

**Teil I**

**Spezielle Relativitätstheorie**



# Kapitel 1

## Historischer Hintergrund und Grundlagen

Die spezielle Relativitätstheorie (SRT) wird oft mit der Modifikation der Newton'schen Mechanik in Verbindung gebracht, wo sie die spektakulärsten Auswirkungen hat. Der Titel von Einstein's berühmter Arbeit aus dem Jahre 1905 lautet aber *Von der Elektrodynamik bewegter Körper*<sup>1</sup>. Hier deutet sich schon an, dass die Untersuchung elektrodynamischer Phänomene ein wesentlicher Aspekt der SRT ist.

Bis Anfang des 20. Jahrhunderts glaubte man, dass Licht zur Ausbreitung ein Medium benötigt, den **Äther**. Newton definierte den **absoluten Raum** als das Inertialsystem, in dem der Äther ruht. Allerdings scheiterten alle experimentellen Versuche, den Äther nachzuweisen. Der bekannteste Versuch ist dabei sicher das **Michelson-Morley-Experiment** (1881-1887). Es beruht auf der Vorstellung, dass Licht eine Welle ist, die sich im Äther in alle Richtungen mit der gleichen Geschwindigkeit  $c \approx 300.000 \text{ km/s}$  ausbreitet. Wenn sich die Erde mit einer Geschwindigkeit  $v$  durch den Äther bewegt (eine vernünftige Annahme), dann impiziert dies eine Richtungsabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit auf der Erde (Abb. 1.0.1). Parallel zur Erdbewegung würde man eine Lichtgeschwindigkeit  $c - v$  und antiparallel dazu die Geschwindigkeit  $c + v$  messen. Senkrecht zur Richtung der Erdbewegung erwartet man dagegen eine Geschwindigkeit  $c_{\perp} = \sqrt{c^2 - v^2}$ . Dies ist vollkommen analog zu einem Boot in einem Fluss, das mit, gegen oder quer zur Strömungsrichtung fährt (Abb. 1.0.2).

### 1.1 Das Michelson-Morley-Experiment

Das Michelson-Interferometer wurde von Albert A. Michelson (1852-1931, Nobelpreis 1907) entwickelt. Es basiert auf der Zweistrahlinterferenz. Nach dem Strahlteiler, einem halbdurchlässigen Spiegel, durchlaufen die beiden Strahlen jeweils einen Arm der Länge  $a$  bzw.  $b$  und werden dann an Spiegeln reflektiert (Abb. 1.1.1). Über den halbdurchlässigen Spiegel wird dann ein Teil in einen Detektor gelenkt, wo das Interferenzmuster der Strahlen analysiert wird. Beim Drehen sollte sich daher das Interferenzmuster deutlich ändern. Beim originalen **Michelson-Morley-Experiment** betrug die Armlänge  $l = 11 \text{ m}$ . Mit späteren Experimenten hätte man eine Erdbeschwindigkeit von  $v = 3 \text{ cm/s}$  relativ zum Äther nachweisen zu können, aber es wurde

---

<sup>1</sup>Annalen der Physik 17, 891-921 (1905).

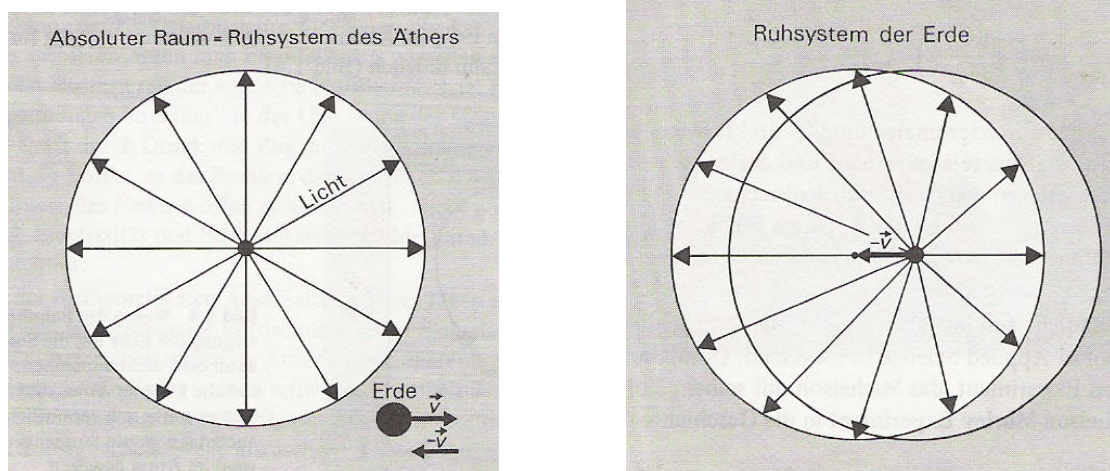


Abbildung 1.0.1: Im Äther breitet sich Licht in alle Richtungen mit der gleichen Geschwindigkeit  $c$  aus (links). Wenn sich die Erde mit der Geschwindigkeit  $v$  durch den Äther bewegt, müssen wir beim Übergang zum Ruhesystem der Erde  $-v$  zu allen Geschwindigkeit hinzu addieren. Dadurch hängt die Lichtgeschwindigkeit auf der Erde von der Richtung ab. Diesen Effekt versuchte das Michelson-Morley-Experiment nachzuweisen. (aus [2])

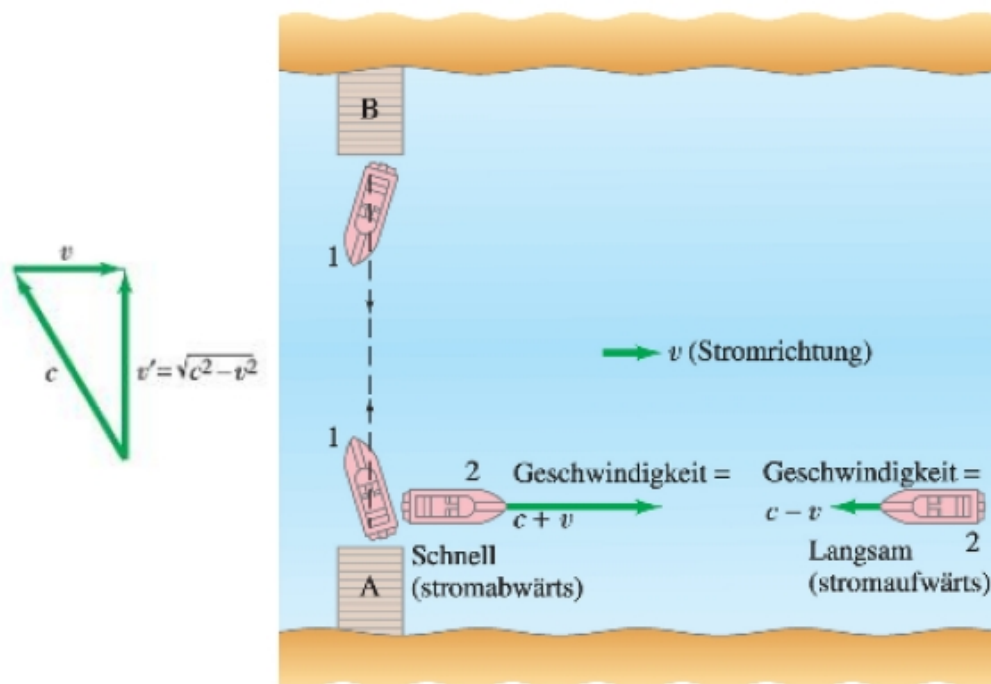


Abbildung 1.0.2: Die Situation beim Michelson-Morley-Experiment ist analog zu einem Boot, das sich auf einem Fluss mit, gegen oder quer zur Strömungsrichtung fährt (aus [1]).

