

Kapitel 1

Analytische Mechanik

Im Folgenden werden wir Weiterentwicklungen der Newton'schen Mechanik kennenlernen, die vor allem mit den Namen Lagrange und Hamilton verbunden sind und als **analytische Mechanik** zusammengefasst werden. Diese verfolgt zwei Hauptziele:

- Das praktische Ziel ist die Aufstellung von Bewegungsgleichungen in beliebigen (insbesondere nicht-kartesischen) Koordinaten.
- Konzeptionell wird versucht, eine neue (tiefere) Begründung der Mechanik zu geben, z.B. durch ein Extremalprinzip (das Hamilton'sche Prinzip der kleinsten Wirkung).

Außerdem sind die Methoden später auch bei der Entwicklung der Quantenmechanik nützlicher als die Newton'sche Theorie.

1.1 Bewegung unter Zwangsbedingungen

In der Praxis ist die Bewegung von Körper häufig durch **Zwangsbedingungen** eingeschränkt. Wir illustrieren dies an einigen Beispielen:

(i): *Bewegung in einer Ebene*, z.B. auf einer Tischplatte in der Höhe h . In diesem Fall ist die Zwangsbedingung an die Bewegung $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ des Massenpunktes durch die Bedingung $z(t) = h$ gegeben.

(ii): *Ebenes starres Pendel* der Länge ℓ . Der Aufhängepunkt sei $\vec{r}_0 = (0, 0, z_0)$ und das Pendel soll in der $x - z$ -Ebene schwingen. Die Zwangsbedingungen sind dann durch

$$y = 0 \quad \text{und} \quad |\vec{r} - \vec{r}_0|^2 = x^2 + (z - z_0)^2 = \ell^2 \quad (1.1.1)$$

gegeben (siehe Abb. 1.1.1).

(iii): *Zwei starr verbundene Massenpunkte*, die z.B. über eine Stange der Länge ℓ miteinander verbunden sind (Abb. 1.1.2). Die Zwangsbedingung lautet dann

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2 = \ell^2. \quad (1.1.2)$$

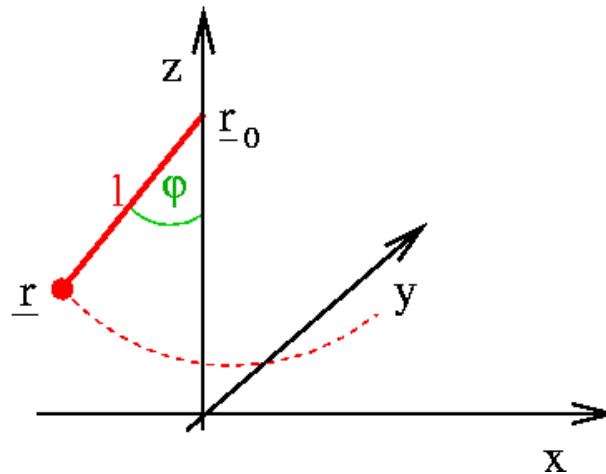


Abbildung 1.1.1: Ebenes starres Pendel.

Abbildung 1.1.2: Links: Zwei Massenpunkte, die über eine starre Verbindung der Länge ℓ miteinander verbunden sind; Rechts: Massenpunkt an einer Schnur der Länge ℓ .

(iv): *Massenpunkt an einer Schnur* der Länge ℓ , die am Punkt \vec{r}_0 befestigt ist (Abb. 1.1.2). Die Zwangsbedingung lautet in diesem Fall

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_0|^2 \leq \ell^2. \quad (1.1.3)$$

(v): *Eisenbahn oder Achterbahn*: Durch die Schienen wird die Bewegung auf eine (komplizierte) eindimensionale Kurve eingeschränkt.

In den Beispielen (i)-(iii) kann die Zwangsbedingung durch das Verschwinden einer oder mehrerer geeignet gewählter Funktionen g dargestellt werden:

$$(i) : \quad g(\vec{r}) = g(x, y, z) = z - h = 0, \quad (1.1.4)$$

$$(ii) : \quad g_1(\vec{r}) = y = 0, \quad \text{und} \quad g_2(\vec{r}) = x^2 + (z - z_0)^2 - \ell^2 = 0, \quad (1.1.5)$$

$$(iii) : \quad g(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2 - \ell^2 = 0. \quad (1.1.6)$$

Man definiert daher: Eine Zwangsbedingung für ein System von N Massenpunkten, die sich in der Form $g(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = 0$ darstellen lässt, heißt **holonom**. Alle anderen Zwangsbedingungen sind **nicht-holonom**. Unter den holonomen Zwangsbedingungen unterscheidet man zeitabhängige, die man als **rheonom** bezeichnet, und zeitunabhängige oder **skeloronome** Zwangsbedingungen. Im Folgenden werden wir nur holonome Zwangsbedingungen betrachten.

Die Gegenwart von Zwangsbedingungen hat zwei wichtige Konsequenzen:

- Reduktion der Zahl der **Freiheitsgrade** f eines Systems: Ein freier Massenpunkt hat 3 Freiheitsgrade, jede holonome Zwangsbedingung reduziert diese Zahl um 1. Allgemeiner hat ein N Teilchensystem mit R Zwangsbedingungen

$$f = 3N - R \text{ Freiheitsgrade.} \quad (1.1.7)$$

Wir betrachten unsere Beispiele (i)-(iii). In (i) ist $f = 3 - 1 = 2$, die Freiheitsgrade sind x und y . In (ii) ist $f = 3 - 2 = 1$, der verbleibende Freiheitsgrad ist der Auslenkungswinkel φ des Pendels. In (iii) ist $f = 2 \cdot 3 - 1 = 5$. Hier kann man z.B. die 3 Koordinaten des Schwerpunktes und 2 Winkel zur Beschreibung der Orientierung der Verbindungsachse als Freiheitsgrade wählen.

