Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Andreas Schadschneider
Friedmar Schütze

Mathematische Methoden der Physik
7. Übung

Wintersemester 2008/09

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Gruppennummer auf die erste Seite Ihrer Lösung.

Abgabe im Übungskasten am 02.12.2008 vor der Vorlesung

0. Klausurvorbereitung

Diese Aufgabenserie ist etwas weniger umfangreich gestaltet als sonst üblich, um Ihnen Gelegenheit zu geben, sich auf die Vorklausur vorzubereiten. Klausurrelevant sind alle Hausaufgabenserien bis einschließlich dieser, sowie der gesamte Vorlesungsstoff bis einschließlich der Vorlesung am 02.12.2008. Neben einem Kurzfragenabschnitt wird sich die Klausur im wesentlichen (aber nicht ausschließlich) an den Hausaufgaben orientieren. Wenn Sie die Übungen also nicht nur nachvollziehen können, sondern selbständig zu lösen in der Lage sind, haben Sie wenig zu befürchten.
An dieser Stelle möchte ich auch gleich noch auf die Klausurregelungen hinsichtlich der Verwendung von Hilfsmitteln eingehen, und mache Sie schon jetzt auf den Klausurkopf aufmerksam:
Lesen Sie die Aufgabenstellung **sorgfältig** durch. Die Aufgaben sind thematisch und nicht nach Schwierigkeit geordnet. Sie haben t Minuten Zeit. Es sind maximal $P{+}ZP$ Punkte zu erreichen. Mit mindestens MP Punkten haben Sie die Klausur bestanden.
Bitte kreuzen Sie die bearbeiteten Aufgaben auf dem Deckblatt an. Außer Papier und Stift sind keine Hilfsmittel erlaubt! Dies schließt Taschenrechner, Mobiltelefone, MP3-Spieler, Etuis etc. ein! Etwaig vorgefundene Hilfsmittel jedweder Art werden als Betrugsversuch gewertet!

1. Inhomogene Differentialgleichung *10 Punkte*

Gegeben sei das Anfangswertproblem ($t \geq 0$):

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x &= h\cos\omega t - \Omega\cdot(x-\epsilon) \\ x(t=0) &= x_0. \end{aligned}$$

Lösen Sie das Anfangswertproblem für $x_0 = 0$ mittels Variation der Konstanten.

2. Partielle und totale Ableitungen *5 + 5 Punkte*

In der Vorlesung haben Sie partielle Ableitungen kennengelernt. Dies ist an sich keine neue Begrifflichkeit, Sie sind aus der Schule bereits bestens damit vertraut. Es handelt sich einfach um die Ableitung einer Funktion nach einem ihrer Einträge. Sei beispielsweise $f(x,y)$ eine Funktion, so ist

$$\partial_2 f(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}.$$

Schwierig wird die Situation nun durch zweierlei Dinge. Erstens einigt man sich in der Physik nicht auf feste Reihenfolgen der Argumente. Sei also der ohmsche Widerstand gegeben durch $R = U/I$, so kann man dies als $R(U,I)$ und gleichermaßen als $R(I,U)$ auffassen. Der Ausdruck $\partial_2 R$ ist damit höchst mehrdeutig, und man schreibt stattdessen so etwas wie $\partial_U R$. Dies führt jedoch zu einer Verwechslungsgefahr zwischen der Variablen U und ihrem Wert! Desweiteren setzt man in der Physik häufig Funktionen in Funktionen ein, etwa der Druck als Funktion der Höhe $p(h) \longrightarrow p(h(t))$, wenn die Höhe zeitlich variiert. So wird auch in einer Laborwelt mit konstantem Druck, dieser eine Funktion der Zeit, wenn die Meßapparatur einer zeitlichen Höhenschwankung unterliegt. Strenggenommen hat man es mit einer neuen Funktion $p(t)$ zu tun. Die folgenden Aufgaben sollen Ihnen helfen, etwas mehr Klarsicht in die nützliche aber gefährlich mehrdeutige Notation zu bringen und den Umgang mit den Begrifflichkeiten zu schulen.

a) Die Kapazität eines Plattenkondensators ist bestimmt durch

$$C(\varepsilon_\mathrm{r}, A, d) = \varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r} \frac{A}{d}.$$

Dabei ist ε_r die Dielektrizität des Materials zwischen den Platten, A die Plattenfläche und d der Plattenabstand. Wir betrachten nun die Situation, daß der Plattenabstand periodisch variiert: $d(t) = d_0 \cdot \sin(\Omega t) + 2d_0$, indem beispielsweise eine Platte harmonisch schwingt.
Berechnen Sie das totale Differential von C sowie die zeitliche Änderung der Kapazität!
Nun wird auch noch ein Dielektrikum periodisch zwischen die Platten geschoben und wieder entfernt. Näherungsweise soll dabei gelten $\varepsilon_\mathrm{r}(t) = \varepsilon_{\mathrm{r},0} \cdot \cos(\omega t) + \varepsilon$. Berechnen Sie die zeitliche Änderung der Kapazität erneut!

b) Die barometrische Höhenformel

$$p(h_0 + \Delta h) = p_0 \cdot \mathrm{e}^{\frac{-\Delta h}{h_\mathrm{s}}}$$

beschreibt näherungsweise den Luftdruck als Funktion der Höhe. Über einen gewissen Meßzeitraum am Boden ($h = h_0$) beobachtet man einen Anstieg des Druckes mit der Zeit $p_0 = a \cdot t^2$. Berechnen Sie die zeitliche Änderung der Druckkurve eines Meßgerätes, welches an einem Ballon hängend langsam herunterfällt: $h_\mathrm{m} = h_0 + h_{\mathrm{m},0} \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau}$.

3. Rechenregeln *10 Punkte*

Zeigen bzw. berechnen Sie ($\vec{r} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^\mathrm{t}$, $|\vec{r}| = r$)

a) $\operatorname{grad}(\phi(\vec{r})\psi(\vec{r}))$

b) $\operatorname{grad} f(r) = f'(r)\vec{e}_r$

c) $\operatorname{div}\left[\operatorname{grad} f(r)\right] = f''(r) + 2f'(r)/r$

d) $\operatorname{div}\left[\operatorname{rot} \vec{v}(\vec{r})\right] = 0$

e) $\operatorname{div}\left[f(\vec{r}) \cdot \vec{v}(\vec{r})\right] = f \cdot \operatorname{div} \vec{v} + (\operatorname{grad} f) \cdot \vec{v}$