

---

Theoretische Physik in 2 Semestern II  
11. Übung

---

[www.thp.uni-koeln.de/~as/thp2sem1112.html](http://www.thp.uni-koeln.de/~as/thp2sem1112.html)

**Abgabe:** *Dienstag, 17. Januar*

### 39. Entropieänderung bei freier Expansion

2+3+2 Punkte

Ein ideales Gas aus  $N$  Teilchen in einem Kasten mit Volumen  $V$  wird zunächst durch eine Wand auf die Hälfte  $V/2$  des Volumens eingeschränkt. Nun wird die Wand entfernt, und das Gas expandiert, ohne Arbeit zu leisten, auf das volle Volumen.

- Bestimmen Sie die Zunahme der Entropie, die mit diesem Vorgang verbunden ist.
- Um welchen Faktor nimmt die Zahl der dem Gas verfügbaren Mikrozustände zu?
- Wie groß ist dieser Faktor, wenn das Gas aus  $N = 10$ ,  $N = 1000$  oder  $N = 10^6$  Teilchen besteht?

### 40. Fakultät und Gammafunktion

5+3 Punkte

Für eine Zahl  $n \in \mathbb{N}$  ist die Fakultät rekursiv durch

$$0! = 1, \quad n! = n \cdot (n-1)!$$

definiert. Damit ergibt sich  $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ . Anschaulich gibt die Fakultät an, wie viele Möglichkeiten es gibt,  $n$  verschiedene Zahlen anzuordnen.

- a) Zeigen Sie, dass

$$n! = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx =: \Gamma(n+1)$$

gilt. Die Funktion  $\Gamma(x)$  kann auf beliebige positive reelle Zahlen  $x$  verallgemeinert werden und wird Gammafunktion genannt.

- b) Leiten Sie die Stirling-Formel

$$n! \approx n^n e^{-n}$$

für große  $n$  her.

*Hinweis:* Betrachten Sie dazu die Größe  $\ln(n!)$ . Für hinreichend glatte Funktionen  $f(x)$  kann man eine Summe  $\sum_{k=a}^b f(k)$  durch ein Integral  $\int_a^b f(k) dk$  annähern.

### 41. Kugel in $n$ Dimensionen

4+3+3+5+3 Punkte

Bei Anwendungen im Phasenraum betrachtet man oft Räume mit Dimensionen in der Größenordnung der Teilchenzahl, also  $n \approx 10^{23}$ . Wir betrachten in dieser Aufgabe das Volumen  $V_n(R)$  und die Oberfläche  $O_n(R)$  von  $n$ -dimensionalen Kugeln mit Radius  $R$ .

- a) Im allgemeinen genügt es Einheitskugeln zu betrachten, da  $V_n(R) = R^n V_n(1)$  gilt. Zeigen Sie damit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V_n(R) - V_n(R - x \frac{R}{n})}{V_n(R)} = 1 - e^{-x}$$

und interpretieren Sie das Ergebnis.

b) Begründen Sie, dass zwischen Volumen und Oberfläche der Zusammenhang

$$\frac{d}{dR} V_n(R) = O_n(R)$$

besteht. Zeigen Sie damit  $V_n(R) = \frac{R}{n} O_n(R)$ .

Wir wollen nun einen allgemeinen Ausdruck für  $V_n(R)$  bzw.  $O_n(R)$  herleiten. Dazu werden wir das  $n$ -dimensionale Gauss-Integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n e^{-(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)}$$

auf zwei unterschiedliche Arten berechnen.

c) Zeigen Sie unter Verwendung von Aufgabe 2b), dass  $I = \pi^{n/2}$ .

d) Zeigen Sie nun, indem Sie auf  $n$ -dimensionale Kugelkoordinaten transformieren, dass

$$I = \frac{O_n(1)}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right),$$

wobei  $\Gamma(x)$  die Gammafunktion ist.

e) Zeigen Sie schließlich unter Verwendung der bisherigen Aufgabenteile, dass

$$V_n(R) = \frac{R^n \pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}.$$

## 42. Idealer Paramagnet

3+5+5+4

Als idealisiertes Modell eines Paramagneten betrachten wir  $N$  unabhängige und unterscheidbare Spins, deren  $z$ -Komponenten die Werte  $\sigma_i = \pm \frac{1}{2}$  ( $i = 1, \dots, N$ ) annehmen können. In einem Magnetfeld der Stärke  $B$  hat das System bei einem Mikrozustand  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)$  eine Energie von

$$E(\sigma) = -2\mu B \sum_{i=1}^N \sigma_i = -E_0(N_+ - N_-),$$

wobei  $\mu$  das magnetische Moment eines Spins und  $E_0 = \mu B$  ist. Die Größe  $N_{\pm}$  gibt die Zahl der Spins mit  $\sigma_i = \pm \frac{1}{2}$  an (d.h.  $N_+ + N_- = N$ ).

a) Wie viele verschiedene Mikro- und Makrozustände hat das System?

b) Wie viele Mikrozustände  $\Omega(E, N)$  gibt es zu einer festen Energie  $E$ ?

*Hinweis:* Die Energie  $E(\sigma)$  des Systems ist wahlweise durch  $N_+$  oder  $N_-$  eindeutig festgelegt. Wie viele Möglichkeiten gibt es,  $N_+$  (bzw.  $N_-$ ) Spins aus  $N$  Spins auszuwählen?

c) Zeigen Sie unter Verwendung von Aufgabe 40b), dass für große  $N$  die Entropie  $S(E, N) = k_B \ln(\Omega)$  durch

$$S(E, N) = Ns(E/N) \quad \text{mit} \quad s(x) = 2 \ln 2 - \frac{1-x}{2} \ln(1-x) - \frac{1+x}{2} \ln(1+x)$$

gegeben ist.

d) Skizzieren Sie  $s(x)$ . Was fällt Ihnen im Hinblick auf die Temperatur auf?