- In Gegenwart von Zwangsbedingungen wirken zusätzlich zu den physikalischen Wechselwirkungen **Zwangskräfte** \vec{Z} , die für die Einhaltung der Zwangsbedingungen sorgen. Legen wir z.B. ein Objekt auf einen Tisch, so bleibt es in Ruhe, obwohl nach wie vor die Gravitationskraft wirkt. Diese muss also durch eine gleich große, entgegengesetzt gerichtete Kraft kompensiert werden, so dass die Gesamtkraft verschwindet. Die Trennung zwischen Zwangskraft und physikalischen Wechselwirkungen ist eine Idealisierung, da Zwangskräfte auch auf physikalischen Kräften beruhen. Sie sind aber so stark im Vergleich mit anderen Kräften¹, dass sie bei der Bewegung nicht dynamisch in Erscheinung treten.

Bei Anwesenheit von Zwangskräften lautet die Bewegungsgleichung daher

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{Z}. \quad (1.1.8)$$

Ein Problem hierbei ist aber, dass die Zwangskraft \vec{Z} i.a. von der Bewegung selber abhängt, was man sich z.B. für eine Fahrt in einer Achterbahn leicht klarmacht. Es gibt nun zwei Strategien, wie man dieses Problem lösen kann:

- I. Durch explizite Berechnung der Zwangskräfte. Dies führt auf die Lagrange-Gleichungen 1. Art.
- II. Durch Eliminierung der Zwangsbedingungen durch Transformation auf verallgemeinerte Koordinaten (q_1, \dots, q_f) , welche dann die Lagrange-Gleichungen 2. Art erfüllen.

Im Folgenden wollen wir uns nun diese beiden Ansätze genauer anschauen.

¹Z.B. wird die Tischfläche praktisch nicht deformiert.

1.2 Lagrange-Gleichungen erster Art

Wir betrachten zunächst einen Massenpunkt mit der Zwangsbedingung $g(\vec{r}, t) = 0$ und suchen nach einem plausiblen Ansatz für die Bestimmung der Zwangskraft. Dazu beobachten wir zunächst, dass die Zwangsbedingung eine (zeitabhängige) Fläche

$$\mathcal{F} = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 | g(\vec{r}, t) = 0\} \quad (1.2.1)$$

definiert. Da die Zwangskraft die Bewegung innerhalb der Fläche nicht beeinflussen darf, muss

$$\vec{Z} \perp \mathcal{F} \quad (1.2.2)$$

sein, d.h. die Zwangskraft steht senkrecht auf \mathcal{F} . Für die Bewegung auf einer Tischplatte ist dies unmittelbar einsichtig. Wir machen daher den Ansatz

$$\vec{Z} = \lambda(t) \nabla g(\vec{r}, t), \quad (1.2.3)$$

mit dem schon einmal die Richtung der Zwangskraft korrekt beschrieben wird. Um zu sehen, dass dieser Ansatz tatsächlich das Gewünschte leistet, betrachten wir einen Punkt $\vec{r} \in \mathcal{F}$ in der Fläche und eine kleine Verschiebung $\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \vec{r} + \Delta\vec{r}$. Wir fragen nun nach einer Bedingung, unter der der verschobene Punkt auch in \mathcal{F} liegt. Dazu betrachten wir die Zwangsbedingung genauer und entwickeln sie nach der Verschiebung $\Delta\vec{r}$:

$$g(\vec{r}', t) = g(\vec{r}, t) + \Delta\vec{r} \cdot \nabla g = \Delta\vec{r} \cdot \nabla g, \quad (1.2.4)$$

da $g(\vec{r}, t) = 0$, denn der Punkt \vec{r} liegt ja in \mathcal{F} . Somit können wir folgern: Der Punkt \vec{r}' liegt auch in \mathcal{F} , d.h. $g(\vec{r}', t) = 0$, genau dann wenn der Verschiebungsvektor $\Delta\vec{r}$ senkrecht auf ∇g steht. Anders formuliert: die Zwangskraft \vec{Z} besitzt keine Komponente parallel zu \mathcal{F} .

Somit können wir die Bewegungsgleichung explizit angeben:

$$m\vec{r}'' = \vec{F} + \lambda(t) \nabla g \quad (1.2.5)$$

bzw.

$$m\vec{r}'' = \vec{F} + \lambda_1(t) \nabla g_1 + \lambda_2(t) \nabla g_2 + \dots \quad (1.2.6)$$

falls mehrere Zwangsbedingungen vorliegen.

Betrachten wir den allgemeinen Fall von N Massenpunkten mit den $3N$ Ortskoordinaten

$$(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{3N-2}, x_{3N-1}, x_{3N}), \quad (1.2.7)$$

wobei $\vec{r}_1 = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{r}_2 = (x_4, x_5, x_6)$, \dots , mit R holonomen Zwangsbedingungen

$$g_\alpha(x_1, \dots, x_{3N}; t) = 0, \quad (1.2.8)$$

denen jeweils ein **Lagrange-Parameter** $\lambda_\alpha(t)$ zugeordnet wird, so erhalten wir die **Lagrange-Gleichungen 1. Art**

$$\boxed{m_n \ddot{x}_n = F_n + \sum_{\alpha=1}^R \lambda_\alpha(t) \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n} \quad (n = 1, 2, \dots, 3N),} \quad (1.2.9)$$

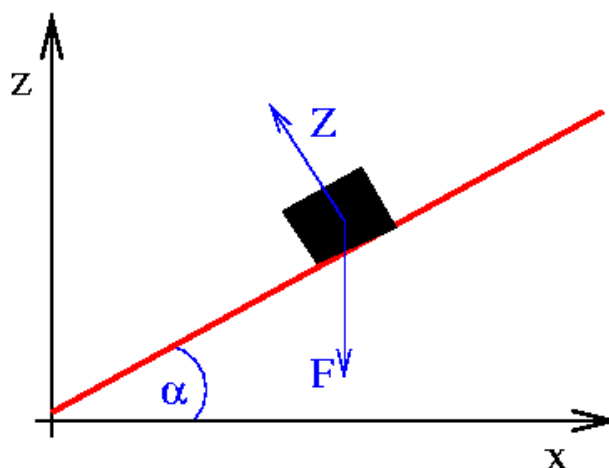


Abbildung 1.2.1: Bewegung eines Massenpunktes auf einer schiefen Ebene. Neben der äußeren Kraft $\vec{F} = -mg\vec{e}_z$ wirkt die Zwangskraft \vec{Z} senkrecht zur Ebene.

wobei die Massen m_n nicht vollständig unabhängig sind, sondern wegen (1.2.7) die Bedingungen $m_1 = m_2 = m_3, m_4 = m_5 = m_6, \dots$ erfüllen müssen.