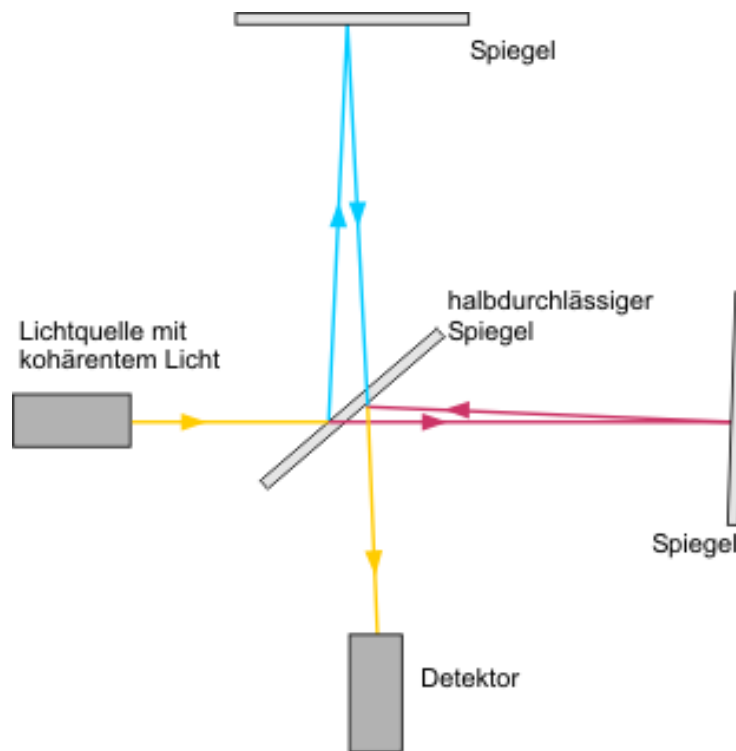


Abbildung 1.1.1: Strahlengang im Michelson-Interferometer.

kein Effekt gefunden. Eine schöne interaktive Animation des Michelson-Morley-Versuchs findet man z.B. bei<sup>2</sup>

[http://galileoandeinstein.physics.virginia.edu/more\\_stuff/flashlets/mmexpt6.htm](http://galileoandeinstein.physics.virginia.edu/more_stuff/flashlets/mmexpt6.htm).

Für das Scheitern des Michelson-Morley-Experimentes wurden verschiedene Erklärungen angeführt, z.B.

- eine Abhängigkeit der Lichtausbreitung von der Bewegung der Quelle. Dies ist aber mittlerweile durch Wiederholung des Versuches mit Sternenlicht widerlegt.
- die Mitführungshypothese. Sie nimmt an, dass der Äther von der Erde gewissermaßen "mitgerissen" wird und man daher im Labor keine Relativbewegung Labor - Äther sieht. Auch dies ist experimentell widerlegt, z.B. durch Versuche von Fizeau zur Lichtgeschwindigkeit in strömenden Medien.
- Ätherwirbel. Ähnlich wie im Weltbild von Descartes befindet die Erde hierbei im Mittelpunkt eines Ätherwirbels. Auch hier zeigten sich schnell Widersprüche zu den bekannten Gesetzen der Lichtausbreitung.

<sup>2</sup>Der Link befindet sich auch im Wikipedia-Beitrag zum Michelson-Morley-Experiment.

- die Längenkontraktion. Lorentz und Fitzgerald vermuteten, dass alle Längen in Richtung der Bewegung durch den Äther um den Faktor  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$  verkürzt sind. Nach Lorentz ist eine mögliche Ursache für diese Kontraktion in der Tatsache zu suchen, dass der Äther die Kräfte zwischen den Molekülen beeinflusst, die ja von elektrischer Natur sind. Wir werden später sehen, dass dies der Wahrheit schon recht nahe kommt, auch wenn die Längenkontraktion im Rahmen der Relativitätstheorie keinen Äther benötigt.

## 1.2 Das Einstein'sche Relativitätsprinzip

Eine der Kernfragen, die Einstein klären wollte, war "Was sehe ich, wenn ich neben einem Lichtstrahl herlaufe?" Er geht also nicht von einer rein mechanischen Fragestellung aus, sondern von einem elektrodynamischen Standpunkt. Hierzu ein einleitendes Zitat aus der Arbeit von Einstein:

*Die mißlungenen Versuche, eine Bewegung der Erde relativ zum "Lichtmedium" zu konstatieren, führen zu der Vermutung, daß dem Begriff der absoluten Ruhe nicht nur in der Mechanik, sondern auch in der Elektrodynamik keine Eigenschaften der Erscheinungen entsprechen. [...] Wir wollen diese Vermutung (deren Inhalt im folgenden "Prinzip der Relativität" genannt wird) zur Voraussetzung erheben.*

Mit "Lichtmedium" ist natürlich der Äther gemeint, den Einstein hiermit als überflüssig abschafft. Wenn es aber keinen Äther gibt, ist der Begriff der "Absolutbewegung" bedeutungslos und nur die Relativbewegung eines Körpers in Bezug auf einen anderen kann für die Physik von Bedeutung sein.

Wenn es nun möglich wäre, neben einem Lichtstrahl herzulaufen, so würde man statt laufender elektromagnetischer Wellen nur elektrische und magnetische Felder sehen, die sich in Ruhe befinden und deren Stärke sich im Raum, aber nicht in der Zeit ändert. Betrachten wir z.B. eine elektromagnetische Welle der Form

$$\underline{E}(x, t) = \underline{E}_0 \sin(kx - \omega t) \quad (1.2.1)$$

mit  $x(t) = x_0 + ct$ , so finden wir

$$\underline{E}(x(t), t) = \underline{E}_0 \sin(k(x_0 + ct) - \omega t) = \underline{E}_0 \sin(kx_0) \quad (1.2.2)$$

da  $kc = \omega$ . Analoge Überlegungen gelten für das zugehörige Magnetfeld. Dies führt zu einem Widerspruch zu den Maxwell-Gleichungen, da nicht beide Felder zeitlich konstant aber räumlich veränderlich sein können. Einstein wollte deshalb die Elektrodynamik so umformulieren, dass es (wie in der Newton'schen Mechanik) nur auf Relativbewegungen ankommt. Als Beispiel diskutiert er das Induktionsgesetz aus Sicht des bewegten Leiters. Dort gibt es kein elektrisches Feld, die Ladungen werden durch die Lorentz-Kraft in Bewegung gesetzt. Er kommt zu dem Schluss, dass das Galilei'sche Relativitätsprinzip für die Elektrodynamik nicht gelten kann, denn es hat z.B. folgende Konsequenzen:

- Die Lichtgeschwindigkeit ändert sich unter Galilei-Transformationen

$$c \rightarrow c' = c + v_0. \quad (1.2.3)$$

- Der Äther definiert ein Bezugssystem absoluter Ruhe und somit wären nicht mehr alle Bezugssysteme äquivalent<sup>3</sup>.

