1. Übung zur Quantenmechanik II

im Sommersemester 2002

1. Lorentz-Transformationen

a) Verifiziere explizit die Invarianz von $s^2 = c^2t^2 - \vec{r}^{\,2}$ unter der in der Vorlesung angegebenen Standard-Lorentz-Transformation.
b) Sind normale Drehungen (im 3-dim. Raum) Lorentz-Transformationen? Wie steht es mit Zeit- und Raumspiegelungen?
c) Kommutieren zwei hintereinander ausgeführte Lorentz-Transformationen?
d) Wieviele Parameter hat eine Lorentz-Transformation?
e) Welche Werte kann die Determinante $\det\Lambda$ einer Lorentz-Transformation $\Lambda = (\Lambda^\mu{}_\nu)_{\mu\nu}$ annehmen?
f) Zeigen Sie, daß die Lorentz-Transformationen bzgl. der Hintereinanderausführung eine Gruppe bilden.
g) Zeigen Sie, daß das Skalarprodukt $a_\mu b^\mu$ zweier Vierervektoren a_μ, b^μ invariant unter Lorentz-Transformationen ist.

2. Für Interessierte: Die Mathematik von kontra- und kovarianten Vektoren

Die Unterscheidung von kovarianten Vektoren x_μ und kontravarianten Vektoren x^μ erscheint auf den ersten Blick willkürlich. Sie können aber mit etwas linearer Algebra in einen allgemeineren Zusammenhang gebracht werden.
Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und V^* der Vektorraum der Linearformen, d.h. der linearen Abbildungen $V \to \mathbb{R}$. Durch Wahl einer Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V führt man ein Koordinatensystem ein. Die kanonisch-konjugierte Basis $l^1, \ldots, l^n$ von V^* ist dann definiert durch

$$l^\mu(v_\nu) = \delta_{\mu\nu}. \tag{1}$$

a) Zeige, daß $l^1, \ldots, l^n$ tatsächlich eine Basis von V^* ist. Insbesondere haben also V und V^* die gleiche Dimension. Bestimme die Koordinatendarstellung x^μ mit $x = \sum_\mu x^\mu v_\mu$ eines Vektors $x \in V$. Wie findet man die Koordinatendarstellung $\lambda = \sum \lambda_\mu l^\mu$ zu einem Vektor $\lambda \in V^*$?
b) Unter einem Basiswechsel

$$v_\mu \to \tilde{v}_\mu = \sum_\nu U^\nu{}_\mu v_\nu$$

ändert sich auch die konjugierte Basis

$$l^\mu \to \tilde{l}^\mu = \sum_\nu U_\nu{}^\mu l^\nu.$$

Bestimme die Matrix $U_\nu{}^\mu$.
Wie ändern sich die Koordinaten $x^\mu \to \tilde{x}^\mu$ eines Vektors $x \in V$ und die Koordinaten $\lambda_\mu \to \tilde{l}_\mu$ einer Linearform $l \in V^*$?

Die Koordinaten x^μ (bzw. ihr Transformationsverhalten) nennt man *kontravariant*, die Koordinaten λ_μ (bzw. ihr Transformationsverhalten) *kovariant*. Können Sie sich denken, warum?
c) Bisher sind die Objekte, die von kovarianten bzw. kontravarianten Koordinaten beschrieben werden, von ganz unterschiedlicher Natur. In der Relativitätstheorie kann man aber denselben Vektor in ko- oder kontravarianten Koordinaten beschreiben. Dazu ist ist eine zusätzliche Struktur erforderlich, nämlich ein *Skalarprodukt*. Es sei daher nun V ein Vektorraum mit einem Skalarprodukt $g : V \times V \to \mathbb{R}$. Mit Hilfe des Skalarprodukts kann man durch

$$x^*(v) := g(x, v)$$

jedem Vektor x eine Linearform zuordnen. Wir bezeichnen die Koordinaten von x^* bzgl. l^μ mit x_μ. Bestimme den Zusammenhang zwischen x_μ und den Koordinaten x^μ.
d) Wie kann man zu einer beliebigen Linearform l einen Vektor l_* mit $(l_*)^* = l$ finden? Dies erlaubt dann, V^* mit V zu identifizieren.
e) Als konkretes Beispiel betrachten wir den $\mathbb{R}^2$ mit dem üblichen euklidischen Skalarprodukt und der schiefwinkligen Basis $v_1 = (1, 0)$ und $v_2 = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, wobei φ kein Vielfaches von $\pi/2$ sein soll. Bestimme hierfür $g_{\mu\nu}$, l^1, l^2, $l^1{}_*$ und $l^2{}_*$. Stelle $(0, 1)$ in kovarianten und kontravarianten Koordinaten dar.

Besprechung der Aufgaben: 30. April 2002