Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Andreas Schadschneider
Friedmar Schütze

Mathematische Methoden der Physik
8. Übung

Sommersemester 2008

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Gruppennummer auf die erste Seite Ihrer Lösung.

Abgabe im Übungskasten am 09.06.2008 vor der Vorlesung

1. Kontinuitätsgleichung *8 Punkte*

Wie Sie vielleicht schon wissen, folgt eine Ladungsdichte $\rho(\vec{r},t)$, sowie deren entsprechende Stromdichte $\vec{\jmath}(\vec{r},t)$ der Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t \rho(\vec{r},t) + \operatorname{div} \vec{\jmath}(\vec{r},t) = 0.$$

Diese Gleichung soll nun aus elementaren Überlegungen abgeleitet werden. Aufgrund der Ladungserhaltung ist bekannt, daß die Änderung der Ladung innerhalb eines beschränkten Volumens U gleich dem Stromfluß durch seine Berandungsfläche sein muß. Lapidar kann man dies so umformulieren, daß alles, was weniger im Topf U ist als vorher, jetzt woanders sein muß also rausgeflossen ist. Als Gleichung liest sich diese Aussage wie folgt:

$$\partial_t Q = \partial_t \int_U \rho(\vec{r},t) \mathrm{d}V = -\int_{\partial U} \vec{\jmath}(\vec{r},t) \cdot \mathrm{d}\vec{S}.$$

Nutzen Sie diese Gleichung unter der Annahme, daß sie für beliebige Teilmengen $U \subset \mathbb{R}^3$ gelten muß, um die Kontinuitätsgleichung abzuleiten.

2. Vektoranalysis *8 Punkte*

Zeigen Sie mithilfe der Sätze von Gauß und Stokes, daß für jedes Vektorfeld $\vec{v}$ gilt $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{v} = 0$, und für jedes Skalarfeld f die Gleichung $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0$ erfüllt ist.
Die Betonung liegt hier auf der Verwendung der Integralsätze! Sie dürfen verwenden, daß das Integral über die leere Menge gleich 0 ist.

3. Anwendung *5 + 5 Punkte*

Ein Strom fließt in Richtung der z-Achse, die Stromdichte $\vec{\jmath}$ (Strom pro Fläche!) hängt gemäß

$$j(\rho) = a\mathrm{e}^{-\lambda\rho^2}$$

vom Abstand ρ von der z-Achse ab.

a) Berechnen Sie den Strom, den ein Zylinder um die z-Achse mit Radius R führt, sowie den Gesamtstrom ($R \to \infty$).

b) Berechnen Sie mithilfe des Satzes von Stokes und der Maxwellgleichung $\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{\jmath}$ das Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r})$.

4. Flächenintegral *4 + 5 Punkte*

Betrachten Sie einen nach oben geöffneten Kegel um die z-Achse mit einem Winkel ϑ zwischen Kegelmantel und z-Achse und einer Höhe h. Berechnen Sie unter Verwendung von sphärischen Polarkoordinaten

a) die Oberfläche des Kegels und

b) den Fluß des Feldes $\vec{A}(\vec{r}) = ar^n \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{t}}$ (die Komponenten des Feldes sind kartesisch!, fragen Sie bei Mißverständnissen) durch die Kegeloberfläche!

5. Komplexe Zahlen

4 + 6 + 5 Punkte

a) Finden Sie alle Nullstellen des Polynoms

$$p(x) = x^2 + 6x + 13$$

b) Zeigen Sie: Sei x_0 Nullstelle des Polynoms $p(x)$ mit ausschließlich reellen Koeffizienten, so ist zwingend auch die komplex Konjugierte Zahl x_0^* eine Nullstelle des Polynoms.

c) Zeichnen Sie die Menge

$$K_{r,R} := \{z \in \mathbb{C} \mid r \leq |z| \leq R\}$$

in der Gaußschen Zahlenebene.