Vor dem Hintergrund des negativen Ausgangs des Michelson-Morley-Experiments postulierte Einstein daher ein verallgemeinertes Relativitätsprinzip:

- Die Gesetze der Physik (d.h. der Mechanik und der Elektrodynamik) gelten in allen Inertialsystemen in der gleichen Form.
- Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum hat in allen Inertialsystemen den gleichen Wert.

Die zweite Aussage folgt eigentlich aus der ersten, da die Lichtgeschwindigkeit  $c$  ja in den Maxwell-Gleichungen auftritt. Wegen der überragenden Bedeutung wird diese Aussage aber i.a. separat formuliert.

Das Postulat hat weitreichende Konsequenzen:

- (i) Die Transformation zwischen Inertialsystemen kann nicht durch die Galilei-Transformation gegeben sein, da dies der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit widersprechen würde. Es muss daher eine neue, relativistische Kinematik entwickelt werden mit einem neuen Gesetz für die Addition von Geschwindigkeiten.
- (ii) Da die Galilei-Transformation den physikalischen Gehalt der Newton'schen Gesetze widerspiegelt, müssen auch diese abgeändert werden. Dies führt zur relativistischen Dynamik.

Es stellt sich heraus, dass die Gesetze der Elektrodynamik unverändert bleiben, lediglich deren Interpretation ändert sich.

---

<sup>3</sup>Es sollten daher ähnliche Effekte auftreten wie durch Reibungskräfte in einem viskosen Fluid.





# Kapitel 2

## Relativistische Kinematik

Wir wollen nun durch Gedankenexperimente mit Licht (bewegte Quellen,...) die wesentlichen kinematischen Beziehungen der SRT ableiten.

### 2.1 Relativität der Gleichzeitigkeit

Zunächst überlegen wir uns, wie sich Uhren synchronisieren lassen. Ein einfaches Verfahren besteht darin, genau in der Mitte zwischen den (ruhenden!) Uhren ein (Licht-)Signal auszulösen (Abb. 2.1.1). Wenn das Signal bei den Uhren ankommt, werden sie gestartet und sind dann synchron.

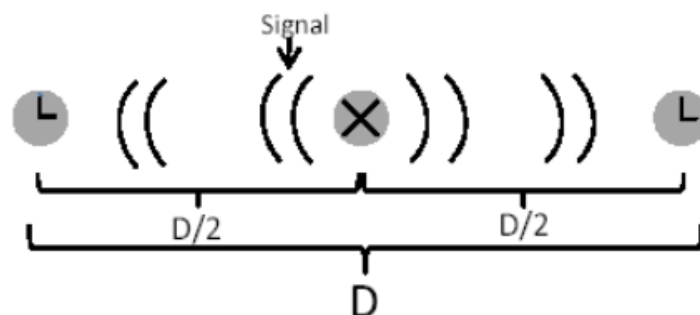


Abbildung 2.1.1: Synchronisation zweier Uhren durch ein Signal, welches in der Mitte zwischen den beiden (ruhenden) Uhren ausgesendet wird.

Was passiert aber bei bewegten Uhren? Als Beispiel betrachten wir Uhren in einem Zug, den wir als bewegtes System  $S'$  auffassen. Das ortsfeste System  $S$  ist dann der Bahnhof. Platziert man eine Lichtquelle in der Mitte des Zuges, so erreichen die Lichtstrahlen in  $S'$  die Enden zur gleichen Zeit  $t'_+ = t'_- = \frac{l'}{2c}$ , wobei  $l'$  die Länge des Zuges (gemessen in  $S'$ ) ist (Abb. 2.1.2).

Vom Bahnhof aus gesehen bewegt sich das hintere Ende des Zuges dem Lichtstrahl entgegen, während sich das vordere Ende entfernt (Abb. 2.1.2). Unter Berücksichtigung der Konstanz der

Lichtgeschwindigkeit  $c$ , erreicht das Signal in  $S$  daher die Ende zu den Zeiten

$$t_+ = \frac{l}{2(c-v)}, \quad t_- = \frac{l}{2(c+v)}, \quad (2.1.1)$$

wobei  $l$  die Länge des Zuges gemessen in  $S$  ist<sup>1</sup>. Das Lichtsignal kommt in  $S$  also zu *verschiedenen* Zeiten an den Enden an. Somit sehen wir, dass Ereignisse, die in  $S'$  gleichzeitig sind, es in  $S$  nicht sind. Im Gegensatz zur Newton'schen Physik gibt es also **keine absolute Gleichzeitigkeit** und somit **keinen absoluten, vom Bezugssystem unabhängigen, Zeitbegriff**.

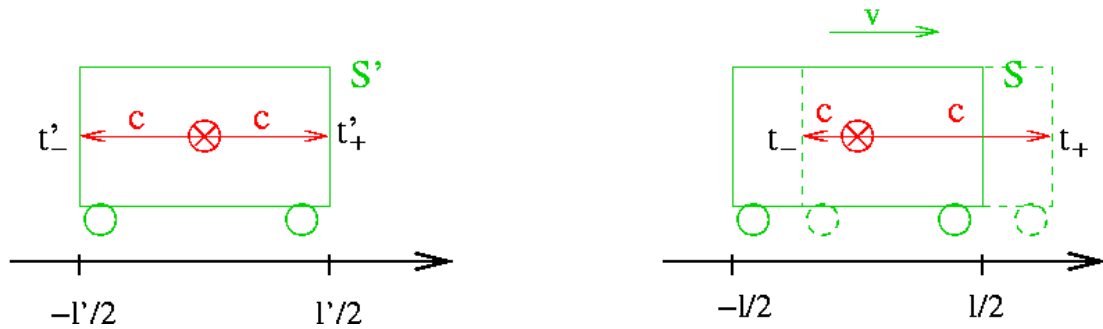


Abbildung 2.1.2: Synchronisation zweier Uhren betrachtet aus einem System  $S'$ , in dem die Uhren ruhen (links) und einem System  $S$ , in dem sich die Uhren mit konstanter Geschwindigkeit  $v$  bewegen. Die Ankunftszeiten der Signale sind  $t'_\pm$  bzw.  $t_\pm$

## 2.2 Zeitdilatation

Die Tatsache, dass es keine absolute Zeit gibt, hat weitreichende Konsequenzen. Als Beispiel betrachten wir einen einfachen Fall der Zeitmessung in einer Variante des Gedankenexperiments aus dem vorigen Abschnitt. Diesmal wird in dem Zug ein Lichtsignal nach unten geschickt (senkrecht zur Bewegungsrichtung), siehe Abb. 2.2.1. Wann erreicht das Licht den Boden?

