Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Andreas Schadschneider
Friedmar Schütze

Mathematische Methoden der Physik
5. Übung

Wintersemester 2008/09

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Gruppennummer auf die erste Seite Ihrer Lösung.

Abgabe im Übungskasten am 18.11.2008 vor der Vorlesung

0. Gelbe Karte *-10 Punkte (bei Versagen)*

Heften Sie Ihre Lösungsblätter **fest** zusammen! Schreiben Sie Ihren Namen **und** die Gruppennummer **gut sichtbar** auf die **erste** Seite Ihrer Lösung! Auch wenn es einigen schwerfallen mag, ist dies eine wichtige Übung, die nicht nur zur Erlangung dieses Scheines notwendig ist, sondern die Sie als eine der wesentlichsten technischen Fertigkeiten durch Ihr gesamtes Studium begleiten wird, und sich insbesondere in Klausuren als unverzichtbar erweist. Deshalb sollten Sie diese Aufgabe auch selbstständig lösen, abschreiben hilft Ihnen nicht.

1. Komplexe Zahlen *8 + 4 + 3 Punkte*

a) Zeigen Sie mithilfe der Potenzgesetze und der Eulerschen Formel die Additionstheoreme von Sinus $\sin(x \pm y)$ und Cosinus $\cos(x \pm y)$.

b) Stellen Sie die Beziehung zwischen den Winkelfunktionen und den hyperbolischen Funktionen her! Schauen Sie sich dazu die Definition von sinh und cosh nocheinmal an, und zeigen Sie die Parallelen auf.

c) Zeigen Sie den Satz von de Moivre, der besagt, daß für alle $x \in \mathbb{C}$ und alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$(\cos x + \mathrm{i} \sin x)^n = \cos nx + \mathrm{i} \sin nx.$$

2. Integrale *8 + 12 Punkte*

a) Betrachten Sie ein Integral, wie es etwa in Modellen der Quantenfeldtheorie vorkommt:

$$I_{\Lambda\Lambda_0}(m) = \int\limits_{\Lambda}^{\Lambda_0} \frac{r^{d-1}}{r^2 + m^2} \mathrm{d}r.$$

Was können Sie im Fall $\Lambda = 0$ über die Existenz des Grenzwertes $\lim\limits_{m \to 0} I_{0\Lambda_0}(m)$ aussagen? Was läßt sich prinzipiell über die Existenz des Grenzwertes $\Lambda_0 \to \infty$ (bei festem Λ mit $0 < \Lambda < \Lambda_0$) feststellen? Der Parameter m stellt die Masse dar, es ist also $m > 0$. Weiterhin bezeichnet d die Dimension des Systems, wir gehen von $d \geq 1$ aus.

b) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\int \mathrm{d}x\, x \cdot \mathrm{e}^{-a \cdot x^2}\ ; \quad \int\limits_0^a \mathrm{d}x\, x^2 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \cdot x}\ ; \quad \int\limits_0^a \mathrm{d}x\ \cos(\alpha x) \cdot \mathrm{e}^{\beta x}\ ; \quad \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t}\, \mathrm{d}t$$

3. Partialbruchzerlegung *3 + 17 Punkte*

Sei $r(z)$ eine rationale Funktion. Dies bedeutet, es gibt Polynome $p(z)$ und $q(z)$, sodaß $r(z) = p(z)/q(z)$. Polynome lassen sich immer in Linearfaktoren zerlegen. Haben p und q gemeinsame Nullstellen, so kann man durch Polynomdivision die entsprechenden Linearfaktoren herauskürzen. Wir gehen deshalb oBdA davon aus, daß p und q keine gemeinsamen Nullstellen haben. Desweiteren ist Ihnen aus der Schule hoffentlich (noch) bekannt, daß man Polynome durcheinander mit Rest teilen kann. Wir können also ganz allgemein schreiben