(1.2.8) und (1.2.9) sind zusammen $3N + R$ Gleichungen für $3N + R$ unbekannte Funktionen der Zeit, nämlich x_1, \dots, x_{3N} und $\lambda_1, \dots, \lambda_R$.

1.2.1 Beispiel: Schiefe Ebene

Zur Illustration der Lagrange-Gleichungen 1. Art betrachten wir die Bewegung eines Massenpunktes der Masse m auf einer schiefen Ebene mit Neigungswinkel α (siehe Abb. 1.2.1).

Die äußere Kraft ist die Schwerkraft $\vec{F} = -mg\vec{e}_z$. Die Zwangsbedingungen lauten

$$g_1(\vec{r}) = x \sin \alpha - z \cos \alpha = 0, \quad (1.2.10)$$

$$g_2(\vec{r}) = y = 0, \quad (1.2.11)$$

wie man sich aus geometrischen Überlegungen klar macht². Damit erhalten wir die Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} m\vec{\ddot{r}} &= -mg\vec{e}_z + \lambda_1(t)\nabla g_1 + \lambda_2(t)\nabla g_2 + \dots \\ &= -mg\vec{e}_z + \lambda_1 \sin \alpha \vec{e}_x - \lambda_1 \cos \alpha \vec{e}_z + \lambda_2 \vec{e}_y, \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

oder in Komponenten

$$m\ddot{x} = \lambda_1 \sin \alpha, \quad (1.2.13)$$

$$m\ddot{y} = \lambda_2, \quad (1.2.14)$$

$$m\ddot{z} = -mg - \lambda_1 \cos \alpha. \quad (1.2.15)$$

²Denn $\tan \alpha = \frac{z}{x}$.

Wir bestimmen zunächst λ_1 und λ_2 , indem wir die Zwangsbedingungen zweimal nach der Zeit ableiten und dann die Bewegungsgleichungen einsetzen:

$$0 = \ddot{g}_1 = \ddot{x} \sin \alpha - \ddot{z} \cos \alpha = \frac{\lambda_1}{m} \sin^2 \alpha + g \cos \alpha \frac{\lambda_1}{m} \cos^2 \alpha = \frac{\lambda_1}{m} + g \cos \alpha. \quad (1.2.16)$$

Hieraus folgt dann

$$\lambda_1 = -mg \cos \alpha. \quad (1.2.17)$$

Analog erhalten wir

$$0 = \ddot{g}_2 = \ddot{y} = \frac{\lambda_2}{m} \quad (1.2.18)$$

und daher

$$\lambda_2 = 0. \quad (1.2.19)$$

Dieses Ergebnis kann man auch so interpretieren, dass man bei geeigneter Wahl der Anfangsbedingungen³ keine Zwangskräfte benötigt, um die Bewegung in der (x, z) -Ebene zu halten.

Wir können nun auch die Zwangskraft explizit angeben:

$$\vec{Z} = \lambda_1 \nabla g_1 = -mg \cos \alpha (\sin \alpha \vec{e}_x - \cos \alpha \vec{e}_z). \quad (1.2.20)$$

Geometrisch lässt sich $\sin \alpha \vec{e}_x - \cos \alpha \vec{e}_z$ als Einheitsvektor senkrecht zur Ebene interpretieren.

In die Bewegungsgleichungen geht nur die Schwerkraftkomponente parallel zur Ebene ein:

$$m\ddot{x} = -mg \cos \alpha \sin \alpha, \quad (1.2.21)$$

$$m\ddot{z} = -mg \sin^2 \alpha. \quad (1.2.22)$$

Natürlich hätte man diese Bewegungsgleichung auch ohne Weg über die Lagrange-Gleichungen 1. Art hinschreiben können⁴, aber bei komplizierteren Zwangsbedingung ist dieser Weg in der Regel deutlich einfacher.

1.3 Lagrange-Gleichungen zweiter Art

Falls man nicht an der expliziten Form der Zwangskräfte interessiert ist, sind die Lagrange-Gleichungen 1. Art unökonomisch: Für ein System mit $f = 3N - R$ Freiheitsgraden berechnet man $3N + R$ zeitabhängige Funktionen. Tatsächlich werden wir im Folgenden sehen, wie man durch Eliminierung der Zwangsbedingungen f Bewegungsgleichungen für die f Freiheitsgrade erhält.

³Die Anfangsgeschwindigkeit darf keine Komponente in y -Richtung haben!

⁴z.B. über eine explizite Zerlegung der Gravitationskraft in Komponenten parallel bzw. senkrecht zur Ebene

1.3.1 Herleitung

Die Grundidee ist, **verallgemeinerte Koordinaten** q_1, \dots, q_f so zu bestimmen, dass die Zwangsbedingungen *automatisch* erfüllt sind. Dazu müssen die ursprünglichen Koordinaten x_1, \dots, x_{3N} so als Funktionen

$$x_n = x_n(q_1, \dots, q_f) \quad (n = 1, \dots, 3N) \quad (1.3.1)$$

ausgedrückt werden, dass

$$g_\alpha(x_1(q_1, \dots, q_f), \dots, x_{3N}(q_1, \dots, q_f)) = 0 \quad (1.3.2)$$

für alle q_1, \dots, q_f und alle $\alpha = 1, \dots, R$.