Im System  $S'$  gilt  $\Delta t' = \frac{h}{c}$ . In  $S$  ist der Auftreffpunkt dagegen um die Strecke  $v\Delta t$  verschoben, die der Zug während der Laufzeit  $\Delta t$  des Lichtes zurücklegt. Die Laufstrecke in  $S$  ist daher  $d = \sqrt{h^2 + (v\Delta t)^2} > h$  und die Laufzeit  $\Delta t = \frac{d}{c}$ . Somit erhalten wir zunächst

$$(\Delta t)^2 (c^2 - v^2) = h^2 \quad (2.2.1)$$

und hieraus

$$\Delta t = \frac{h}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma \Delta t' \quad (2.2.2)$$

mit dem Faktor

$$\gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \geq 1, \quad (2.2.3)$$

<sup>1</sup>Später werden wir sehen, dass  $l \neq l'$  ist.

der eine wichtige Rolle in der SRT spielt. Somit ergibt sich für die in den beiden Bezugssystemen gemessenen Zeiten

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < \Delta t \quad (2.2.4)$$

d.h. der bewegte Beobachter misst eine kürzere Laufzeit. Dies bezeichnet man als **Zeitdilatation**. Anders ausgedrückt: **Bewegte Uhren gehen langsamer!**

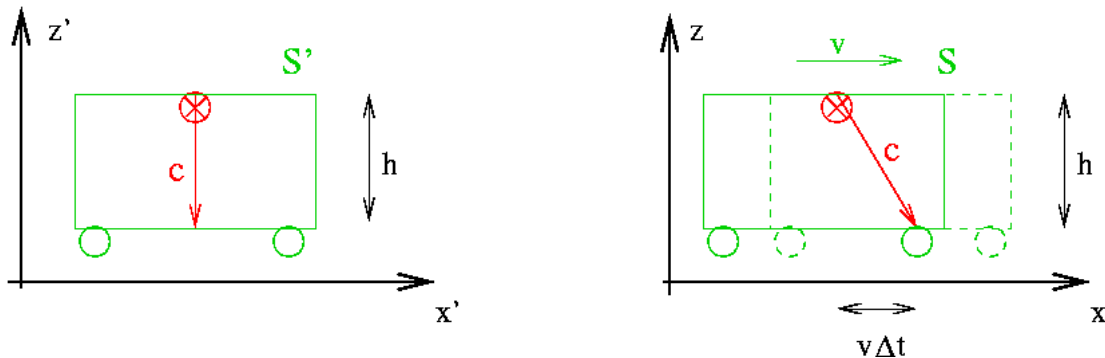


Abbildung 2.2.1: Synchronisation zweier Uhren betrachtet aus einem System  $S'$ , in dem die Uhren ruhen (links) und einem System  $S$ , in dem sich die Uhren mit konstanter Geschwindigkeit  $v$  bewegen. Die Ankunftszeiten der Signale sind  $t'_{\pm}$  bzw.  $t_{\pm}$ .

## 2.3 Längenkontraktion

Eine Längenmessung erfordert die *gleichzeitige* Bestimmung zweier Orte, nämlich der Anfangs- und Endpunkte. Da wir die Relativität der Gleichzeitigkeit schon eingesehen haben, wird sich diese auch auf Längenmessungen auswirken.

In einem Gedankenexperiment messen wir die Länge des Zuges über die Laufzeit von Lichtsignalen (Abb. 2.3.1). In  $S'$  beträgt die Laufzeit  $\Delta t' = \frac{2l'}{c}$ , während in  $S$  die Laufzeit durch die Summe der Laufzeiten  $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$  für den Hin- und Rückweg, die nun unterschiedliche Längen haben, gegeben ist, mit

$$\Delta t_1 = \frac{l}{c - v}, \quad \Delta t_2 = \frac{l}{c + v}. \quad (2.3.1)$$

Somit haben wir

$$\Delta t = l \left( \frac{1}{c - v} + \frac{1}{c + v} \right) = \frac{2cl}{c^2 - v^2} = \frac{2l}{c} \gamma^2. \quad (2.3.2)$$

Lösen wir dies nach  $l$  auf und berücksichtigen die Zeitdilatation  $\Delta t' = \frac{1}{\gamma} \Delta t$ , so folgt

$$l = \frac{c}{2} \frac{1}{\gamma^2} \Delta t = \frac{c}{2\gamma} \Delta t' = \frac{l'}{\gamma} < l'. \quad (2.3.3)$$

Der bewegte Wagen erscheint also in Bewegungsrichtung verkürzt. Dies bezeichnet man als **Längenkontraktion**. Quantitativ gilt

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (2.3.4)$$

wobei  $l_0$  die Länge im Ruhesystem ist.

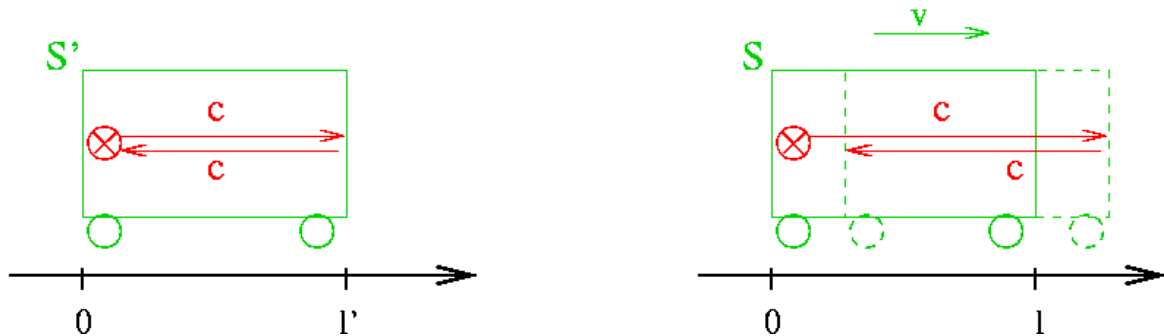


Abbildung 2.3.1: Längenmessung über die Laufzeit von Lichtsignalen.

Da die Situation symmetrisch in  $S$  und  $S'$  ist, erscheinen auch Maßstäbe in  $S$  aus Sicht von  $S'$  verkürzt. Dies ist aber nicht paradox, da die Längenmessung eine *gleichzeitige* Bestimmung von Anfangs- und Endpunkt erfordert, es aber keine absolute Gleichzeitigkeit gibt.

## 2.4 Die Lorentz-Transformation

Die Lorentz-Transformation (1904) ist die Verallgemeinerung der Galilei-Transformation auf relativistische Geschwindigkeiten. Wir betrachten zwei Inertialsysteme  $S$  und  $S'$ , deren Ursprünge zur Zeit  $t = 0$  zusammenfallen:

$$t = t' = 0 : \quad x = x', \quad y = y', \quad z = z'. \quad (2.4.1)$$

Das System  $S'$  bewege sich mit der Geschwindigkeit  $v$  in Richtung der  $x$ -Achse von System  $S$  (Abb. 2.4.1). Die Position des Ursprungs von  $S'$  zur Zeit  $t$  ist daher  $vt$ .