$$r(z) = f(z) + \frac{h(z)}{q(z)},$$

wobei $h(z)$ ein Polynom niedrigeren Grades, verglichen mit $q(z)$, und $f(z)$ ein Polynom ist.
Seien nun $c_1, \dots, c_r \in \mathbb{C}$ die Nullstellen der Nennerfunktion q mit den entsprechenden Vielfachheiten $e_1, \dots, e_r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Anders gesprochen, sei

$$q(z) = Q \cdot \prod_{i=1}^{r} (z - c_i)^{e_i}.$$

Diese Nullstellen von q sind genau die sogenannten Polstellen (kurz Pole) von $r(z)$. Die Zahl e_i nennt man, wenn man von Polen spricht, Ordnung des Pols c_i. Das Theorem von der Partialbruchzerlegung macht nun die folgende Aussage: Es existieren $\alpha_{ik} \in \mathbb{C}$, sodaß

$$r(z) = f(z) + \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{e_i} \frac{\alpha_{ik}}{(z - c_i)^k}.$$

Erheblich klarer wird die Aussage wohl an einem
Beispiel:
Wir betrachten die Funktion $r(z) = (z-1)/\left[(z-2)^2(z+2)\right]$. Das Theorem von der Partialbruchzerlegung garantiert uns nun, daß wir

$$r(z) = \frac{\alpha_1}{(z-2)} + \frac{\alpha_2}{(z-2)^2} + \frac{\beta}{(z+2)}, \tag{1.1}$$

mit noch zu bestimmenden $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in \mathbb{C}$ schreiben können. Wie gehen wir nun vor, um die Koeffizienten zu bestimmen? Nun, multiplizieren wir beide Seiten von (1.1) mit $(z + 2)$ und werten den gewonnenen Ausdruck an $z = -2$ aus, so erhalten wir $\beta = -3/16$. (Vollziehen Sie dies nach!) Ähnlich berechnen wir α_2. Es werden einfach beide Seiten von (1.1) mit $(z - 2)^2$ multipliziert, an $z = 2$ ausgewertet, und wir lesen ab: $\alpha_2 = 1/4$. Um α_1 zu bekommen, muß man etwas mehr zirkeln. Subtrahiere $\alpha_2/(z - 2)^2$ von (1.1):

$$\begin{aligned} r(z) - \frac{\alpha_2}{(z-2)^2} &= \frac{(z-1)}{(z-2)^2(z+2)} - \frac{1}{4(z-2)^2} = \frac{4(z-1)-(z+2)}{4(z-2)^2(z+2)} = \frac{3z-6}{4(z-2)^2(z+2)} = \\ \frac{3}{4(z-2)(z+2)} &= \frac{\alpha_1}{(z-2)} + \frac{\beta}{(z+2)} \end{aligned} \tag{1.2}$$

Aus der zweiten Zeile in (1.2) kann man nun, mit den eben schon angewendeten Verfahren nachrechnen, daß $\alpha_1 = 3/16$.

a) Machen Sie, für die eben vorgeführte Beispielrechnung die Probe! Zeigen Sie dazu, daß (1.1) mit den angegebenen α_1, α_2 und β eine wahre Aussage darstellt.

b) Vielleicht fragen Sie sich, wozu die Partialbruchzerlegung gut sein soll? Dies wird Ihnen jetzt bestimmt ganz schnell klar: Bestimmen Sie die Stammfunktion von

$$r(z) = \frac{z+3}{2z^3 - 8z^2 + 10z - 4}.$$

Tips: (1) Probieren Sie doch einmal, ob sich bei $z = 1$ ein Pol von $r(z)$ finden läßt.
(2) Das Ergebnis Ihrer Partialbruchzerlegung können Sie leicht mit den meisten der (frei) verfügbaren Computeralgebrasysteme verifizieren. Eine kleine Auswahl freier Programme habe ich unter `http://www.thp.uni-koeln.de/~schuetze/lehre.html` (Sommer 2008) zusammengestellt. Unter Maxima erhält man die Partialbruchzerlegung des Beispiels mit
`partfrac ((z-1)/((z-2)^2*(z+2)), z);`
Für ein entsprechendes vorgehen in Axiom siehe Handbuch (im Netz verknüpft).