Zur Illustration betrachten wir das starre ebene Pendel. Hier ist die natürliche verallgemeinerte Koordinate der Auslenkungswinkel φ . Dann gilt

$$\begin{aligned} x &= \ell \sin \varphi, \\ y &= 0, \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

$$z = z_0 - \ell \sin \varphi \quad (1.3.4)$$

und die Zwangsbedingungen (1.1.5) sind offensichtlich für alle φ automatisch erfüllt.

Wir wollen nun ganz allgemein die Bewegungsgleichungen für die verallgemeinerten Koordinaten herleiten. Dazu differenzieren wir zunächst die Zwangsbedingungen (1.3.2) nach den verallgemeinerten Koordinaten. Unter Beachtung der Kettenregel erhalten wir dann

$$\frac{dg_\alpha}{dq_k} = \sum_{n=1}^{3N} \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial q_k} = 0. \quad (1.3.5)$$

Ziel ist die Umwandlung der $3N$ Bewegungsgleichungen (1.2.9) für die x_n in f Bewegungsgleichungen für die q_k . Dazu multiplizieren wir zunächst (1.2.9) mit $\frac{\partial x_n}{\partial q_k}$ und summieren dann über n :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{3N} m_n \ddot{x}_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k} &= \sum_{n=1}^{3N} F_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k} + \sum_{n=1}^{3N} \sum_{\alpha=1}^R \lambda_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \\ &= \sum_{n=1}^{3N} F_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k}, \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

da die zweite Summe auf der rechten Seite nach Vertauschung der Summationsreihenfolge wegen (1.3.5) verschwindet. Nun haben wir die Zwangsbedingungen eliminiert, aber die Bewegungsgleichung enthält noch die Koordinatenfunktionen $x_n(q_1, \dots, q_f)$.

Wir nehmen nun an, dass die Kräfte F_n konservativ sind, d.h. es existiert ein Potential $V(q_1, \dots, q_f) = V(x_1(q_1, \dots, q_f), \dots, x_{3N}(q_1, \dots, q_f))$ mit

$$F_n = -\frac{\partial V}{\partial x_n}. \quad (1.3.7)$$

Leiten wir das Potential nach den verallgemeinerten Koordinaten ab, so erhalten wir

$$\frac{\partial V}{\partial q_k} = \sum_{n=1}^{3N} \frac{\partial V}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial q_k} = - \sum_{n=1}^{3N} \frac{\partial x_n}{\partial q_k}, \quad (1.3.8)$$

d.h. wir erhalten gerade die rechte Seite von (1.3.6). Die linke Seite von (1.3.6) kann durch die kinetische Energie ausgedrückt werden. Dazu schreiben wir

$$T = \sum_{n=1}^{3N} \frac{1}{2} m_n \dot{x}_n^2 \quad (1.3.9)$$

auf die neuen Koordinaten q_k und deren Ableitungen \dot{q}_k um:

$$\begin{aligned} \dot{x}_n &= \frac{d}{dt} x_n(q_1, \dots, q_f) \\ &= \sum_{k=1}^f \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \cdot \frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial x_n}{\partial t} = \sum_{k=1}^f \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_n}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

Da $\frac{\partial x_n}{\partial q_k}$ nur von den q_1, \dots, q_f abhängt, aber nicht von $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f$, ist die Abhängigkeit der \dot{x}_n von den verallgemeinerten Geschwindigkeiten \dot{q}_k linear, d.h. die Koeffizienten $\frac{\partial x_n}{\partial q_k}$ hängen nicht von \dot{q}_k ab. Daher erhält man durch Ableitung von (1.3.10) nach \dot{q}_k

$$\frac{\partial \dot{x}_n}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_n}{\partial q_k}. \quad (1.3.11)$$

Somit können wir die kinetische Energie nach den verallgemeinerten Koordinaten ableiten:

$$\frac{\partial T}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} \sum_{n=1}^{3N} \frac{1}{2} m_n \dot{x}_n^2 = \sum_{n=1}^{3N} m_n \dot{x}_n \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial q_k} \quad (1.3.12)$$

und ebenso nach den verallgemeinerten Geschwindigkeiten:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \sum_{n=1}^{3N} \frac{1}{2} m_n \dot{x}_n^2 = \sum_{n=1}^{3N} m_n \dot{x}_n \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{n=1}^{3N} m_n \dot{x}_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k}, \quad (1.3.13)$$

wobei wir im letzten Schritt (1.3.11) verwendet haben.

Um die Beschleunigungen \ddot{x}_n ins Spiel zu bringen, leiten wir nach der Zeit ab:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) = \sum_{n=1}^{3N} m_n \ddot{x}_n \frac{\partial x_n}{\partial q_k} + \sum_{n=1}^{3N} m_n \dot{x}_n \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial q_k}, \quad (1.3.14)$$

wobei die Vertauschbarkeit der totalen Ableitung von x_n nach t mit der partiellen Ableitung nach q_k ausgenutzt wurde.

Fassen wir die obigen Ergebnisse zusammen, so erhalten wir die Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = - \frac{\partial V}{\partial q_k} \quad (1.3.15)$$

bzw.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial(T - V)}{\partial q_k}. \quad (1.3.16)$$

Dies legt die Definition der **Lagrange-Funktion**

$$L(q_1, \dots, q_f; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f) = T(q_1, \dots, q_f; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f) - V(q_1, \dots, q_f) \quad (1.3.17)$$

nahe. Die Lagrange-Funktion L ist also die *Differenz* von kinetischer und potentieller Energie. Mit ihr können wir die Bewegungsgleichungen in der Form

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_k} \quad (k = 1, \dots, f) \quad (1.3.18)$$

schreiben. Dies sind die **Lagrange-Gleichungen 2. Art**.

1.3.2 Beispiele

Wir wollen nun die Lagrange-Gleichungen 2. Art an einigen Beispielen illustrieren.

