
Mathematische Methoden der Physik

10. Übung

Wintersemester 2008/09

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Gruppennummer auf die erste Seite Ihrer Lösung.

Abgabe am 08/09.01.2009 in der Übung!

1. Eigenwertproblem

15 Punkte

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Ist A hermitesch? Berechnen Sie die Eigenwerte sowie die Eigenvektoren von A ! Geben Sie die Transformationsmatrix sowie das Transformationsgesetz an, nach welchem A diagonalisiert wird. Sind die Eigenvektoren orthogonal?

2. Paulimatrizen

15 + 10 + 8 + 7 Punkte

Gegen Ende dieses Kurses wird hoffentlich noch Zeit sein, Ihnen eine kleine Einführung in die Gruppentheorie zu geben. Der Spinoperator in der Quantenmechanik ist eng mit den Erzeugern der Spingruppe $SU(2)$ verbunden, den sogenannten Paulimatrizen:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren der Paulimatrizen und geben Sie damit die Spektraldarstellung an.

Man kann sogar stetige¹ Funktionen auf selbstadjungierte Operatoren allgemein und selbstadjungierte Matrizen im speziellen anwenden. Dazu bedient man sich der Spektraldarstellung, die Sie im endlich-dimensionalen Fall schon kennengelernt haben. Seien dazu λ_i die Spektralwerte, P_i die entsprechenden Spektralprojektoren der hermiteschen Matrix a und f eine stetige Funktion, so definiert man

$$a = \sum_i \lambda_i \cdot P_i \quad \Rightarrow \quad f(a) := \sum_i f(\lambda_i) \cdot P_i.$$

Ist f analytisch (auf ganz \mathbb{C}), ist dies äquivalent² zu

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n; \quad x \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow \quad f(a) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n a^n$$

b) Zeigen Sie, daß $\exp[\alpha \cdot \sigma_i] = \cosh(\alpha) \cdot 1 + \sinh(\alpha) \cdot \sigma_i$.

c) Welche Eigenschaften muß eine Matrix a haben, damit $\exp[ia]$ unitär ist? Zeigen sie, daß die Paulimatrizen diese Eigenschaft besitzen!

d) Zeigen Sie, daß für jede selbstadjungierte Matrix a gilt $\det[\exp(a)] = \exp[\text{tr}(a)]$.

¹Selbst die Forderung nach Stetigkeit läßt sich etwas aufweichen.

²Im unbeschränkten Fall sind Abstriche am Definitionsbereich zu verzeichnen, der sich auf die Menge der sog. analytischen Vektoren reduziert.

3. Hermitesche Operatoren

10 Punkte

Ein Operator p operiere auf seinem Definitionsbereich $D(p) \subset H$ im Hilbertraum $H = L^2[-a; a]$ (komplexwertiger Funktionen) durch

$$p: H \supset D(p) \longrightarrow H \quad ; \quad H \ni f \mapsto p(f) = if'.$$

Dabei sei der Definitionsbereich gegeben als

$$D(p) := \{f \in H \mid f \in C^1[-a; a], f' \in H, f(-a) = f(a) = 0\}.$$

$C^1[-a; a]$ bezeichnet die Menge aller differenzierbarer Funktionen auf dem Intervall $[-a; a]$. Zeigen Sie, daß p hermitesch ist.

Bemerkungen: (a) Der Operator taucht, mit einem zusätzlichen Vorfaktor verziert, als der Impulsoperator für das Kastenpotentialproblem in der Quantenmechanik auf. Quantenmechanische Wellenfunktionen sind ebenfalls komplexwertig. Die Hermitezität ist daher sehr wichtig, da physikalische Observablen (wie eben auch der Impuls) nur reelle Eigenwerte (mögliche Meßwerte) haben dürfen. Dies stellt die Hermitezität gerade sicher.

(b) Mit dem angegebenen Definitionsbereich ist p nicht selbstadjungiert! Der Definitionsbereich seines adjungierten Operators $D(p) \subset D(p^\dagger)$ ist nämlich echt größer. Durch die Wahl

$$D(p) := \{f \in H \mid f \in AC[-a; a], f' \in H, f(-a) = f(a)\}$$

(AC sind die absolut stetigen Funktionen - differenzierbar fast überall) kann man ihn selbstadjungiert machen. Die selbstadjungierte Erweiterung ist jedoch nicht eindeutig, da auch die Randbedingung $f(-a) = \alpha f(a)$ für jedes $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $|\alpha| = 1$ zum Ziel führt. Die Definitionsbereiche machen die Funktionalanalysis unbeschränkter Operatoren sehr knifflig. Für Sie hat das aber im Moment keine Bedeutung. Im Falle beschränkter Operatoren, insbesondere endlichdimensionaler, ist Hermitezität und Selbstadjungiertheit dasselbe.

4. Feldgleichung der Newtonschen Gravitation

10 Punkte

In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, daß eine kugelsymmetrische Masseverteilung $\rho(r)$ (1) nach außen so wirkt, als sei die gesamte Masse im Mittelpunkt vereinigt, und (2) daß äußere Schalen keine Kraft ausüben. Kugelsymmetrisch bedeutet dabei, daß die Dichte $\rho(\vec{r})$ nur vom Abstand $r = |\vec{r}|$ abhängt, nicht von der Richtung. Zeigen Sie Aussagen (1) und (2)!

Erläuterungen: Die Gravitationskraft zwischen zwei punktförmigen Massen M und m ist gegeben durch $\vec{F} = GmM\vec{r}/r^3$, wobei \vec{r} den Verbindungsvektor zwischen den beiden Massen bezeichnet. Man kann nun der, sich als am Koordinatenursprung befindlich angenommenen Masse M eine Feldstärke ihres Gravitationsfeldes zuweisen: $\vec{E}(\vec{r}) = \partial_m \Big|_{m=0} \vec{F}(\vec{r}) = GM\vec{r}/r^3$. Wenn einmal die Deltadistribution eingeführt sein wird, werden wir demnächst voraussichtlich zeigen, daß das Gravitationsfeld, erzeugt von einer Massenverteilung $\rho(\vec{r})$, die Gleichung

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi G \rho(\vec{r}), \quad (*)$$

erfüllt, die im wesentlichen eine Verallgemeinerung des Newton'schen Gesetzes $\vec{F} = G \cdot m_1 m_2 \vec{r}/r^3$ für die Kraft zwischen zwei Punktmassen m_1 und m_2 auf kontinuierliche Massenverteilungen $\rho(\vec{r})$ darstellt, wobei \vec{r} den Verbindungsvektor zwischen den beiden Massenpunkten bezeichnet.

Hinweis: Wenden Sie den Satz von Gauß auf Kugelvolumina, zentriert um 0, an und verwenden Sie (*).

5. Anwendung der Integralsätze

5 + 5 Punkte

Ein Strom fließe in Richtung der z -Achse, die Stromdichte \vec{j} (Strom pro Fläche!) hänge gemäß

$$j(\rho) = ae^{-\lambda\rho^2}$$

vom Abstand ρ von der z -Achse ab.

- Berechnen Sie den Strom, den ein Zylinder um die z -Achse mit Radius R führt, sowie den Gesamtstrom ($R \rightarrow \infty$).
- Berechnen Sie mithilfe des Satzes von Stokes und der Maxwellgleichung $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ das Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r})$.