Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

A. Schadschneider
P. Kuhn

Mathematische Methoden der Physik
7. Übung

Wintersemester 2006/2007

19. Kontinuitätsgleichung

** Punkte*

In der Vorlesung haben Sie gelernt, daß eine Massenverteilungsfunktion, $\rho(\mathbf{x}, t)$, und deren entsprechenden Stromdichte, $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, der Kontinuitätsgleichung,

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \partial_t \rho = 0, \tag{1}$$

folgen. In dieser Aufgabe wollen wir diese Gleichung aus einfachen Überlegungen ableiten: Da Massen erhalten bleiben, wissen wir, daß die zeitliche Änderung der in einem beliebigen Gebiet U enthaltenen Masse gleich dem Massenfluss durch die Oberfläche des Gebietes ist, d.h.

$$\partial_t M = \partial_t \int_U dV \rho(\mathbf{x}, t) = -\int_{\partial U} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}, t).$$

Benutzen Sie nun den Satz von Gauss und die Tatsache, daß dieses für beliebige Gebiete, U, gilt, um Gl. (1) abzuleiten.

20. Feldgleichung der Gravitation

** Punkte*

In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, daß eine kugelsymmetrische Massenverteilung (i) nach außen eine Kraft ausübt, als ob die ganze Masse im Mittelpunkt vereinigt ist, und (ii) daß die von äußeren Schalen ausgeübte Schwerkraft gleich Null ist.
Die Gravitationskraft zwischen zwei punktförmigen Massen m und M ist $\mathbf{F} = GMm\mathbf{y}/|\mathbf{y}|^3$, wobei $\mathbf{y}$ der Abstandsvektor zwischen den Massen ist. Man kann nun der (sich im Koordinatenursprung befindenden) Masse M eine von ihr am Ort $\mathbf{y}$ erzeugte Feldstärke als Kraft pro Masse, $\mathbf{E}(\mathbf{y}) = GM\mathbf{y}/|\mathbf{y}|^3$, zuordnen. In einer der nächsten Übungen werden wir zeigen, daß das Gravitationsfeld, welches von einer Ladungsverteilung ρ an einem Ort $\mathbf{y}$ erzeugt wird durch folgende Differentialgleichung beschrieben wird:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi G \rho. \tag{2}$$

Zeigen Sie mit Hilfe von Gl. (2) die Aussagen (i) und (ii). Hinweis: Wenden Sie den Satz von Gauss auf Kugelvolumen zentriert um $\mathbf{x} = 0$ an.

21. Anwendung der Integralsätze

5+5+5+5=20 Punkte

Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes

a) $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ durch die Halbkugel $\mathbf{x}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} R_0 \sin\theta \cos\phi \\ R_0 \sin\theta \sin\phi \\ R_0 \cos\theta \end{pmatrix}$, wobei $\phi \in [0, 2\pi]$ und $\theta \in [0, \pi/2]$.

b) $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x^2 \\ |y| \\ 0 \end{pmatrix}$ durch die Oberfläche eines Würfels mit Kantenlänge a, welcher um $\mathbf{x} = 0$ zentriert ist und dessen Kanten parallel zu den Achsen des Koordinatensystems verlaufen.

c) Zeigen Sie mit Hilfe der Sätze von Gauß und Stokes, daß für ein beliebiges Vektorfeld $\mathbf{v}$: $\mathrm{div} \circ \mathrm{rot}\, \mathbf{v} = 0$, sowie für eine beliebige Funktion f: $\mathrm{rot} \circ \mathrm{grad}\, f = 0$.

d) Wie vereinfacht sich sich Integrale in Polar-, Zylinder- und Kugelkoordinaten, wenn die zu integrierende Funktion unabhängig von den Winkeln ist.