Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Andreas Schadschneider
Friedmar Schütze

Mathematische Methoden der Physik
4. Übung

Sommersemester 2008

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Gruppennummer auf die erste Seite Ihrer Lösung.

Abgabe im Übungskasten am 05.05.2008 vor der Vorlesung

1. Exponentialfunktion und Logarithmus *5+5 Punkte*

a) Leiten Sie mithilfe der Eigenschaft $\exp(a+b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$, der Definition des Logarithmus als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion, sowie der Definition $x^a := \exp(a \ln x)$ die aus der Vorlesung bekannten Rechenregeln für Logarithmen und Potenzen her. Was sind hiernach e^0 und $\log 1$?

b) Die hyperbolischen Funktionen sind definiert durch $\cosh x := (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})/2$, $\sinh x := (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})/2$ sowie $\tanh x := \sinh x / \cosh x =: 1/\coth x$. Diskutieren Sie den hyperbolischen Cosinus und Sinus. Was sind deren Ableitungen? Finden Sie das hyperbolische Analogon zur Identität $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

2. Taylorentwicklung *5 Punkte*

a) Entwickeln Sie die Funktion $y = \sqrt{1+x^2}$ für kleine $x \ll 1$ in eine Potenzreihe bis zur Ordnung $\mathcal{O}(x^6)$. Verwenden Sie dabei, daß $\sqrt{y} = \exp(\frac{1}{2}\log y)$, sowie die bekannten Potenzreihen von $\exp(x)$ und $\log(1+x)$. Zeichnen Sie $y(x)$ sowie das berechnete Taylorpolynom im Intervall $x \in [-2:2]$ per Hand oder mit dem Computer.

3. Partielle und totale Ableitungen *5+5 Punkte*

In der Vorlesung haben Sie partielle Ableitungen kennengelernt. Dies ist an sich keine neue Begrifflichkeit, Sie sind aus der Schule bereits bestens damit vertraut. Es handelt sich einfach um die Ableitung einer Funktion nach einem ihrer Einträge. Sei beispielsweise $f(x,y)$ eine Funktion, so ist

$$\partial_2 f(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}.$$

Schwierig wird die Situation nun durch zweierlei Dinge. Erstens einigt man sich in der Physik nicht auf feste Reihenfolgen der Argumente. Sei also der ohmsche Widerstand gegeben durch $R = U/I$, so kann man dies als $R(U,I)$ und gleichermaßen als $R(I,U)$ auffassen. Der Ausdruck $\partial_2 R$ ist damit höchst mehrdeutig, und man schreibt stattdessen so etwas wie $\partial_U R$. Dies führt jedoch zu einer Verwechslungsgefahr zwischen der Variablen U und ihrem Wert! Desweiteren setzt man in der Physik häufig Funktionen in Funktionen ein, etwa der Druck als Funktion der Höhe $p(h) \longrightarrow p(h(t))$, wenn die Höhe zeitlich variiert. So wird auch in einer Laborwelt mit konstantem Druck, dieser eine Funktion der Zeit, wenn die Meßapparatur einer zeitlichen Höhenschwankung unterliegt. Strenggenommen hat man es mit einer neuen Funktion $p(t)$ zu tun. Die folgenden Aufgaben sollen Ihnen helfen, etwas mehr Klarsicht in die nützliche aber gefährlich mehrdeutige Notation zu bringen und den Umgang mit den Begrifflichkeiten zu schulen.

a) Die Kapazität eines Plattenkondensators ist bestimmt durch

$$C(\varepsilon_\mathrm{r}, A, d) = \varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r} \frac{A}{d}.$$

Dabei ist ε_r die Dielektrizität des Materials zwischen den Platten, A die Plattenfläche und d der Plattenabstand. Wir betrachten nun die Situation, daß der Plattenabstand periodisch variiert: $d(t) = d_0 \cdot \sin(\Omega t) + 2d_0$, indem beispielsweise eine Platte harmonisch schwingt.
Berechnen Sie das totale Differential von C sowie die zeitliche Änderung der Kapazität!
Nun wird auch noch ein Dielektrikum periodisch zwischen die Platten geschoben und wieder entfernt. Näherungsweise soll dabei gelten $\varepsilon_\mathrm{r}(t) = \varepsilon_{\mathrm{r},0} \cdot \cos(\omega t) + \varepsilon$. Berechnen Sie die zeitliche Änderung der Kapazität erneut!

b) Die barometrische Höhenformel

$$p(h_0 + \Delta h) = p_0 \cdot \mathrm{e}^{\frac{-\Delta h}{h_\mathrm{s}}}$$

beschreibt näherungsweise den Luftdruck als Funktion der Höhe. Über einen gewissen Meßzeitraum am Boden ($h = h_0$) beobachtet man einen Anstieg des Druckes mit der Zeit $p_0 = a \cdot t^2$. Berechnen Sie die zeitliche Änderung der Druckkurve eines Meßgerätes, welches an einem Ballon hängend langsam herunterfällt: $h_\mathrm{m} = h_0 + h_{\mathrm{m},0} \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau}$.

4. Rechenregeln *8 Punkte*

Zeigen bzw. berechnen Sie ($\vec{r} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^\mathrm{t}$, $|\vec{r}| = r$)

a) $\mathrm{grad}(\phi(\vec{r})\psi(\vec{r}))$

b) $\mathrm{grad}\, f(r) = f'(r)\vec{e}_r$

c) $\mathrm{div}\left[\mathrm{grad}\, f(r)\right] = f''(r) + 2f'(r)/r$

d) $\mathrm{div}\left[\mathrm{rot}\, \vec{v}(\vec{r})\right] = 0$

5. Gradient und Kegelschnitte *10 Punkte*

In der vergangenen Woche haben Sie bereits Bekanntschaft mit einer wichtigen Kegelschnittklasse gemacht: den Hyperbeln. Zur Erinnerung, die Gleichung $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ beschreibt eine Hyperbel mit Brennpunkt $f = \begin{pmatrix} e & 0 \end{pmatrix}^\mathrm{t}$ ($e^2 = a^2 + b^2$). Eine weitere Kegelschnittklasse sind die Ellipsen, die durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

gegeben sind, und deren Brennpunkt durch $f = \begin{pmatrix} e & 0 \end{pmatrix}^\mathrm{t}$ ($e^2 = a^2 - b^2$) bestimmt ist. Zeigen Sie, daß sich konfokale (identischer Brennpunkt) Ellipsen und Hyperbeln orthogonal schneiden! (Es reicht, wenn Sie sich auf einen Hyperbelzweig beschränken.)

6. Rotation *7 Punkte*

Ein Fluß hat annähernd ein quadratisches Geschwindigkeitsprofil $v_x(y)$. Nahe dem Ufer ist das Wasser durch Reibung stärker gebremst, als in der Mitte. Wir betrachten einen idealisierten Fluß entlang der x-Achse, der im Intervall $y \in [-a; a]$ fließt. Die Geraden $y = \pm a$ beschreiben also die Uferlinien, an denen die Geschwindigkeit verschwinden soll. Berechnen Sie die z-Komponente der Rotation des Geschwindigkeitsfeldes (also an der Wasseroberfläche), wenn die Maximalgeschwindigkeit (in der Mitte) $v = v_\mathrm{max}$ betragen soll! Hinweis: Bestimmen sie zuerst das Geschwindigkeitsprofil aus den gegebenen Randbedingungen!
Wie erklärt es sich, daß die Oberflächenrotation in der Flußmitte verschwindet?