- *N Massenpunkte ohne Zwangsbedingungen:*

In diesem Fall sollten sich die Lagrange-Gleichungen 2. Art auf die bekannten Newton'schen Bewegungsgleichungen reduzieren. Da keine Zwangsbedingungen vorliegen, sind die verallgemeinerten Koordinaten gleich den kartesischen Koordinaten,

$$q_k = x_k \quad (k = 1, \dots, 3N). \quad (1.3.19)$$

Da das Potential V nicht von den Geschwindigkeiten abhängt, gilt zunächst

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = m_k \dot{q}_k = p_k, \quad (1.3.20)$$

wobei wir (1.3.9) benutzt haben. $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ ist also gerade gleich der k -ten Impulskomponente. Da außerdem gilt

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = - \frac{\partial V}{\partial q_k} = F_k, \quad (1.3.21)$$

erhalten wir als Lagrange-Gleichungen 2. Art

$$\dot{p}_k = F_k. \quad (1.3.22)$$

Die Newton'schen Bewegungsgleichungen sind also als Spezialfall in den Lagrange-Gleichungen 2. Art enthalten!

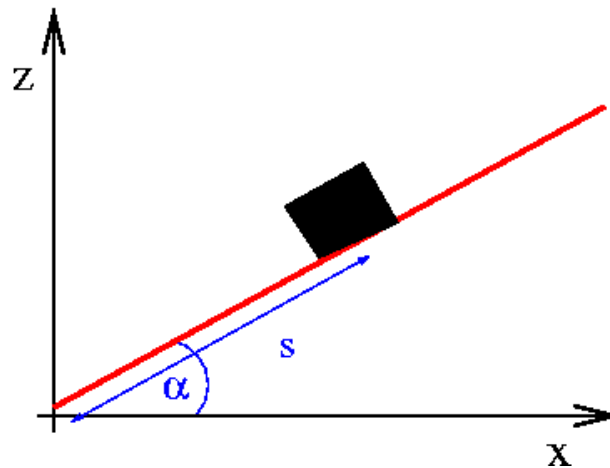


Abbildung 1.3.1: Definition der verallgemeinerten Koordinaten s für die Bewegung auf einer schiefen Ebene.

- *Schiefe Ebene:*

Die natürliche verallgemeinerte Koordinate ist hier die Wegstrecke s entlang der schiefen Ebene (Abb. 1.3.1). Kinetische Energie und Potential lassen sich leicht durch s ausdrücken:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{s}^2, \quad (1.3.23)$$

$$V = mgs \sin \alpha, \quad (1.3.24)$$

woraus wir für die Lagrange-Gleichung

$$m\ddot{s} = -mg \sin \alpha \quad (1.3.25)$$

erhalten. Zum Vergleich sei hier an die Lagrange-Gleichungen 1. Art (1.2.22) erinnert. Dies zeigt, dass in der Regel die Lagrange-Gleichungen 2. Art deutlich einfacher als die 1. Art sind.

- *Starres ebenes Pendel:*

Hier ist die verallgemeinerte Koordinate der Auslenkungswinkel φ . Da sich das Pendel auf einer Kreisbahn bewegt, ist der Betrag der Geschwindigkeit durch

$$v = |\vec{v}| = l\dot{\varphi} \quad (1.3.26)$$

gegeben und die kinetische Energie durch

$$T = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2. \quad (1.3.27)$$

Das Potential ist

$$V = mgz = mg(z_0 - \ell \cos \varphi). \quad (1.3.28)$$

Damit erhalten wir als Lagrange-Gleichungen 2. Art

$$m\ell^2\ddot{\varphi} = -mg\ell \sin \varphi \quad (1.3.29)$$

bzw.

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{\ell} \sin \varphi. \quad (1.3.30)$$

Für kleine Auslenkungen können wir die Näherung $\sin \varphi \approx \varphi$ benutzen und erhalten dann die Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators mit der Frequenz $\omega = \sqrt{g/\ell}$.

- *Das Kepler-Problem:*

In den bisherigen Beispielen gab es nur einen Freiheitsgrad und daher nur eine verallgemeinerte Koordinaten. Da der Drehimpuls erhalten ist, reduziert sich das Keplerproblem auf die Bewegung in einer Ebene. Diese wollen wir durch Polarkoordinaten $r(t)$ und $\varphi(t)$ beschreiben. Mit⁵

$$T = \frac{1}{2}\mu (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2), \quad (1.3.31)$$

$$V = -\frac{\alpha}{r} \quad (1.3.32)$$

erhält man die Lagrange-Funktion

$$L(r, \varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}\mu (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{\alpha}{r}. \quad (1.3.33)$$

Die Lagrange-Gleichung für die Azimuthalbewegung lautet daher

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d}{dt} (\mu r^2 \dot{\varphi}) = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \quad (1.3.34)$$

da die L nicht von der Koordinate φ abhängt. Somit folgt, dass

$$\mu r^2 \dot{\varphi} = \text{konst.} \quad (1.3.35)$$

sein muss. Aus der Azimuthalgleichung (siehe 7. Vorlesung) kennen wir auch schon die physikalische Interpretation dieser Konstanten, denn $\mu r^2 \dot{\varphi} = l$.

Für die Radialbewegung gilt zunächst

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{d}{dt} (\mu \dot{r}) = \mu \ddot{r}. \quad (1.3.36)$$

Andererseits ist

$$\frac{\partial L}{\partial r} = \mu r \dot{\varphi}^2 - \frac{\alpha}{r^2} = \frac{l^2}{\mu r^3} - \frac{\alpha}{r^2}. \quad (1.3.37)$$

Daher reduziert sich die Lagrange-Gleichung 2. Art auf eine Bewegungsgleichung in einem eindimensionalen Potential $U(r)$:

$$\mu \ddot{r} = -\frac{\partial U}{\partial r} \quad \text{mit} \quad U(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r}. \quad (1.3.38)$$

⁵Man beachte, dass hier die kinetische Energie nicht nur von den verallgemeinerten Geschwindigkeiten abhängt, sondern auch von den verallgemeinerten Koordinaten selbst!

