Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

A. Schadschneider
A. Hackl

Mathematische Methoden der Physik
Übung 10

Wintersemester 2007/2008

Bitte schreiben Sie stets Ihren Namen und die Gruppennummer auf die erste Seite Ihrer Lösung.

Abgabe am 15.1.08.

1. Mehrdimensionale Integrale, Integralsätze *2 + 5 + 4 Punkte*

a) Wie vereinfachen sich Integrale über den $\mathbb{R}^3$ in Kugelkoordinaten, wenn die zu integrierende Funktion $f(r, \varphi, \vartheta)$ unabhängig von den Winkeln φ und ϑ ist?

b) Zeigen Sie mit Hilfe der Integralsätze von Gauß und Stokes noch einmal die schon bekannten Identitäten $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\, V) = 0$ und $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\, \vec{A}) = 0$. (Tipp: Was ist der Rand einer geschlossenen Fläche?)

c) Es seien $\vec{A}(\vec{r})$ ein Vektorfeld und $g(\vec{r})$ ein Skalarfeld. Leiten Sie durch Anwendung des Gaußschen Satzes auf $\vec{A}(\vec{r}) = g(\vec{r})\vec{c}$ bzw. $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{c} \times \vec{B}(\vec{r})$ die Integralsätze

$$\int_V \mathrm{grad}\, g \; dV = \oint_F g \; d\vec{f} \qquad \text{bzw.} \qquad \int_V \mathrm{rot}\, B \; dV = \oint_F d\vec{f} \times \vec{B}$$

her, wobei $\vec{c}$ ein (beliebiger!) konstanter Vektor ist. (Tipp: Aufgabe 3 aus Übung 9)

2. Greenscher Satz und Flächenberechnung *2 + 5 Punkte*

Eine Ellipse mit Halbachsen a und b ist definiert als die Menge aller Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, für die gilt

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \,.$$

a) Begründen Sie, dass $\vec{c}(t) = (a \cos t, b \sin t)$ eine Parametrisierung der Ellipse darstellt! In welchem Bereich variiert t ?

b) Berechnen Sie die von der Ellipse eingeschlossene Fläche mit Hilfe des in der Vorlesung aus dem Greenschen Satz abgeleiteten Wegintegrals.

3. Anwendung der Integralsätze *6 + 6 Punkte*

Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes

a) $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{e}_z$ durch die Halbkugel $\vec{f}(\theta, \phi) = R_0 \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ (mit $\theta \in [0, \pi/2]$ und $\phi \in [0, 2\pi]$), wobei $\vec{e}_z$ der Einheitsvektor in z-Richtung ist.

b) $\vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ durch die Oberfläche eines Würfels mit Kantenlänge a, welcher um $\vec{r} = 0$ zentriert ist und dessen Kanten parallel zu den Achsen des Koordinatensystems verlaufen. (Tipp: Durch Symmetrieüberlegungen lässt sich der Rechenaufwand *stark* reduzieren.)

4. Feldgleichung der Gravitation *10 Punkte*

Die Gravitationskraft, die eine punktförmige Masse M auf eine andere punktförmige Masse m ausübt, ist durch

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$$

gegeben, wobei $\vec{r}$ der Abstandsvektor zwischen den Massen, $\hat{r} = \vec{r}/r$ der zugehörige Einheitsvektor und G die Gravitationskonstante sind. Befindet sich die Masse M im Koordinatenursprung, so kann man an jedem Punkt $\vec{r}$ die von ihr erzeugte Feldstärke als Kraft pro Masse, $\vec{E}_{\mathrm{Punkt}}(\vec{r}) = -GM\hat{r}/r^2$ definieren. Später werden Sie lernen, dass das Gravitationsfeld $\vec{E}(\vec{r})$, welches von einer *beliebigen* Massenverteilung $\rho(\vec{r})$ an einem Ort $\vec{r}$ erzeugt wird, durch folgende Gleichung beschrieben wird:

$$\mathrm{div}\,\vec{E}(\vec{r}) = -4\pi G\rho(\vec{r})\,.$$

Bestimmen Sie aus dieser Gleichung $\vec{E}(\vec{r})$ für eine *kugelsymmetrische* Massenverteilung $\rho(\vec{r}) = \rho(r)$ und bestätigen Sie mit dem Resultat, daß eine solche Massenverteilung

(i) nach außen eine Kraft ausübt, als ob die bis zum Radius r eingeschlossene Masse $M(r)$ im Mittelpunkt vereinigt wäre, und

(ii) dass die von äußeren Schalen ausgeübte Schwerkraft gleich Null ist.

Anleitung: Wenden Sie den Satz von Gauß auf ein Kugelvolumen zentriert um $\vec{r} = 0$ an.