Wir betrachten nun den Punkt  $P$  mit den Koordinaten  $P = (x', 0, 0)$  im System  $S'$  (Abb. 2.4.1). Im System  $S$  misst man für den Abstand von  $P$  zum Ursprung von  $S'$  auf Grund der Längenkontraktion  $x'/\gamma$ . Somit gilt in  $S$

$$x = vt + \frac{x'}{\gamma} \quad (2.4.2)$$

bzw.

$$x' = \gamma(x - vt). \quad (2.4.3)$$

Für  $v \ll c$  ist  $\gamma \approx 1$  und wir erhalten das bekannte Ergebnis der Galilei-Transformation.

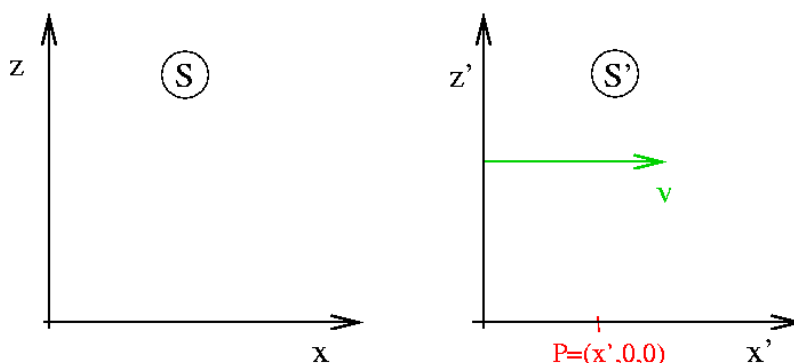


Abbildung 2.4.1: Zur Lorentz-Transformation. Das Inertialsystem  $S'$  bewegt sich mit der Geschwindigkeit  $v$  parallel zur  $x$ -Achse von System  $S$ .

Neu bei der Lorentz-Transformation ist aber, dass auch die Zeit transformiert werden muss, um der Zeitdilatation Rechnung zu tragen. Auf Grund der Symmetrie bewegt sich  $S$  von  $S'$  aus gesehen mit der Geschwindigkeit  $-v$ . Da  $\gamma(-v) = \gamma(v)$  gilt nun

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + vt') = \gamma[\gamma(x - vt) + vt'] \\ &= \gamma^2 x - \gamma^2 vt + \gamma vt', \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

wobei wir (2.4.3) benutzt haben. Lösen wir diese Gleichung nach  $t'$  auf, so erhalten wir

$$t' = \gamma t - \frac{1}{\gamma v} (\gamma^2 - 1) = \gamma \left( t - \frac{vx}{c^2} \right). \quad (2.4.5)$$

Die Koordinaten senkrecht zur Bewegungsrichtung ändern sich wie bei der Galilei-Transformation nicht. Zusammengefasst erhalten wir die **Lorentz-Transformation**

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, & t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, & (2.4.6) \\ y' &= y, & z' &= z. & (2.4.7) \end{aligned}$$

Die Umkehrung erhält man wie bei der Galilei-Transformation durch die Ersetzung  $v \rightarrow -v$  und  $x \leftrightarrow x'$  usw.:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (2.4.8)$$

$$y = y', \quad z = z'. \quad (2.4.9)$$

In der angegebenen Form wurde angenommen, dass sich die Inertialsysteme entlang ihrer  $x$ -Achsen bewegen. Sie ist daher zu modifizieren, wenn die Relativbewegung der Systeme unter einem anderem Winkel stattfindet.

Für kleine Geschwindigkeiten gilt (Taylor-Entwicklung)

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}. \quad (2.4.10)$$

Wenn die Geschwindigkeit  $v$  viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit  $c$  ist folgt daraus, dass  $\gamma$  ungefähr 1 ist. Die Lorentz-Transformation geht dann in die Galilei-Transformation über.

Wir zeigen nun, dass sich die in Kap. 2 gefundenen Effekte auch direkt aus der Lorentz-Transformation ableiten lassen.

- **Zeitdilatation:** Wir betrachten eine Uhr am Ursprung von  $S'$  aus der Sicht von  $S$ . Dort befindet sich die Uhr zur Zeit  $t$  am Ort  $x = vt$  und zeigt die Zeit

$$t' = \gamma \left( t - \frac{vx}{c^2} \right) = \gamma \left( t - \frac{v^2 t}{c^2} \right) = \frac{t}{\gamma}. \quad (2.4.11)$$

- **Längenkontraktion:** Die Enden eines Maßstabes liegen in  $S'$  bei  $x'_1, x'_2$  mit  $l' = x'_2 - x'_1$ . Misst man die Positionen der Enden *gleichzeitig* in  $S$  (zur Zeit  $t_1 = t_2$ ), so gilt

$$l' = x'_2 - x'_1 = \gamma ((x_2 - vt_2) - (x_1 - vt_1)) = \gamma(x_2 - x_1) = l. \quad (2.4.12)$$

### 2.4.1 Geschwindigkeitsaddition

Da die Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen gleich ist, können sich Geschwindigkeiten nicht wie in der Galilei-Transformation einfach addieren. Wir wollen daher das modifizierte Gesetz zur Addition von Geschwindigkeiten aus der Lorentz-Transformation ableiten.

Wie wir in den Übungen zeigen werden, hängen die Geschwindigkeit  $u_x = \frac{dx}{dt}$  eines Teilchens in  $S$  und die in  $S'$  gemessene Geschwindigkeit  $u'_x = \frac{dx'}{dt'}$  zusammen gemäß

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v / c^2}. \quad (2.4.13)$$

Dort werden wir auch sehen, dass auch die  $y$ - oder  $z$ -Komponenten der Geschwindigkeit zu transformieren sind, auch wenn die relative Bewegung von  $S$  und  $S'$  entlang der  $x$ -Achse erfolgt!

# Kapitel 3

## Die Geometrie der Raum-Zeit

### 3.1 Minkowski-Abstand

In der Newton'schen Physik gibt es getrennte Abstandsbegriffe für Raum und Zeit. Zwei Ereignisse  $(\underline{r}_1, t_1)$  und  $(\underline{r}_2, t_2)$  haben den **zeitlichen Abstand**

$$\Delta t = t_2 - t_1. \quad (3.1.1)$$

Ist  $\Delta t > 0$ , so findet Ereignis 1 früher als Ereignis 2 statt, ist  $\Delta t < 0$  so liegt Ereignis 2 vor Ereignis 1. Der **räumliche Abstand** der Ereignisse ist durch den euklidischen Abstand

$$\Delta r = |\underline{r}_2 - \underline{r}_1| = \sqrt{(\underline{r}_2 - \underline{r}_1) \cdot (\underline{r}_2 - \underline{r}_1)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (3.1.2)$$

gegeben.

In der Relativitätstheorie ist der zeitliche Abstand der Ereignisse abhängig vom Bezugssystem. Wir suchen daher nach einem Abstandsbegriff, der invariant unter Lorentz-Transformationen ist! Dies leistet der **Minkowski-Abstand**

$$s_{12}^2 := c^2(t_2 - t_1)^2 - |\underline{r}_2 - \underline{r}_1|^2, \quad (3.1.3)$$

der räumliche und zeitliche Abstände kombiniert. Man beachte, dass durchaus  $s_{12}^2 < 0$  sein kann, d.h. das Quadrat ist eher symbolisch zu interpretieren!