1.3.3 Verallgemeinerte Impulse und Erhaltungsgrößen

Den einer verallgemeinerten Koordinaten q_n zugeordneten **verallgemeinerten Impuls** p_n definieren wir durch

$$p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}. \quad (1.3.39)$$

Dies ist motiviert durch den Fall ohne Zwangsbedingungen, in dem der verallgemeinerte Impuls mit dem bekannten Impuls überbeinstimmt, wie wir im vorigen Abschnitt gesehen haben.

Eine verallgemeinerte Koordinaten q_n heißt **zyklisch**, wenn die Lagrange-Funktion nicht von q_n abhängt⁶, d.h.

$$\frac{\partial L}{\partial q_n} = 0. \quad (1.3.40)$$

Eine unmittelbare Folgerung hieraus ist, dass der einer zyklischen Variablen q_n zugeordnete verallgemeinerte Impuls p_n erhalten ist:

$$\frac{d}{dt} p_n = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = \frac{\partial L}{\partial q_n} = 0. \quad (1.3.41)$$

Wir betrachten wieder ein paar Beispiele:

- *Freies Teilchen*: Die Lagrange-Funktion ist dann

$$L = T = \frac{1}{2} m |\vec{r}'|^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \quad (1.3.42)$$

Daher sind alle drei Komponenten von \vec{r}' zyklisch und die entsprechenden Impulskomponenten p_x, p_y, p_z sind erhalten.

- *Potential unabhängig von z* : $V(\vec{r}) = V(x, y)$
Die Lagrange-Funktion ist

$$L = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y) \quad (1.3.43)$$

und somit ist z eine zyklische Variable. Daher ist die z -Komponente p_z des Impulses erhalten.

- *Ebene Bewegung mit allgemeiner Zentralkraft*: Hier sind die verallgemeinerten Koordinaten $r(t)$ und $\varphi(t)$ und die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - V(r). \quad (1.3.44)$$

Der Azimuthalwinkel φ ist zyklisch und somit ist

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \mu r^2 \dot{\varphi} \quad (1.3.45)$$

⁶In der Regel wird die Lagrange-Funktion aber noch von \dot{q}_n abhängen!

erhalten. Dies ist gerade die Drehimpulskomponente senkrecht zur Bahnebene. Durch Betrachtung der vollen dreidimensionalen Bewegung in Kugelkoordinaten kann man so auch die Erhaltung der anderen beiden Komponenten des Drehimpulses beweisen.

Die Beispiele legen einen Zusammenhang zwischen Erhaltungsgrößen und Invarianz der Bewegungsgesetze unter bestimmten Transformationen nahe. Dies ist Inhalt des **Noether-Theorems**.

1.4 Variationsprinzipien

Variationsprinzipien spielen in vielen Bereichen der Physik eine wichtige Rolle. Bevor wir ihre Bedeutung in der klassischen Mechanik diskutieren, wollen wir kurz eine allgemeine Einführung geben.

1.4.1 Variationsprobleme

Bevor wir uns dem eigentlichen Variationsproblemen widmen, sei an die Kurvendiskussion von Funktionen $f(x)$ einer Variablen erinnert. Die notwendige Bedingung für das Vorliegen eines Extremums von $f(x)$ an einem inneren Punkt x^* des Definitionsbereiches ist dann

$$\frac{df}{dx}(x^*) = f'(x^*) = 0. \quad (1.4.1)$$

Eine dazu äquivalente Aussage ist das Verschwinden der **Variation**

$$\delta f = f(x^* + \epsilon) - f(x^*) \quad (1.4.2)$$

von f um den Punkt x^* in führender (d.h. linearer) Ordnung in ϵ :

$$\delta f(\epsilon) = f(x^* + \epsilon) - f(x^*) = \epsilon f'(x^*) + \frac{1}{2} \epsilon^2 f''(x^*) + \dots = \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (1.4.3)$$

Dabei bezeichnet $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ Terme die mindestens von der Größenordnung ϵ^2 sind, d.h. nur Terme ϵ^α enthalten mit $\alpha \geq 2$. Diese Aussage folgt, da

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\delta f(\epsilon)}{\epsilon} = f'(x^*) = 0 \quad (1.4.4)$$

ist, nach Definition der Ableitung.

Die **Variationsrechnung** beschäftigt sich mit den Extrema von **Funktionalen**

$$\mathcal{F} : f(x) \longrightarrow \mathcal{F}[f(\cdot)] \in \mathbb{R}, \quad (1.4.5)$$

also Abbildungen, die einer Funktion eine (reelle) Zahl zuordnen. Die Notation $\mathcal{F}[f(\cdot)]$ soll dabei betonen, dass das Funktional \mathcal{F} vom *gesamten* Verlauf der Funktion f abhängt, nicht nur vom Funktionswert an einem bestimmten Punkt.

Bekannte Beispiele für Funktionale sind bestimmte Integrale, z.B.

$$\mathcal{F}_1[f(\cdot)] := \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \quad (1.4.6)$$

oder

$$\mathcal{F}_2[f(\cdot)] := \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{df}{dx} \right)^2. \quad (1.4.7)$$

Funktionale können auch für mehrkomponentige Funktionen definiert werden, z.B. auf der Bahnkurve $\vec{r}(t)$ eines Massenpunktes. Ein Beispiel hierfür ist die Bogenlänge einer Bahnkurve

$$\mathcal{F}_S[\vec{r}(\cdot)] := \int_{t_1}^{t_2} dt \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|. \quad (1.4.8)$$

Wir nehmen zur Vereinfachung an, dass die Bewegung in der (x, y) -Ebene stattfindet, und dass entlang der Bahn stets $\dot{x} > 0$ gilt. Dann gilt

$$\left| \dot{\vec{r}} \right| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \dot{x} \sqrt{1 + (\dot{y}/\dot{x})^2} = \dot{x} \sqrt{1 + (dy/dx)^2}, \quad (1.4.9)$$

wobei wir im letzten Schritt die Kettenregel $(dy/dt)/(dx/dt) = dy/dx$ benutzt haben. Wir können nun im Integral durch Substitution die Integration über t durch ein Integral über x ersetzen:

$$\mathcal{F}_S[\vec{r}(\cdot)] := \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx \quad (1.4.10)$$

und erhalten so die Bogenlänge der durch die Funktion $y(x)$ beschriebenen Kurve zwischen den Punkten $x_1 = x(t_1)$ und $x_2 = x(t_2)$.

