Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

A. Schadschneider
A. Hackl

Mathematische Methoden der Physik
Übung 5

Wintersemester 2007/2008

Bitte schreiben Sie stets Namen und Gruppennummer auf die erste Seite Ihrer Lösung.

Internetseite: `http://www.thp.uni-koeln.de/~as/mathmeth07.html`

Diskussionsforum: `http://zeus.ph1.uni-koeln.de/bama/forum`

Nutzen Sie für Fragen und Kommentare zur Übung und Vorlesung auch das Internetforum. Dort werden unter anderem auch Fehler in den Angaben der Übungsblätter diskutiert.

1. Komplexe Zahlen *4+4 Punkte*

a) Sie kennen die Darstellung $z = r \cdot e^{i\phi}$. Die Zahl $\phi \in (-\pi, \pi]$ wird als Argument von z bezeichnet. Definieren Sie eine Funktion $\arg(z)$, deren Wert das Argument von z ist. Unterscheiden Sie dazu alle Quadranten der komplexen Zahlenebene. Benutzen Sie dabei die Funktion $\arctan(x)$, $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Werten Sie $\arg(z)$ an den Stellen $z = -1 + i$ und $z = -1 - i$ aus.

b) Machen Sie einen Vorschlag für die Definition des komplexen Logarithmus als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion, $\ln(\exp(z)) = \exp(\ln z) = z$. Logarithmieren Sie dazu zunächst formal $\exp(\mathrm{Re}z) \cdot \exp(\mathrm{Im}z)$ und schränken Sie dann die Definitions- bzw. Wertebereiche geeignet ein. (Hinweis: Da der Imaginärteil von z auf der linken Seite nur modulo 2π eingeht, muß der Definitionsbereich des Logarithmus z.B. auf $(-\pi, \pi]$ eingeschränkt werden.

2. Hyperbolische Funktionen *6+4+3 Punkte*

Die sogenannten hyperbolischen Funktionen sind z.B. definierbar als

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \ \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \ \text{und} \ \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

a) Wie verhalten sich die hyperbolischen Funktionen unter Spiegelung des Argumentes $(x \to -x)$? Bestimmen Sie die Ableitungen der Hyperbelfunktionen und finden Sie alle reellen Nullstellen. Identifizieren Sie etwaige Extremwerte. Bestimmen Sie die Funktionswerte dieser Funktionen in x=0 sowie die Asymptotik für x $\to \pm\infty$. Zeichnen Sie nun die Graphen der hyperbolischen Funktionen.

b) Verwenden Sie die Reihenentwicklungen der Exponentialfunktion und der trigonometrischen Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$, um zu zeigen:
$i \sin(ix) = \sinh(x)$ und $\cos(ix) = \cosh(x)$
Zeigen Sie diese Eigenschaften auch anhand der Eulerschen Formel. Zeigen Sie auch: $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

c) Finden Sie Umkehrfunktion von $\sinh x$. Setzen Sie dazu $y = \frac{1}{2}(u - \frac{1}{u})$ an mit $u = \exp(x)$. Lösen Sie nun zuerst nach u auf und bestimmen Sie anschließend die Relation x(y). `5 Bonuspunkte`: Finden Sie analog auch die Umkehrfunktion von $\cosh(x)$. Verwenden Sie dann einen sinnvollen Definitionsbereich für die Umkehrfunktion, denn diese Funktion ist nicht in ganz $\mathbb{R}$ monoton.

3. Kurvendiskussion *4+6 Punkte*

a) Eine wichtige Funktion, die z.B. im Planckschen Strahlungsgesetz auftaucht, ist

$$f(x) = \frac{ax^3}{e^{\frac{bx}{T}} - 1}$$

wobei $a = \frac{\hbar}{(2\pi c)^2}$ und $b = \frac{\hbar}{k_B}$. Es beschreibt die Strahlungsintensität I eines Körpers der Temperatur T bei der zugehörigen Frequenz x. Bestimmen Sie das asymptotische Verhalten dieser Funktion in den Grenzfällen $x \to 0$ und $x \to \infty$ bei konstanter Temperatur. Betrachten Sie nun den Fall sehr hoher Temperaturen $T \gg x$. Bestimmen Sie für diesen Fall die Intensität in Abhängigkeit der Temperatur, indem Sie eine Taylor-Entwicklung des Nenners in $\frac{x}{T}$ bis zu geeigneter Ordnung durchführen.

b) Die Fermifunktion lautet

$$f(x) = \frac{1}{e^{ax} + 1},$$

wohingegen die sogenannte Bosefunktion lautet

$$b(x) = \frac{1}{e^{ax} - 1},$$

wobei jeweils $a > 0$. Bestimmen Sie jeweils das asymptotische Verhalten beider Funktionen für den Fall $x \gg \frac{1}{a}$. Ermitteln Sie auch das asymptotische Verhalten wenn $x \ll \frac{1}{a}$, indem Sie die Taylor-Entwicklung bis $\mathcal{O}(x^2)$ der Nenner bestimmen. Ermitteln Sie die Grenzwerte $\lim_{x\to\pm\infty}$ und $\lim_{x\to 0}$ für beide Funktionen. Bestimmen Sie die Ableitung der Fermifunktion. Wo ist diese maximal? Skizzieren Sie nun beide Funktionen.
Bonusaufgabe: zeigen sie dass der Graph der Fermifunktion punktsymmetrisch bzgl. dem Punkt $(x = 0, f(x = 0))$ ist `(5 Bonuspunkte)`.

4. Taylor-Entwicklung und Potenzreihen *6+4 Punkte*

a) Entwickeln Sie $\sqrt{1 + x^2}$ in eine Potenzreihe für $x \ll 1$ bis auf einen Fehler $\mathcal{O}(x^5)$. Verwenden Sie dazu, dass $\sqrt{y} = \exp(\frac{1}{2}\ln(y))$, sowie die aus der Vorlesung bekannten Potenzreihen von $\exp(y)$ und $\ln(1 + y)$ und setzen Sie diese ineinander ein. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch Bestimmung der zugehörigen Taylorentwicklung.

b) Ein Objekt mit Geschwindigkeit v und Ruhemasse m besitzt die relativistische Gesamtenergie

$$E(v) = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Hierbei ist c die Lichtgeschwindigkeit. Zeigen Sie mit Hilfe der Taylor-Entwicklung, dass für $v \ll c$ die relativistische Energie in die kinetische Energie $E(v) - E(0) = m\frac{v^2}{2}$ übergeht. Berechnen Sie auch die erste relativistische Korrektur.