3. Übung zur Quantenmechanik II

im Sommersemester 2002

5. Maxwell-Gleichung in Dirac-Form

Schreibe die Maxwell-Gleichungen

$$\mathrm{div}\ \vec{E} = 4\pi\rho, \qquad \mathrm{div}\ \vec{B} = 0,$$

$$\mathrm{rot}\ \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad \mathrm{rot}\ \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

in der zur Dirac-Gleichung analogen Form

$$i\sum_{\mu=0}^{3}\alpha^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Psi = -4\pi\Phi. \tag{$*$}$$

a) Bestimme die Matrizen α^μ ($\mu = 0,1,2,3$) unter der Annahme, daß sie hermitesch sind und $(\alpha^\mu)^2 = \mathbb{1}$ genügen. Wie lauten die Vertauschungsrelationen der Matrizen?

b) Leite aus (*) die Wellengleichung für Ψ ab.

Tip: $\Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ B_x - iE_x \\ B_y - iE_y \\ B_z - iE_z \end{pmatrix}$.

6. Unitarität der Dirac-Matrizen

Folgere aus den Vertauschungsrelationen $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$ und den Hermitiziätseigenschaften $(\gamma^\mu)^+ = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$: Die γ-Matrizen γ^μ sind unitär.

7. Majorana-Darstellung der Dirac-Gleichung

Zeige, daß 4×4-Matrizen Γ^μ existieren mit

$$\mathrm{Re}\ \Gamma^\mu = 0 \qquad \text{und} \qquad \Gamma^\mu\Gamma^\nu + \Gamma^\nu\Gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}.$$

In dieser sogenannten *Majorana-Darstellung* ist die Dirac-Gleichung $[i\hbar\Gamma^\mu\partial_\mu - m_0 c]\,\Psi = 0$ also reell.

Tip: $\Gamma^0 = \gamma^0\gamma^2$, $\Gamma^1 = i\gamma^0\gamma^1$, $\Gamma^2 = i\gamma^0$ und $\Gamma^3 = i\gamma^0\gamma^3$.

Besprechung der Aufgaben: 28. Mai 2002