Wir suchen nun eine notwendige Bedingung dafür, dass eine Funktion $f(x)$ ein Extremum des Funktionals $\mathcal{F}[f(\cdot)]$ ist. In Analogie zum eingangs beschriebenen Fall der Differentialrechnung fordern wir dazu das Verschwinden der Variation $\delta\mathcal{F}$. Dabei ist die Variation so definiert, dass die gesamte Funktion $f(x)$ zu deformieren ist. Dies lässt sich durch hinzuaddieren einer beliebigen Funktion $\epsilon\eta(x)$ zu f erreichen:

$$f(x) \longrightarrow f(x) + \epsilon\eta(x). \quad (1.4.11)$$

Die Variation von $\mathcal{F}[f(\cdot)]$ ist dann definiert durch

$$\delta\mathcal{F}(\epsilon) = \mathcal{F}[f(\cdot) + \epsilon\eta(\cdot)] - \mathcal{F}[f(\cdot)] \quad (1.4.12)$$

und die notwendige Bedingung für ein Extremum lautet in Analogie zu (1.4.4)

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}[f(\cdot) + \epsilon\eta(\cdot)] - \mathcal{F}[f(\cdot)]}{\epsilon} = 0, \quad (1.4.13)$$

Diese Bedingung muss für *jede* Funktion $\eta(x)$ erfüllt sein!

Dieses Kriterium ist noch etwas unhandlich. Daher werden wir nun zeigen, dass es eine Differentialgleichung für $f(x)$ umgewandelt werden kann.

1.4.2 Euler-Lagrange-Gleichungen

Wir werden uns hier auf Funktionale der Form

$$\mathcal{F}[y(\cdot)] = \int_{x_1}^{x_2} dx \Phi(y, y', x) \quad (1.4.14)$$

beschränken, wobei $y' = dy/dx$. Der Integrand $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ soll eine differenzierbare, aber ansonsten beliebige Funktion von drei Variablen sein. Ein Standardbeispiel ist die Bogenlänge (1.4.10), für die $\Phi(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{1 + x_2^2}$ ist. Die Variation von $y(x)$ in (1.4.14) ist bei festen Randwerten $y(x_1) = y_1$ und $y(x_2) = y_2$ durchzuführen. Deshalb muss die Funktion $\eta(x)$ die Randbedingungen

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0 \quad (1.4.15)$$

erfüllen..

Wir betrachten die Variation (1.4.12) zunächst für eine fest gewählte Funktion $\eta(x)$. Dann ist das Funktional eine Funktion von ϵ und (1.4.14) ist äquivalent zu

$$0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}[f(\cdot) + \epsilon\eta(\cdot)] - \mathcal{F}[f(\cdot)]}{\epsilon} = \frac{d}{d\epsilon} \delta\mathcal{F}|_{\epsilon=0} = \frac{d}{d\epsilon} \mathcal{F}[f(\cdot) + \epsilon\eta(\cdot)]_{\epsilon=0}. \quad (1.4.16)$$

Im vorliegenden Fall ist

$$\mathcal{F}[f(\cdot) + \epsilon\eta(\cdot)] = \int_{x_1}^{x_2} dx \Phi(y + \epsilon\eta, y' + \epsilon\eta', x). \quad (1.4.17)$$

Wir leiten nach ϵ ab und erhalten

$$\frac{d}{d\epsilon} \mathcal{F}[f(\cdot) + \epsilon\eta(\cdot)] = \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{d}{d\epsilon} \Phi(y + \epsilon\eta, y' + \epsilon\eta', x) = \int_{x_1}^{x_2} dx \left[\eta(x) \frac{\partial\Phi}{\partial y} + \eta'(x) \frac{\partial\Phi}{\partial y'} \right]. \quad (1.4.18)$$

Der zweite Term kann durch partielle Integration umgeschrieben werden:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \frac{d\eta}{dx} \frac{\partial\Phi}{\partial y'} = \left[\eta(x) \frac{\partial\Phi}{\partial y'} \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} dx \eta(x) \frac{d}{dx} \frac{\partial\Phi}{\partial y'} = - \int_{x_1}^{x_2} dx \eta(x) \frac{d}{dx} \frac{\partial\Phi}{\partial y'}, \quad (1.4.19)$$

da der Randterm wegen (1.4.15) verschwindet. Somit erhalten wir

$$\frac{d}{d\epsilon} \mathcal{F}[f(\cdot) + \epsilon\eta(\cdot)] = \int_{x_1}^{x_2} dx \eta(x) \left[\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial\Phi}{\partial y'} \right]. \quad (1.4.20)$$

Dieser Ausdruck verschwindet nur dann für alle $\eta(x)$, wenn der Term in eckigen Klammern verschwindet. Dies liefert die **Euler-Lagrange-Gleichung**

$$\boxed{\frac{d}{dx} \frac{\partial\Phi}{\partial y'} = \frac{\partial\Phi}{\partial y}}, \quad (1.4.21)$$