Zum Beweis der Invarianz betrachten wir den Abstand eines Ereignisses  $(x, t)$  vom Ursprung:

$$\begin{aligned} s'^2 &= c^2 t'^2 - x'^2 = c^2 \gamma^2 \left( t - \frac{vx}{c^2} \right)^2 - \gamma^2 (x - vt)^2 \\ &= c^2 \gamma^2 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^2 - \gamma^2 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) x^2 = c^2 t^2 - x^2 = s^2. \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

### 3.2 Minkowski-Diagramm

Da Raum und Zeit im Rahmen der Relativitätstheorie nicht mehr getrennt voneinander betrachtet werden können<sup>1</sup> spricht man im Zusammenhang mit der von Minkowski (auf einer

---

<sup>1</sup>Sie „mischen“ ja z.B. bei der Lorentz-Transformation.

Mathematiker-Konferenz 1908 in Köln) eingeführten vierdimensionalen Betrachtungsweise von der **Raumzeit** oder **Minkowski'schen Raumzeit**. Einen Punkt im Minkowski-Diagramm bezeichnet man auch als **Ereignis**.

Minkowski hat eine anschauliche (geometrische) Darstellung der Lorentz-Transformation eingeführt, die auf einer speziellen Form des Raum-Zeit-Diagramms beruhen, dem **Minkowski-Diagramm**. Üblicherweise sind gegenüber dem klassischen  $x - t$ -Diagramm die Achsen für Ort und Zeit vertauscht (Abb. 3.2.1). Formal kann man das **Minkowski-Diagramm** folgendermaßen definieren:

Das Minkowski-Diagramm ist ein Weg-Zeit-Diagramm, das die Postulate der speziellen Relativitätstheorie erfüllt. Es ist vierdimensional und weist drei Raumdimensionen  $x, y, z$  und eine Zeitdimension  $t$  auf.

Aus Dimensionsgründen sollte man statt der Zeit  $t$  als vierte Koordinate  $ct$  nehmen, da dann alle Koordinaten die Dimension einer Länge haben. Oft wird aber im Rahmen der Relativitätstheorie aus Bequemlichkeit  $c = 1$  gesetzt, d.h. man misst alle Geschwindigkeit in Bruchteilen der Lichtgeschwindigkeit.

Gibt man die Position eines Objektes zu jeder Zeit an, so liefert das im Minkowski-Diagramm eine sog. **Weltlinie**. Eine Weltlinie meint also eine Kurve im Raum-Zeit-Diagramm, die die Bewegung eines Körpers oder die Ausbreitung eines Signals beschreibt. Für ein Teilchen, das sich mit der konstanten Geschwindigkeit  $v$  nach rechts bewegt, gilt

$$x = vt \quad \implies \quad ct = \frac{c}{v}x. \quad (3.2.1)$$

Es wird somit im Minkowski-Diagramm durch eine Gerade mit der Steigung  $\frac{c}{v} > 1$  repräsentiert. Speziell für Lichtstrahlen ist die Steigung 1. Da sich kein Teilchen oder Signal schneller als Licht bewegen kann, dürfen Weltlinien keine Steigung aufweisen, die kleiner als 1 ist. Sie liegen daher innerhalb des **Lichtkegels**  $|x| = |ct|$ , der alle Punkte umfasst, die vom Ursprung aus mit einem Lichtsignal (in der Zukunft oder Vergangenheit) erreicht werden können und daher den Minkowski-Abstand  $s^2 = 0$  vom Ursprung haben<sup>2</sup>.

Der Lichtkegel zerlegt die Raumzeit-Ebene in drei Gebiete:

- $s^2 > 0, t > 0$ : Das Innere des **Vorwärts-Lichtkegels**  $x = \pm ct, t > 0$  entspricht der **absoluten Zukunft** des Ereignisses  $(0, 0)$ . Ereignisse in diesem Gebiet finden in jedem Bezugssystem später als  $t = 0$  statt, d.h. unter Lorentz-Transformationen ist  $t' > 0$ .

Andererseits gibt es für jedes solche Ereignis ein Bezugssystem  $S'$ , in dem es im Ursprung  $x' = 0$  stattfindet. Die Koordinatenachsen von  $S'$  sind bestimmt<sup>3</sup> durch  $t' = 0$  ( $x'$ -Achse) und  $x' = 0$  ( $t'$ -Achse). In  $S$  sind diese daher durch die Gerade

$$\begin{aligned} ct &= \frac{c}{v}x && (t' - \text{Achse}) \\ ct &= \frac{v}{c}x && (x' - \text{Achse}) \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

<sup>2</sup>Im dreidimensionalen Raum werden diese Bereiche zu Hyperkegeln.

<sup>3</sup>Dies gilt ganz allgemein für jedes relativ zu  $S$  bewegte Bezugssystem.



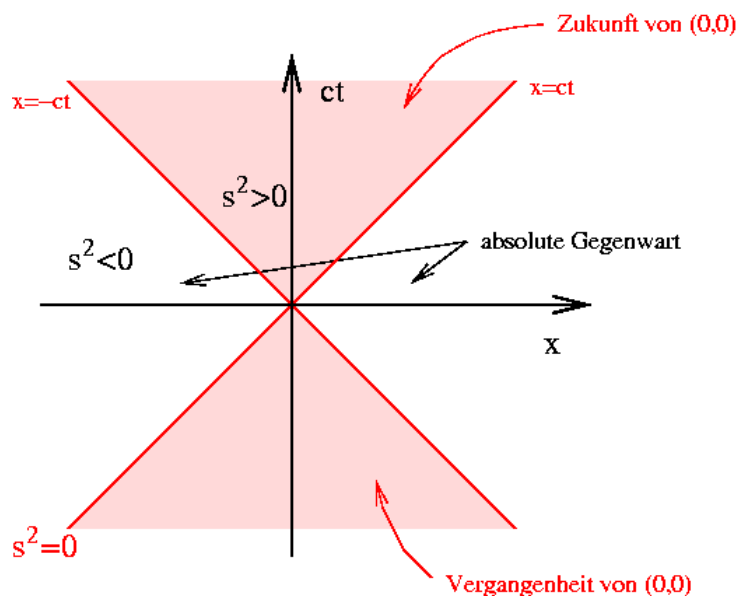


Abbildung 3.2.1: Minkowski-Diagramm: Der Lichtkegel zerlegt die Raumzeit-Ebene in drei Gebiete.

gegeben. Man sieht aus Abb. 3.2.2, dass die  $t'$ -Achse durch geeignete Wahl von  $v$  durch jeden Punkt im Inneren des Vorwärts-Lichtkegels von  $S$  gehen kann.

- $s^2 > 0$ ,  $t < 0$ : Das Innere des **Rückwärts-Lichtkegels** entspricht der **absoluten Vergangenheit** des Ereignisses  $(0, 0)$ . Ereignisse dort finden in jedem Bezugssystem vor  $t = t' = 0$  statt und für jedes Ereignis gibt es ein Bezugssystem, in dem es am Ursprung  $x' = 0$  stattfindet.
- $s^2 < 0$ : Das Gebiet außerhalb des Lichtkegels wird als **absolute Gegenwart** bezeichnet. Ereignisse dort sind räumlich vom Ursprung getrennt, es ist stets  $x' \neq 0$ . Es aber ein Bezugssystem, in dem das Ereignis bei  $t' = 0$  stattfindet, also gleichzeitig mit  $(x, t) = (0, 0)$ . Ereignisse in diesem Bereich sind aber kausal vom Ursprung getrennt und könnten nur durch Signale mit Überlichtgeschwindigkeit erreicht werden.

