Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Andreas Schadschneider
Friedmar Schütze

Mathematische Methoden der Physik
11. Übung

Wintersemester 2008/09

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Gruppennummer auf die erste Seite Ihrer Lösung.

Abgabe im Übungskasten am 13.01.2008 vor der Vorlesung

1. Fourierreihen

4 + 8 + 5 Punkte

a) Zeigen Sie den in der Vorlesung angegebenen Zusammenhang zwischen den reellen Fourierkoeffizienten a_n, b_n und den komplexen Koeffizienten c_n:

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \qquad a_n = c_n + c_{-n}, \qquad b_n = \mathrm{i}(c_n - c_{-n})\,.$$

b) Zeigen Sie, daß das Funktionensystem

$$\{1, \sin nx, \cos nx\}_{n\in\mathbb{N}}$$

für den Hilbertraum $H = (L^2[-\pi;\pi], \langle .,. \rangle)$ mit

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\, f(x)g(x)$$

ein Orthogonalsystem bildet. Wie erhält man daraus ein Orthonormalsystem? Vergessen Sie nicht zu zeigen, daß das angegebene Funktionensystem nur aus Elementen des Hilbertraumes H besteht! Es bedarf wohl hoffentlich keiner großen Erwähnung, daß zum Berechnen der auftretenden Integrale die Eulersche Formel nützlich sein kann...

c) Zeigen Sie, daß die Fourierreihe der Funktion $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ durch

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin(nx)}{n}$$

gegeben ist. Es ist interessant und instruktiv, sich Glieder der Partialsummenfolge für verschiedene obere Grenzen N einmal mit einem Computeralgebra- oder Numeriksystem zeichnen zu lassen. Versuchen Sie sich klarzumachen, was Sie beobachten, wenn die Glieder der Partialsummenfolge im Intervall $[-2\pi; 2\pi]$ zeichnen - auch wenn es dafür keine Punkte gibt.

2. Fourier-Transformation

4 + 2 + 6 Punkte

In der Vorlesung haben Sie die Fouriertransformation einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kennengelernt:

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t f(t)e^{-\mathrm{i}\omega t} \qquad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega F(\omega)e^{\mathrm{i}\omega t}$$

a) Zeigen Sie, daß folgende Symmetrieeigenschaften erfüllt sind:

$f(t)$	$F(\omega)$
reell und gerade	reell und gerade
reell und ungerade	imaginär und ungerade
imaginär und gerade	imaginär und gerade
imaginär und ungerade	reell und ungerade

b) Zeigen Sie den Verschiebungssatz:

$$\mathcal{F}[f(t-t_0)] = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_0}\mathcal{F}[f(t)]$$

c) Berechnen Sie die Fouriertransformierte der Funktionen (i) $\cos(\omega_0 t)$ und (ii) $\exp(-t^2/2)$.
Hinweis zu (i): Werfen Sie zuerst einen Blick auf Aufgabe 5!
Hinweis zu (ii): Sie dürfen $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$ verwenden.

3. Dichten und Deltafunktion *3 + 3 + 3 Punkte*

In der Vorlesung haben Sie gelernt, daß sich die Massendichte einer Punktmasse m am Ort $\vec{r}_0$ mithilfe der Deltafunktion als $\rho(\vec{r}) = m\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$ darstellen läßt. Dies wollen wir nun verallgemeinern.
Drücken Sie die Dichte

a) einer linienförmigen Massenverteilung entlang der z-Achse mit der Liniendichte σ

b) einer gleichförmigen Massenverteilung in der $x-y$-Ebene mit der Flächendichte Σ

c) einer Kugelschale vom Radius R und der Gesamtmasse M

mithilfe der Deltafunktion aus. In allen Fällen sei die Gesamtmasse dabei homogen verteilt.

4. Darstellungen der Deltafunktion *4 + 4 Punkte*

Überzeugen Sie sich, daß die Deltafunktion folgende Darstellungen besitzt:

a)

$$\delta(x) = \lim_{a\to 0} \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \exp\left(-\frac{x^2}{a}\right)$$

b)

$$\delta(x) = \lim_{a\to 0} \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2+x^2}$$

Zeigen Sie dazu, daß die Ausdrücke auf der rechten Seite (i) für $x \neq 0$ verschwinden, (ii) für $x = 0$ divergieren und (iii) integriert über $]-\infty,\infty[$ eins ergeben.

5. Deltafunktion und Fouriertransformation *4 Punkte*

Zeigen Sie, daß

$$\mathcal{F}(\delta(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Im Umkehrschluß folgt daraus nun $\mathcal{F}^{-1}(1) = \sqrt{2\pi}\delta(t)$. Benutzen Sie diese Erkenntnis, und zeigen Sie damit die wichtige (distributive!) Identität

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t-t')} = 2\pi\delta(t-t')$$

Erläuterung: Diese Identität gilt streng nur im distributiven Sinne, also angewandt auf Testfunktionen. Im strengen Sinne existiert das Integral natürlich nicht.