Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

A. Schadschneider
A. Hackl & P. Jung

Mathematische Methoden der Physik
Übung 13

Wintersemester 2007/2008

Bitte schreiben Sie stets Ihren Namen und die Gruppennummer auf die erste Seite Ihrer Lösung.

Abgabe am 5.2.08.

1) Die Klausur findet am 31.1.08 in der Zeit von 14:00 - 17:00 Uhr in Hörsaal I statt. Vergessen Sie nicht Ihren Studenten- und Personalausweis! Außer einem Stift sind keine Hilfsmittel erlaubt. Dies betrifft auch Handys, MP3-Player, Etuis etc.
2) Vor der Klausur findet von 12:00 Uhr bis ca. 13 Uhr eine Globalübung in Hörsaal II statt.

1. Eigenwerte

Die Matrix

$$M(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

beschreibt Drehungen um die z-Achse um den Winkel ϕ.

a) Zeigen Sie, dass $M(\phi)$ eine orthogonale Matrix ist, und dass $(M(\phi))^{-1} = M(-\phi)$ ist.

b) Bestimmen Sie $\det M(\phi)$.

c) Zeigen Sie, dass für beliebige Matrizen $A \in \mathcal{M}(m,k)$ und $B \in \mathcal{M}(k,n)$ gilt: $(AB)^T = B^T A^T$.

d) Machen Sie sich klar, dass man das (Standard-)Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ zweier Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ auch als Matrixmultiplikation $\vec{a}^T \vec{b}$ interpretieren kann!

e) Wir betrachten einen beliebigen Punkt $\vec{r}$ im $\mathbb{R}^3$ und den zugehörigen Bildvektor $\vec{r'} = M(\phi)\vec{r}$. Zeigen Sie, dass beide den gleichen Betrag haben, d.h., dass gilt: $\vec{r'} \cdot \vec{r'} = \vec{r} \cdot \vec{r}$. Interpretieren Sie das Ergebnis!
Hinweis: Verwenden Sie die Resultate aus a), c) und d).

f) Bestimmen Sie die Eigenwerte von $M(\phi)$.

g) Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenvektoren!

h) Zeigen Sie explizit, dass die Eigenvektoren paarweise orthogonal sind!

i) Bestimme die Spektraldarstellung von $M(\phi)$.