

---

# Mathematische Methoden der Physik

## Übung 9

---

Wintersemester 2007/2008

Bitte schreiben Sie stets Ihren Namen und die Gruppennummer auf die erste Seite Ihrer Lösung.

Abgabe am 8.1.08.

### 1. Potential

3+3+3+4 Punkte

a) Begründen Sie, dass Kraftfelder der Form

$$(i) : \quad \vec{F}(\vec{r}) = (f(x), g(y), h(z)), \quad (ii) : \quad \vec{F}(\vec{r}) = f(r)\hat{r} \quad (\text{mit } r = |\vec{r}|, \hat{r} = \vec{r}/r)$$

immer konservativ sind. Dabei sind  $f, g, h$  beliebige "anständige" Funktionen.

b) Es seien  $F, G, H$  die Stammfunktionen von  $f, g, h$ . Geben Sie hiermit Potentiale für die Felder in (a) an!

c) Zeigen Sie, dass Felder der Form  $\vec{F}(\vec{r}) = f(\vec{r})\hat{r}$  in der Regel nicht konservativ sind!

d) Begründen Sie, dass das Skalarfeld  $\vec{F}(x, y) = (y, x)$  konservativ ist und bestimmen Sie ein Potential mit Hilfe eines geeigneten Wegintegrals!

### 2. Rotation und Potential

5+3+(3+5) Punkte

a) Skizzieren Sie das zweidimensionale Vektorfeld  $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$\vec{F}(x, y) = \frac{(-y, x)}{x^2 + y^2}.$$

Erweitern Sie den Definitionsbereich von  $\vec{v}$  auf den dreidimensionalen Raum ohne die  $z$ -Achse (Hinweis: der Bildvektor ist nun  $\frac{(-y, x, 0)}{x^2 + y^2}$ ) und berechnen Sie dann seine Rotation und Divergenz.

b) Berechnen Sie das Wegintegral von  $\vec{F}$  über einen Kreis  $K$  vom Radius  $R$  in der  $x - y$ -Ebene um den Ursprung. Diskutieren Sie das Ergebnis im Hinblick auf das Resultat in (a) !

c) *Bonusaufgabe:* Bestimmen Sie den Gradienten von  $f(\vec{r}) = \arctan(y/x)$ . Warum liefert dies kein Potential für  $\vec{F}$  ?

d) *Bonusaufgabe:* Wiederholen Sie die Betrachtungen in (a) und (b) für das Vektorfeld

$$\vec{F}_\alpha = \frac{(-y, x)}{(x^2 + y^2)^\alpha}.$$

### 3. Identitäten der Vektoranalysis

10(+4) Punkte

a) Es seien  $f(\vec{r}), g(\vec{r})$  Skalarfelder und  $\vec{A}(\vec{r}), \vec{B}(\vec{r})$  Vektorfelder. Zeigen Sie die folgenden Identitäten:

$$\begin{aligned} \text{grad}(fg) &= f \text{ grad } g + g \text{ grad } f \\ \text{div}(f\vec{A}) &= f \text{ div } \vec{A} + \vec{A} \cdot \text{grad } f \\ \text{rot}(f\vec{A}) &= f \text{ rot } \vec{A} + (\text{grad } f) \times \vec{A} \\ \text{div}(\vec{A} \times \vec{B}) &= (\text{rot } \vec{A}) \cdot \vec{B} - \vec{A} \cdot \text{rot } \vec{B} \end{aligned}$$

b) *Bonusaufgabe:* Zeigen Sie, dass für beliebige Vektorfelder  $\vec{A}(\vec{r})$  gilt:

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{A}) = \text{grad}(\text{div } \vec{A}) - \Delta \vec{A}.$$

Dabei ist  $\Delta \vec{A}$ , wie in der Vorlesung angegeben, komponentenweise zu bilden.

### 4. Volumenintegrale

3+4+5 Punkte

a) Berechnen Sie das Volumenintegral

$$I = \int_{-3}^3 \int_{-4}^4 \int_{-3}^3 f_1(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

eines Skalarfeldes  $f_1(x, y, z) = (x + y)^2 \cos(\frac{\pi}{2}z)$  über einen Quader!

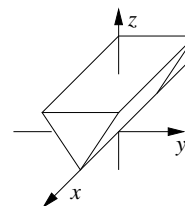
b) Berechnen Sie

$$\int_{-1}^1 \left( \int_0^3 \left( \int_{-z}^z (x^2y + y^2z + z^2x) \, dx \right) dy \right) dz!$$

c) Berechnen Sie das Volumenintegral

$$I = \int_0^3 \int_{-\frac{2}{3}z}^{\frac{2}{3}z} \int_{-4}^4 f_2(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

des Skalarfeldes  $f_2(x, y, z) = z + 3 \sin(\pi y)x^2$  über einen Keil!  
Begründen Sie die Wahl der Integrationsgrenzen!



### 5. Schwerpunkt

5+5 Punkte

Der Schwerpunkt  $\vec{R}_s$  eines Körpers  $K$  mit der Massendichte  $\rho(\vec{r})$  ist definiert als das Volumenintegral

$$\vec{R}_s = \frac{1}{M} \int_K \vec{r} \rho(\vec{r}) dV,$$

wobei  $M = \int_K \rho(\vec{r}) dV$  die Masse des Körpers ist.

Wir betrachten im Folgenden nur homogene Massenverteilungen  $\rho(\vec{r}) = \rho_0 = \text{konstant}$ .

a) Berechnen Sie den Schwerpunkt Halbzylinders mit Länge  $H$  und Radius  $R$ .

b) Berechnen Sie den Schwerpunkt einer Halbkugel mit Radius  $R$ .

Hinweis: Wählen Sie geeignete Koordinaten und ein geeignetes Koordinatensystem, so dass Sie die Symmetrien ausnutzen können. Die Volumina der Körper dürfen als bekannt vorausgesetzt werden und müssen nicht explizit berechnet werden.

**Wir wünschen Ihnen ein frohes Fest und einen guten Rutsch ins neue Jahr!!**