Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

A. Schadschneider
A. Hackl & P. Jung

Mathematische Methoden der Physik
Übung 11

Wintersemester 2007/2008

Bitte schreiben Sie stets Ihren Namen und die Gruppennummer auf die erste Seite Ihrer Lösung.

Abgabe am 22.1.08.

1. Funktionenräume

2 + 2 + 2 + 2 + 4 Punkte

In der Vorlesung wurde begründet, dass die Menge P_n aller Polynome n-ten Grades einen Vektorraum bildet.

a) Bildet auch die Menge aller Funktionen f, die nur positive Werte annehmen, einen Vektorraum?

b) Begründen Sie, dass $\{1, x, x^2\}$ eine Basis von P_2 ist!

c) Wie lauten die Komponenten der Funktion $f(x) = x^2 - 2$ in dieser Basis?

d) Begründe, dass die Basis aus b) keine Orthonormalbasis bzgl. des Skalarproduktes $(f, g) = \int_0^1 dx f(x)g(x)$ ist. Dabei betrachten wir Polynome auf dem Intervall $[0, 1]$.

e) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von P_2 bzgl. des Skalarproduktes aus d).
Hinweis: Beginnen Sie mit $f_0(x) = 1$ und suchen Sie ein Polynom 1. Grades f_1, das senkrecht auf f_0 steht. Suchen Sie dann ein Polynom 2. Grades f_2, das senkrecht auf f_0 und f_1 steht.

2. Fourierreihen

2 + 3 + 3 + 3 Punkte

a) Zeigen Sie den in der Vorlesung angegebenen Zusammenhang zwischen den reellen Fourierkoeffizienten a_n, b_n und den komplexen Koeffizienten c_n:

$$c_0 = \frac{1}{2}, \qquad a_n = c_n + c_{-n}, \qquad b_n = i(c_n - c_{-n})\,.$$

b) Zeigen Sie, dass die Funktionen $f_n(x) := e^{inx}$ $(n \in \mathbb{Z})$ bzgl. des Skalarproduktes $(f, g) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)} g(x) dx$ ein Orthonormalsystem bilden, d.h. $(f_n, f_m) = \delta_{nm}$.

c) Begründen Sie mit dem Ergebnis aus b), warum $\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin nx, \cos nx\}$ mit dem in der Vorlesung angebenen Skalarprodukt ebenfalls ein Orthonormalsystem bildet.

d) Zeigen Sie, dass die Fourierreihe der Funktion $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}, f(x) = x$ durch

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin(nx)}{n}$$

gegeben ist.

3. Fourier-Transformation

4 + 2 + 5 Punkte

In der Vorlesung haben Sie die Fouriertransformation einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kennen gelernt:

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{-i\omega t} \qquad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega F(\omega) e^{i\omega t}$$

a) Zeigen Sie, dass folgende Symmetrieeigenschaften erfüllt sind:

$f(t)$	$F(\omega)$
reell und gerade	reell und gerade
reell und ungerade	imaginär und ungerade
imaginär und gerade	imaginär und gerade
imaginär und ungerade	reell und ungerade

b) Zeigen Sie den Verschiebungssatz:

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = e^{-i\omega t_0} \mathcal{F}[f(t)]$$

c) Berechnen Sie die Fouriertransformierte der Funktionen (i) $\cos(\omega_0 t)$ und (ii) $\exp(-t^2/2)$.
Hinweis zu (ii): Sie dürfen $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ verwenden.

4. Dichten und Deltafunktion

3 + 3 Punkte

In der Vorlesung haben Sie gelernt, dass sich die Massendichte einer Punktmasse m am Ort $\vec{r}_0$ mit Hilfe der Deltafunktion als $\rho(\vec{r}) = m\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$ darstellen lässt. Dies wollen wir nun verallgemeinern.
Drücken Sie die Dichte

a) einer linienförmigen Massenverteilung entlang der z-Achse mit der Liniendichte σ

b) einer Kugelschale vom Radius R und der Gesamtmasse M

mit Hilfe der Deltafunktion aus. In allen Fällen sei die Gesamtmasse dabei homogen verteilt.
Hinweis: Liniendichte bezeichnet dabei die Masse pro Längeneinheit.

5. Darstellungen der Deltafunktion

4 + 4 Punkte

Überzeugen Sie sich, dass die Deltafunktion folgende Darstellungen besitzt:

a)

$$\delta(x) = \lim_{a \to 0} \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \exp(-\frac{x^2}{a})$$

b)

$$\delta(x) = \lim_{a \to 0} \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2}$$

Zeigen Sie dazu, dass die Ausdrücke auf der rechten Seite (i) für $x \neq 0$ verschwinden, (ii) für $x = 0$ divergieren und (iii) integriert über $]-\infty, \infty[$ eins ergeben.