Die obigen Überlegungen lassen sich auf beliebige Ereignisse  $(r_1, t_1)$  und  $(r_2, t_2)$  verallgemeinern. Man unterscheidet folgende Fälle:

| $s_{12}^2$ | Abstand    | Lage  |
|------------|------------|---|
| $> 0$      | zeitartig  | in Zukunft ( $t > 0$ ) oder Vergangenheit ( $t < 0$ ) |
| $= 0$      | lichtartig | auf dem Lichtkegel                                    |
| $< 0$      | raumartig  | Gegenwart   |

Bei **zeitartigen** Abständen können Beobachter an den beiden Ereignissen miteinander kommunizieren, wobei die Signalgeschwindigkeit kleiner als die Lichtgeschwindigkeit ist. Für **lichtartige** Abstände geht dies nur mit Signalen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Beobachter mit einem **raumartigen** Abstand können dagegen überhaupt nicht miteinander kommunizieren.

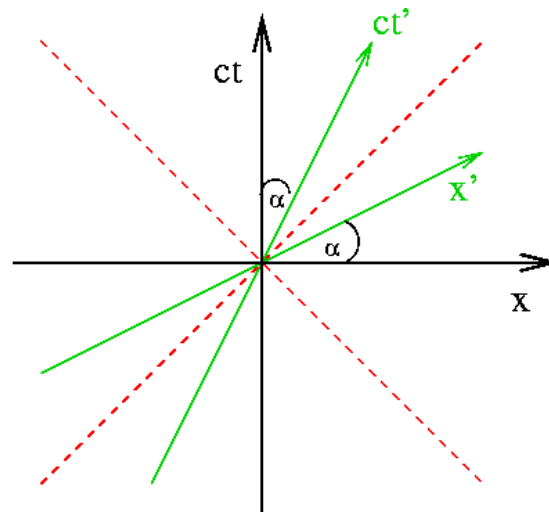


Abbildung 3.2.2: Die  $t'$ - und  $x'$ -Achsen eines relativ zu  $S$  bewegten Systems  $S'$  bilden mit den  $t$ - bzw.  $x$ -Achsen jeweils den gleichen Winkel. Der Lichtkegel bleibt daher auch in  $S'$  die Winkelhalbierende.

Wir sehen, dass die Relativität der Gleichzeitigkeit Grenzen hat. Die Reihenfolge zweier zeitartig getrennter Ereignisse kann durch einen Wechsel des Bezugssystems nicht verändert werden. Die Existenz von zeitartig getrennten Abständen ist daher konzeptionell wichtig, da sonst die Vorstellung der kausalen Verknüpfung zweier Ereignisse als Ursache und Wirkung nicht möglich wäre.

Die Linien konstanten Minkowski-Abstandes sind (in der zweidimensionalen Raumzeit) Hyperbeln (Abb. 3.2.3):

$$s^2 = c^2 t^2 - x^2 \implies \begin{cases} ct = \pm \sqrt{x^2 + s^2} & \text{für } s^2 > 0, \\ x = \pm \sqrt{c^2 t^2 - s^2} & \text{für } s^2 < 0. \end{cases} \quad (3.2.3)$$

Man spricht daher von einer **hyperbolischen Geometrie**. Abschliessend sei noch angemerkt, dass im Falle von mehr als einer Raumdimension die Symmetrie von Raum und Zeit der zweidimensionalen Raumzeit gebrochen wird.

### 3.2.1 Eigenzeit und Zwillingsparadoxon

Wir betrachten einen Beobachter in einer zweidimensionalen Raumzeit, der eine allgemeine Bewegung  $x(t)$  ausführt (Abb. 3.2.4). Welche Zeit misst er ?

Auf Grund der Zeitdilatation (2.2.4) ist

$$dt' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \quad (3.2.4)$$

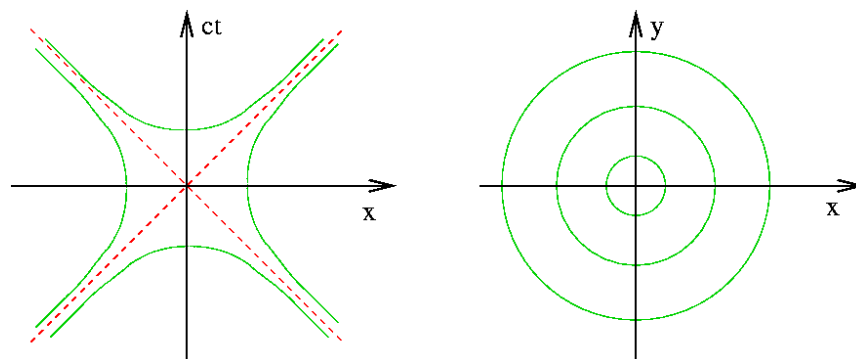


Abbildung 3.2.3: Die Linien konstanten Minkowski-Abstands vom Ursprung der zweidimensionalen Raumzeit sind Hyperbeln (links). In der euklidischen Geometrie der Newton'schen Mechanik sind liegen die Punkte mit gleichem euklidischen Abstand auf einem Kreis.

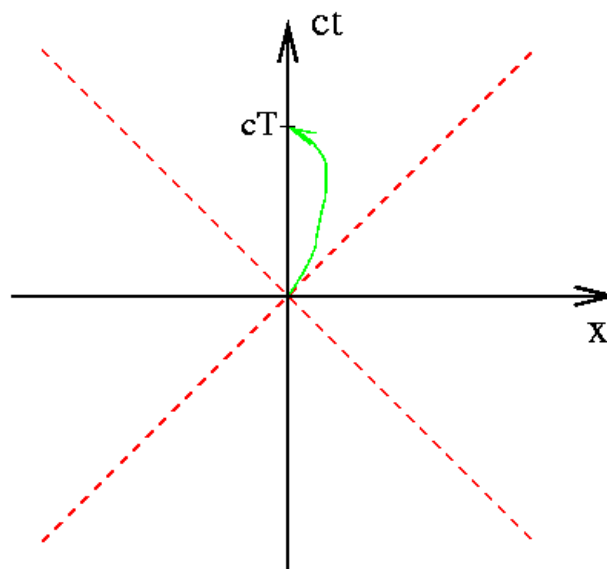


Abbildung 3.2.4: Ein Beobachter, der sich entlang der grünen Weltlinie bewegt, misst eine Zeit  $T'$ , die größer ist als die Zeit  $T$ , die für einen ruhenden Beobachter vergeht.