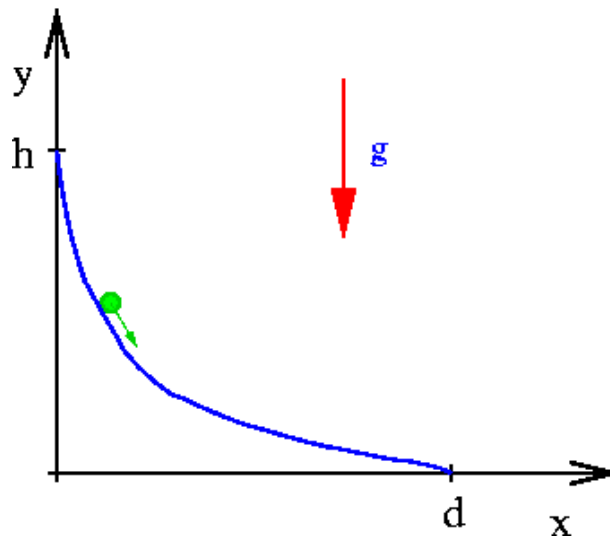


Abbildung 1.4.1: Das Brachistochronenproblem: Auf welcher Bahnkurve $y(x)$ bewegt sich der Massenpunkt unter dem Einfluss der Schwerkraft in minimaler Zeit von $(0, h)$ nach $(d, 0)$?.

die als Differentialgleichung für $y(x)$ zu interpretieren ist. Die Lösungen dieser DGL sind die Lösungen des Variationsproblems (1.4.14).

Zur Illustration betrachten wir einige Beispiele. Zunächst suchen wir die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten. Die Euler-Lagrange-Gleichung für das Funktional (1.4.10) lautet

$$\frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = 0, \quad (1.4.22)$$

da (1.4.10) nicht von y abhängt. Somit ist also $\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}$ konstant, und damit auch y' selbst. Die gesuchte Verbindung ist also eine Kurve mit konstanter Steigung, also eine Gerade. Der Wert der Steigung wird dann durch die Randwerte festgelegt.

Eine etwas anspruchsvolle Anwendung ist das **Brachistochronenproblem**, das von Jakob Bernoulli 1696 formuliert wurde. Tatsächlich gab es dann den Anstoß zur Entwicklung der Variationsrechnung. In dem Problem geht es um die Frage, auf welcher Kurve ein Massenpunkt unter Einfluss der Schwerkraft in der kürzesten Zeit zwischen zwei vorgegebenen Punkten gleitet. Anders formuliert soll eine Rutsche zwischen vorgegebenen Anfangs- und Endpunkten gebaut werden, auf der man schnellstmöglich den Endpunkt erreicht (Abb. 1.4.1).

Wir nehmen an, dass die Punkte nicht auf gleicher Höhe oder übereinander liegen. Die Anfangsgeschwindigkeit soll verschwinden. Haben die Punkte eine Höhendifferenz h und einen horizontalen Abstand d , so hat das zu variierende Funktional die Form

$$\mathcal{F}[y(\cdot)] = \int_0^d dx \sqrt{\frac{1+(y')^2}{h-y(x)}} \quad (1.4.23)$$

mit den Randbedingungen $y(0) = h$ und $y(d) = 0$. Dies kann man sich wie folgt klarmachen: Bezeichnen wir die Bogenlänge mit $s(y)$, so lautet der Energieerhaltungssatz wenn das Teilchen die Höhe y erreicht hat

$$mgh = mgy + \frac{1}{2}m\dot{s}^2. \quad (1.4.24)$$

Somit ist

$$\dot{s} = \sqrt{2g(h-y)}. \quad (1.4.25)$$

Hieraus erhalten wir schließlich

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2g(h-y)}}. \quad (1.4.26)$$

Die benötigte Zeit ist dann

$$\tau = \int dt = \int \frac{ds}{\sqrt{2g(h-y)}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int \sqrt{\frac{1+(y')^2}{h-y}}, \quad (1.4.27)$$

wobei wir benutzt haben, dass wegen $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ gilt $ds = \sqrt{1+(y')^2}dx$.

Wir wollen hier die Euler-Lagrange-Gleichungen nicht explizit untersuchen. Deren Lösung ist eine **Zykloide**, also jene Kurve, die ein Punkt auf dem Umfang eines rollenden Rades beschreibt⁷.

Die Euler-Lagrange-Gleichungen lassen sich auf Variationsprobleme erweitern, bei denen das Funktional von K Funktionen $y_1(x), \dots, y_K(x)$ abhängt:

$$\mathcal{F}[y_1(\cdot), \dots, y_K(x)] = \int_{x_1}^{x_2} dx \Phi(y_1, \dots, y_K; y'_1, \dots, y'_K; x). \quad (1.4.28)$$

Man erhält dann K Gleichungen der Form (1.4.21),

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial \Phi}{\partial y'_n} = \frac{\partial \Phi}{\partial y_n} \quad (n = 1, \dots, K). \quad (1.4.29)$$

1.4.3 Das Hamilton'sche Prinzip

Wenn wir in den Euler-Lagrange-Gleichungen (1.4.29) die Ersetzungen $x \rightarrow t$, $y_n \rightarrow q_n$ und $\Phi \rightarrow L$ vornehmen, nehmen sie genau die bekannte Form (1.3.18) der Lagrange-Gleichungen 2. Art an. Hieraus kann man nun folgern:

Hamilton'sches Prinzip der kleinsten Wirkung: Die Bewegungen eines mechanischen Systems laufen so ab, dass die Wirkung

$$S[q_1(\cdot), \dots, q_f(\cdot)] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_1, \dots, q_f; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f) \quad (1.4.30)$$

extremal ist. Dabei ist die Variation von S bei festen Endpunkten $q_n(t_1)$, $q_n(t_2)$ ($n = 1, \dots, f$) durchzuführen.

⁷Dieses Problem haben wir schon in den Übungen betrachtet!

Das Prinzip hat große konzeptionelle Bedeutung, aber auch praktischen Nutzen.

Die Wirkung hat die Dimension⁸ Energie \times Zeit. In der Quantenmechanik spielt das **Planck'sche Wirkungsquantum**

$$h \approx 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \quad (1.4.31)$$

eine wichtige Rolle. Darauf werden wir im zweiten Teil der Vorlesung zurückkommen.

⁸Da die Lagrange-Funktion die Dimension einer Energie hat.