Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Andreas Schadschneider
Friedmar Schütze

Mathematische Methoden der Physik
12. Übung

Sommersemester 2008

Die Bearbeitung dieser Übung ist freiwillig, für Studierende, die an der zweiten Klausur teilnehmen möchten, allerdings sehr empfehlenswert!

1. Direktes Produkt

** Punkte*

Zeigen Sie, dass das in der Vorlesung definierte *direkte Produkt* $G_1 \times G_2$ zweier Gruppen G_1, G_2 mit der dort angegebenen Multiplikation tatsächlich eine Gruppe bildet.

2. Wärmeleitungsgleichung

** Punkte*

In dieser Aufgabe wollen wir die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = 0 \tag{1}$$

mit der Anfangsbedingung

$$f(x,0) = h(x) \tag{2}$$

lösen. Dazu gehen wir wie folgt vor:

a) Fouriertransformieren Sie (1) und die Anfangsbedingung (2) in der Ortskoordinaten x.

b) Lösen Sie die resultierende partielle DGL 1. Ordnung.

c) Transformieren Sie die Lösung zurück in die Ortsdarstellung. Dabei können Sie den Faltungssatz benutzen!

Wie sieht die Lösung aus, wenn die Anfangsbedingung durch $h(x) = \delta(x)$ gegeben ist?

3. SU(2)

** Punkte*

Die Generatoren der zweidimensionalen unitären Drehgruppe sind die sog. *Pauli-Matrizen*

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

d.h. man kann die Gruppenelemente $g \in SU(2)$ durch drei Winkel gemäß

$$g(\alpha,\beta,\gamma) = \exp(\alpha\sigma_1 + \beta\sigma_2 + \gamma\sigma_3)$$

parametrisieren. Dabei ist die Exponentialfunktion einer Matrix M durch die Reihendarstellung

$$\exp(M) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n}{n!}$$

definiert.

a) Zeigen Sie, dass die Pauli-Matrizen die folgenden Kommutatorrelationen erfüllen:

$$[\sigma_j, \sigma_k] = 2i\epsilon_{jkl}\sigma_l$$

erfüllen. Dabei haben wir die Einsteinsche Summenkonvention benutzt. ϵ_{jkl} ist der total antisymmetrische Tensor 3. Stufe.

b) Welche Eigenschaften muß W haben, damit $\exp(iW)$ unitär ist? Überprüfen Sie, dass die Paulimatrizen diese Eigenschaft besitzen.
Tipp: Entwickeln Sie die Exponentialfunktion in linearer Ordnung in W.

c) Berechnen Sie $\exp(i\alpha\sigma_2)$.
Tipp: Zerlegen Sie die exp-Reihe in gerade und ungerade Potenzen von σ_2 und zeigen Sie, dass $\sigma_2^{2n} = 1$ und $\sigma_2^{2n+1} = \sigma_2$ gilt.

4. Zylinder- und Kugelkoordinaten ** Punkte*

Stellen Sie den Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor in folgenden Basissystemen dar:

a) Zylinderkoordinaten,

b) Kugelkoordinaten.