
Theoretische Physik in 2 Semestern I
11. Übung

www.thp.uni-koeln.de/~as/thp2sem15.html

Abgabe: Montag, 13. Juli 2015

43. Delta-Funktion

1+1+1+1 Punkte

a) Sei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie:

$$\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|} \quad (1)$$

b) Sei $h(x)$ eine analytische Funktion, die eine Nullstelle bei x_0 besitzt. Zeigen Sie:

$$\delta(h(x)) = \frac{\delta(x - x_0)}{|h'(x_0)|}. \quad (2)$$

Hinweis: Nutzen Sie die Taylordarstellung von $h(x)$.

c) Sei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie:

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{\delta(x - a) + \delta(x + a)}{|2a|}. \quad (3)$$

d) Zeigen Sie für die Heaviside-Funktion (auch als Theta-Funktion bekannt) die folgende Beziehung:

$$\frac{\partial \Theta(x - x_0)}{\partial x} = \delta(x - x_0). \quad (4)$$

Hinweis: Wir nutzen hier die Definition

$$\Theta(x - x_0) : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\} \quad ; \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & : x < x_0 \\ 1 & : x \geq x_0 \end{cases}$$

44. Superpositionsprinzip

3 Punkte

Gegeben ist eine homogen geladene Kugel mit Radius R . Innerhalb dieser Kugel befindet sich ein ungeladenes kugelförmiges Loch mit Radius r . Das Koordinatensystem ist so gewählt, dass \vec{r}_R den Mittelpunkt der großen und \vec{r}_r den Mittelpunkt der kleinen Kugel beschreibt. Bestimmen Sie das elektrische Potential $U(\vec{x})$ und das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{x})$.

45. Elektrisches Feld einer Ringladung

2 Punkte

Betrachten Sie eine Ringladung in der y - z -Ebene mit Radius a , Mittelpunkt im Ursprung und Gesamtladung Q . Wir wollen das elektrische Feld in dem Punkt $P = (x, 0, 0)$ bestimmen. Zeigen Sie, dass man für das Feld die folgende Formel erhält

$$E_x = \frac{1}{4\pi} \frac{Qx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}. \quad (5)$$

46. Elektrisches Feld einer Scheibe

2+2+1 Punkte

Betrachten Sie eine homogen geladene Scheibe in der y - z -Ebene mit Radius R , Mittelpunkt im Ursprung und Gesamtladung Q . Es soll das elektrische Feld in dem Punkt $P = (x, 0, 0)$ bestimmen werden.

a) Zeigen Sie dass das elektrische Feld durch die Gleichung

$$E_x = \sigma \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) \quad (6)$$

beschrieben wird. Wobei die Flächenladungsdichte $\sigma = Q/4\pi R^2$ benutzt wurde.

Hinweis: Sie können die Scheibe als Zusammensetzung von konzentrischer Ringladungen betrachten!

b) Bestimmen Sie das Feld E_x für große Abstände $x \gg R$.

Hinweis: Entwickeln Sie dazu den hergeleiteten Ausdruck in einer Taylorreihe bis zu Termen zweiter Ordnung.

c) Nutzen sie das Ergebnis aus Teil a), um das elektrische Feld einer unendlich ausgedehnten Ladungsebene zu berechnen.

47. Satz von Gauß und Gaußsches Gesetz

2+2+2 Punkte

a) Berechnen Sie das elektrische Feld innerhalb und außerhalb einer homogen geladenen Kugelschale mit Oberflächenladungsdichte σ .

b) Berechnen Sie das elektrische Feld in der Nähe einer unendlich ausgedehnten Linienladung mit Linienladungsdichte λ .

c) Berechnen Sie das elektrische Feld innerhalb und außerhalb eines unendlich langen Zylindermantels homogener Oberflächenladungsdichte σ .

48. Bonus: Kraft innerhalb einer homogen geladenen Kugel

Gegeben sei eine homogen geladene Hohlkugel der Ladung q . In dieser Hohlkugel befindet sich ein negativ geladenes Elektron. Dieses Elektron befindet sich nicht im Mittelpunkt der Kugel. Es soll die auf das Elektron wirkende Kraft berechnet werden. Hierzu wird folgendes Kraftgesetz angenommen:

$$\vec{F}_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = q_1 q_2 \cdot \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^{\gamma+1}}; \gamma \notin \{1, 3\}$$

Wir setzen o.B.d.A. den Radius der Kugel gleich $R = 1$. Die auf das Elektron wirkende Gesamtkraft ergibt sich aus Integration des Kraftgesetzes über die Sphäre

$$\vec{F} = \int_{S^2} d\Omega \frac{q}{4\pi} \cdot \frac{\vec{a} - \vec{x}}{|\vec{a} - \vec{x}|^{\gamma+1}}$$

Um dieses Integral möglichst einfach zu bestimmen, ist es sinnvoll das Koordinatensystem so zu wählen, dass der Ursprung dem Mittelpunkt der Kugel entspricht und die Ladung auf der positiven z -Achse liegt. Wegen der Rotationssymmetrie bezüglich der z -Achse bietet es sich an Zylinderkoordinaten zu verwenden.

a) Zeigen Sie, dass sich die Integration in Zylinderkoordinaten wie folgt schreiben lässt.

$$\vec{F} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 dz \frac{q}{4\pi} \cdot \frac{(a-z)\vec{e}_z - r(z)\vec{e}_r}{\left[(a-z)^2 + (r(z))^2\right]^{(\gamma+1)/2}}$$

b) Berechnen Sie dieses Integral und damit die Gesamtkraft auf das Elektron.

Hinweis: Überlegen Sie sich welcher Term aus Symmetriegründen verschwindet sowie gilt:

$$\int (a+bx)(c+dx)^{-\eta} dx = -(c+dx)^{1-\eta} \frac{ad(\eta-2)+b[c+dx(\eta-1)]}{d^2(\eta-2)(\eta-1)} + const$$

c) Zeigen sie, dass die Gesamtkraft auf die Ladung NUR für $\gamma = 2$ innerhalb der gesamten Kugel verschwindet. Benutzen Sie hierfür das Ergebnis aus Aufgabenteil b).