Institut für Theoretische Physik
der Universität zu Köln

Andreas Schadschneider
Friedmar Schütze

Mathematische Methoden der Physik
12. Übung

Wintersemester 2008/09

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Gruppennummer auf die erste Seite Ihrer Lösung.

Abgabe im Übungskasten am 20.01.2009 vor der Vorlesung

1. Wdh. Differentialgleichung *6 + 4 + 5 Punkte*

Die Bahnen $x(t)$ seien Lösungen der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = ct.$$

mit konstanten $\gamma, \omega_0, c \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der *homogenen* Differentialgleichung. Was passiert für $\gamma = \omega_0$?

b) Ermitteln Sie eine spezielle Lösung der *inhomogenen* Differentialgleichung in Form eines geeigneten Polynoms.

c) Lösen Sie nun das Anfangswertproblem $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = 0$ mit $\gamma \neq \omega_0$ für die volle Differentialgleichung.

2. Gekoppelte Differentialgleichungen *7 Punkte*

Lösen Sie das folgende System gekoppelter linearer Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= x_1 + 2x_2 \\ \ddot{x}_2 &= 2x_1 + 3x_2 \end{aligned}$$

mit allgemeinen Anfangsbedingungen.

3. Faltungssatz *4 Punkte*

Die Fouriertransformation einer absolut integrierbaren Funktion $f(x)$ erklären wir, wie gehabt, durch:

$$\hat{f}(k) := \mathcal{F}[f](k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} f(x).$$

Zeigen Sie den Faltungssatz: Für beliebige, absolut integrierbare Funktionen g, h und einer daraus gebildeten Faltungsfunktion

$$f(x) = (g * h)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \, g(y) \cdot h(x-y),$$

gilt

$$\hat{f}(k) = \sqrt{2\pi}\, \hat{g}(k) \cdot \hat{h}(k).$$

4. Differentialgleichung und Fouriertransformation *4 + 3 + 3 Punkte*

Gegeben sei die folgende Differentialgleichung:

$$Lx(t) = \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \tag{1}$$

mit $\gamma, \omega_0 > 0$.

a) Man nennt $G(t)$ die Greenfunktion oder den Propagator des Differentialoperators L, wenn gilt: $LG = \delta(t)$. Ihre Aufgabe besteht darin, die Greenfunktion mittels Fouriertransformation zu bestimmen! Wenden Sie dazu die Fouriertransformation auf beide Seiten der Gleichung an. Wenn Sie richtig gerechnet haben, gibt ihnen dies eine algebraische Gleichung in $\hat{G}(\omega) = \mathcal{F}[G(t)]$. Lösen Sie diese Gleichung und ermitteln Sie durch Rücktransformation eine spezielle Lösung. Sie dürfen das folgende bestimmte Integral verwenden (Erinnerung: $\Theta(t)$ bezeichnet die Heaviside Sprungfunktion):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega_0^2 + \mathrm{i}\omega\gamma} = 2\pi\Theta(t) \cdot \mathrm{e}^{-\omega_0^2 t/\gamma}.$$

b) Zeigen Sie, daß die Funktion

$$x_\mathrm{s}(t) = (G * f)(t)$$

eine spezielle Lösung von (1) ist. Sie dürfen den Faltungssatz der vorangehenden Aufgabe verwenden, auch wenn Sie ihn nicht zeigen konnten. Er ist aber nicht zwingend erforderlich, falls Sie also einen anderen (richtigen) Weg beschreiten, lassen Sie sich nicht beunruhigen.

c) Ermitteln Sie nun eine spezielle Lösung von (1) für

$$f(t) = a\left(1 - \mathrm{e}^{-(t-t_0)/\tau}\right) \cdot \Theta(t - t_0).$$

Erkennen Sie, daß es sich hierbei um einen Einschaltvorgang handelt?

Anmerkung: Die Thetafunktion, die in $f(t)$ auftritt, ist sehr typisch. Insbesondere wenn man Anfangsbedingungen betrachtet, setzt man die Inhomogenität mit Null fort, da es unerheblich sein muß, wie die Anfangsbedingungen erreicht worden sind. Es gibt schließlich Eindeutigkeitssätze.

5. Drehung *6 Punkte*

Berechnen Sie die Matrix, die (in kartesischen Koordinaten) eine Drehung um den Winkel $3\pi/2$ um die y-Achse beschreibt. Die Drehung erfolge im mathematisch positiven Drehsinn, d.h. die z-Achse muß in Richtung der x-Achse gedreht werden.
Berechnen Sie die Eigenwerte sowie die Eigenvektoren dieser Matrix!
Tip: Berechnen Sie die Bilder der Basisvektoren unter der Drehung und werfen Sie einen Blick auf Übung 3, Aufgabe 1a.

6. Trägheitstensor *3 Punkte*

Der Trägheitstensor eines starren Körpers in einem körperfesten Bezugssystem ist gegeben durch

$$I_{kl} = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}V \, \rho(\vec{x})(|\vec{x}|^2\delta_{kl} - x_l \cdot x_k).$$

Hierin ist $\rho(x)$ die starre Massendichte und δ_{kl} das Kröneckersymbol, 1 wenn $k = l$, 0 sonst. Zeigen Sie, daß für jeweils verschiedene Indexparameter i, j, k gilt $I_{ii} + I_{jj} \geq I_{kk}$.