Prof. Dr. A. Schadschneider
C. Eilhardt, S. Nowak Wintersemester 2011/12

Theoretische Physik in 2 Semestern II

7. Übung

www.thp.uni-koeln.de/∼as/thp2sem1112.html

Abgabe: *Dienstag, 29. November*

23. Separation der Schrödingergleichung *6 Punkte*

Es sei ein allgemeines Potential der Form

$$V(\vec{x}) = V_1(x_1) + V_2(x_2) + V_3(x_3)$$

gegeben, das also als Summe von Funktionen der einzelnen Koordinaten geschrieben werden kann. Zeigen Sie, dass man die zeitunabhängige Schrödingergleichung in drei eindimensionale Gleichungen der Form

$$\frac{d^2}{dx_i^2}\Psi_i(x_i) + \frac{2m}{\hbar^2}\big(E_i - V_i(x_i)\big)\Psi_i(x_i) = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

mit $\Psi(\vec{x}) = \Psi_1(x_1)\Psi_2(x_2)\Psi_3(x_3)$ und $E = E_1 + E_2 + E_3$ zerlegen kann.

24. Störungsrechnung *4+5+5 Punkte*

Wir betrachten ein Zweiniveausystem mit dem Hamiltonoperator

$$\hat{H}_0 = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 \end{pmatrix}$$

mit $\epsilon_1 < \epsilon_2$. Das gestörte System sei gegeben durch

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V} \text{ mit } \hat{V} = \alpha \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}, \; V_{ij} \text{ reell}, \; \alpha \ll 1.$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte von $\hat{H}$ exakt.

b) Entwickeln Sie das Ergebnis der vorherigen Teilaufgabe bis zur zweiten Ordnung in α.

c) Berechnen Sie die Eigenwerte von $\hat{H}$ in erster störungstheoretischer Ordnung. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus b).

25. Feynman-Hellmann-Theorem *5+5 Punkte*

Sei $\hat{H}_\lambda$ ein vom Parameter λ abhängiger Hamiltonoperator mit den Eigenwerten E_λ und zugehörigen Eigenzuständen $|\Psi_\lambda\rangle$.

a) Zeigen Sie das Feynman-Hellmann-Theorem

$$\frac{\partial E_\lambda}{\partial \lambda} = \langle \Psi_\lambda | \frac{\partial \hat{H}_\lambda}{\partial \lambda} | \Psi_\lambda \rangle.$$

Hinweis: Berechnen Sie $\frac{\partial}{\partial\lambda}\langle\Psi_\lambda|\hat{H}_\lambda|\Psi_\lambda\rangle$.

b) Benutzen Sie das Feynman-Hellmann-Theorem um den Erwartungswert $\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle$ und $\left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle$ des Wasserstoffatoms im Zustand $|n, l, m\rangle$ zu berechnen. Geben Sie das Ergebnis als Vielfache von $\frac{1}{a_0}$ bzw. $\frac{1}{a_0^2}$ an.
Hinweis: Verwenden Sie den Hamiltonoperator der radialen Schrödingergleichung des Wasserstoffatoms und betrachten Sie eine (geeignete) Konstante als Parameter. Begründen und verwenden Sie an geeigneter Stelle, dass $\frac{\partial n}{\partial l} = 1$ ist.

26. Feinstruktur des Wasserstoffatoms *5+8 Punkte*

Als Feinstruktur wird die Tatsache bezeichnet, dass sich einzelne Spektrallinien teilweise in mehrere, dicht beieinander liegende Linien aufspalten. Das bedeutet, dass die Entartung der Energieniveaus bei gleicher Hauptquantenzahl und unterschiedlicher Nebenquantenzahl aufgehoben wird. Eine der Korrekturen des bisher bekannten Ausdrucks für das Energieniveau kann Aufgrund relativistischer Effekte berechnet werden.

a) Zeigen Sie, dass die relativistischen Energie-Impuls-Beziehung $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ zum Korrekturterm

$$\hat{H}_{\text{rel}} = -\frac{\hat{p}^4}{8m^3c^2}$$

des Hamiltonoperators führt.
Hinweis: Entwicklen Sie den Ausdruck für die (relativistische) kinetische Energie.

b) Zeigen Sie, dass der in a) hergeleitete Ausdruck in erster Ordnung Störungstheorie zur Verschiebung

$$\Delta E_{\text{rel}} = -\frac{2E_n^2}{mc^2}\left(\frac{n}{l+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4}\right)$$

der Energieniveaus führt.
Hinweis: Verwenden Sie, dass $\hat{p}^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ein hermitescher Operator ist, sowie das Ergebnis von Aufgabe 25b).

27. Variationsprinzip *7 Punkte*

Bei dem aus der Vorlesung bekannten Variationsprinzip wählt man einen Testfunktion ψ_a mit einem Parameter a und minimiert damit die Größe

$$\frac{\langle\psi_a|\hat{H}|\psi_a\rangle}{\langle\psi_a|\psi_a\rangle}$$

bezüglich des Parameters. Das Minimum bzw. die entsprechende Funktion ψ_a dienen als Abschätzung für die Grundzustandsenergie und Grundzustandswellenfunktion. Verwenden Sie das Variationsprinzips und die Testfunktion $\psi_a(x) = Ne^{-ax^2}$ um den Grundzustand des eindimensionalen harmonischen Oszillators mit Hamiltonian

$$\hat{H} = -\frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

abzuschätzen. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der bereits bekannten exakten Lösung.