. Die Laplace-Gleichung und ihre Lösungen (die sogenannten *harmonischen Funktionen*) sind unter anderem in der Elektrostatik und Hydrodynamik von zentraler Bedeutung.

- b) Ist die folgende Funktion analytisch?

$$f(x + iy) = (x \cos(y) + y \sin(y)) e^x + i (y \cos(y) + x \sin(y)) e^x.$$

Falls nicht, welche Änderung würde sie analytisch machen?

37. Anwendungen des Residuensatzes * Punkte

Berechnen Sie folgende Integrale

- a)

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + \cos(\varphi)} \quad a > 1$$

Anleitung: Mit der Substitution $z = e^{i\varphi}$ ($\Rightarrow \frac{1}{z} = e^{-i\varphi}$) wird der Integrand zu einer rationalen Funktion in z . Das Differential transformiert sich mit $d\varphi = -i \frac{dz}{z}$.

Bemerkung: Wie man sich leicht überzeugt, funktioniert diese Methode ganz allgemein bei Integranden von der Form $f(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$.

- b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$$

Anleitung: Bestimmen Sie Lage z_0 und Ordnung n der Polstellen und berechnen Sie das Residuum mit $\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} ((z - z_0)^n f(z)) \right]_{z=z_0}$

38. Fourierintegrale

* Punkte

Integrale der Form $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ikx} dx$ lassen sich häufig mit Hilfe des Residuenkalküls berechnen. Der Integrationsweg entlang der reellen Achse wird dabei durch einen Bogen in der komplexen Ebene zu einem geschlossenen Pfad ergänzt. Damit dieser Bogen für große Durchmesser keinen Beitrag liefert, muss der Integrand dort gegen Null gehen.

- a) Machen Sie sich klar, dass es dafür auf das Vorzeichen von k ankommt, bzw. ob der Bogen in der Halbebene mit positivem oder negativem Imaginärteil liegt.
- b) Berechnen Sie mit dieser Methode die Fouriertransformierte von $f(x) = \frac{1}{a^2+x^2}$ (a ist ein reeller Parameter), d.h. das Integral

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{a^2+x^2} dx.$$

39. Laurent-Reihen

* Punkte

Bestimmen Sie die Laurent-Reihe um $z = 0$ von

a) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$

Hinweis: Exponentialreihe.

b) $f(z) = \frac{1}{1-z}$

Hinweis: Vorgehen wie im Beispiel aus der Vorlesung.

40. Anzahlformel für Null- und Polstellen

* Punkte

- a) Überzeugen Sie sich davon, dass folgende Formel gilt:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P$$

wobei N und P die Zahl der Null- und Polstellen von $f(z)$ ist, die von c eingeschlossen werden.

- b) Wenn $f(z)$ ein Polynom n -ten Grades ist, folgt mit dieser Gleichung der *Fundamentalsatz der Algebra*: Jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ hat eine komplexe Nullstelle.

Hinweis: Wählen Sie $f(z) = \sum_n a_n z^n$ und lassen Sie den Durchmesser von c sehr groß werden. Für große z kann der Integrand durch das asymptotische Verhalten $\frac{f'(z)}{f(z)} \sim \frac{n}{z}$ ersetzt werden.