wobei hier die Momentangeschwindigkeit  $v = \frac{dx}{dt}$  einzusetzen ist. Daher gilt

$$\begin{aligned}(dt')^2 &= \left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right] (dt)^2 = (dt)^2 - \frac{1}{c^2}(dx)^2 \\ &= \frac{1}{c^2} [c^2(dt)^2 - (dx)^2] = \frac{1}{c^2}(ds)^2,\end{aligned}\quad (3.2.5)$$

d.h.  $(dt')^2$  ist bis auf den Faktor  $1/c^2$  die infinitesimale Änderung des Minkowski-Abstandes  $ds^2$ . Deshalb definiert man das infinitesimale Inkrement der **Eigenzeit**  $\tau$  des Beobachters durch

$$d\tau := \frac{1}{c} ds = \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \dot{x}^2} dt = \frac{dt}{\gamma}. \quad (3.2.6)$$

Man beachte, dass sich hierbei  $\gamma$  mit der Geschwindigkeit zeitlich ändern kann! Die vom Beobachter entlang des Weges gemessene Zeit ist daher

$$T' = \int_0^T dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} < T, \quad (3.2.7)$$

die auf Grund des Minuszeichens unter der Wurzel immer kleiner als  $T$  ist. Wir vergleichen (3.2.7) mit dem Ausdruck

$$\mathcal{F}_S[\underline{r}(\cdot)] := \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx \quad (3.2.8)$$

(siehe den Abschnitt über Variationsrechnung) für die Bogenlänge in der euklidischen Ebene, Letztere wird durch eine Gerade minimiert. Durch das Minuszeichen in (3.2.7) ist die ‘Gerade’ ( $\dot{x} = 0$ ) in der hyperbolischen Geometrie die *längste* Verbindung zwischen den beiden Punkten!

Als Anwendung des Konzepts der Eigenzeit wollen wir das **Zwillingsparadoxon** diskutieren, das ursprünglich die SRT lächerlich machen sollte (siehe [3]). Es handelt von Zwillingen Alice und Bob, von denen Alice zu einem entfernten Planeten fliegt und dann zur Erde zurückkehrt. Für Bob vergeht zwischen Abflug und Rückkehr die Zeit  $T$ . Nehmen wir an, dass sich Alice, bis auf die beliebig kurze Umkehrphase, mit konstanter Geschwindigkeit  $v$  bewegt, so vergeht für sie die Zeit  $T' = \frac{1}{\gamma} T < T$ . Sie ist also nach der Rückkehr jünger als Bob!

Das ist zwar ungewohnt, aber noch nicht paradox. Das Paradoxon entsteht erst durch Umkehrung des Arguments: Alice befindet sich (bis auf die kurze Umkehrphase) in einem Inertialsystem und aus ihrer Sicht entfernt sich Bob und kehrt dann zurück. Also sollte er jünger sein als sie!

Die Auflösung des Paradoxons besteht darin, dass die Situation *nicht* symmetrisch ist! Alice muss mindestens einmal das Inertialsystem wechseln und ihre Weltlinie  $x(t)$  ist daher keine Gerade (Abb. 3.2.5). Wenn sie instantan umkehrt, ist ihre Weltlinie stückweise linear. Die Auswertung des Integrals (3.2.7) ergibt dann

$$T' = 2 \frac{T}{2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\gamma} T, \quad (3.2.9)$$

wie erwartet.

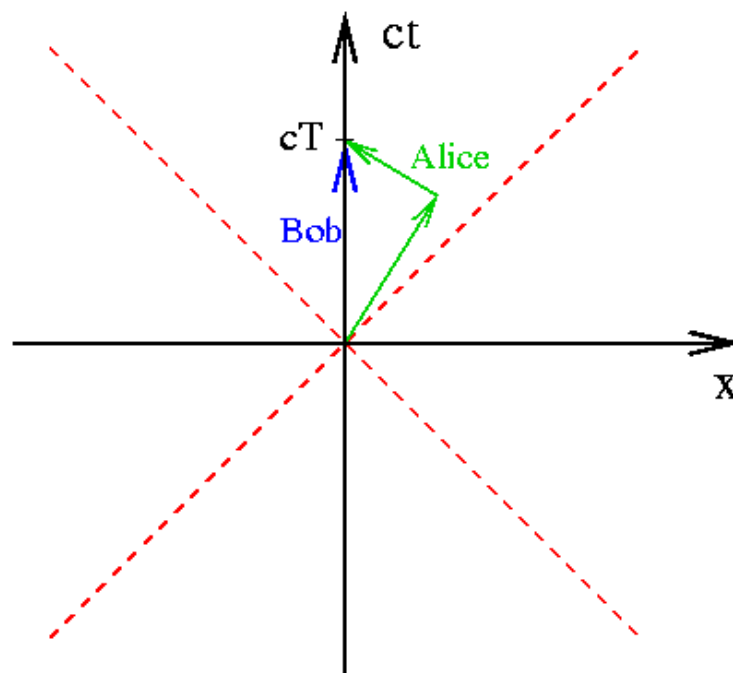


Abbildung 3.2.5: Zum Zwillingsparadoxon. Alice muss das Inertialsystem wechseln, ihre Weltlinie ist daher keine Gerade. Bob befindet sich dagegen die ganze Zeit im gleichen Inertialsystem.

### 3.2.2 Das Garagenparadoxon

Ähnlich wie die Zeitdilatation hat auch die Längenkontraktion zahlreiche (vermeintliche) Paradoxien hervorgebracht. Eines der bekanntesten ist das **Garagen-Paradoxon**, das in unterschiedlichen Varianten existiert. Die bekannteste beruht auf der Frage „Passt ein 5 m langes Auto in eine 2,5 m lange Garage?“

Dazu betrachten wir ein Auto der Länge  $L_A^{(0)} = 5$  m, das sich einer Garage der Länge  $L_G^{(0)} = 2.5$  m mit der Geschwindigkeit  $v$  nähert, um dort einzuparken.

Aus der Sicht des Garagenbesitzers erscheint das Auto längenkontrahiert:

$$L_A = L_A^{(0)} \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Gilt für die Geschwindigkeit des Autos

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \quad \text{also} \quad \frac{v^2}{c^2} = \frac{3}{4} \quad \text{und somit} \quad v = \frac{\sqrt{3}}{2}c \approx 0,866c,$$

so ist das Auto nur noch halb so lang und passt daher in die Garage.

Aus Sicht des Fahrers stellt sich die Situation anders dar. Für ihn nähert sich die Garage mit der Geschwindigkeit  $v$ . Sie erscheint ihm daher um  $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{2}$  verkürzt. Das Auto passt daher nicht in die Garage, da diese nur 1,25 m lang ist.

Offensichtlich besteht ein Widerspruch zwischen den beiden Sichtweisen! Tatsächlich haben aber beide Beobachter Recht! Der Grund ist die Tatsache, dass die Gleichzeitigkeit relativ ist! Wenn Vorder- und Hinterende des Autos gleichzeitig in der Garage sind, gilt das nur für den Garagen-Besitzer! Für den Fahrer sind diese Ereignisse nicht gleichzeitig und so sind für ihn beide Enden nie gleichzeitig in der Garage. Dies ist in Abb. 3.2.6 illustriert (mit einer Leiter statt eines Autos).

Was passiert, wenn man das Experiment wirklich durchführen würde? Sobald das Auto auf die Rückwand der Garage trifft, breitet sich die Information darüber in Richtung Heck aus. Die Signalgeschwindigkeit ist aber kleiner als die Lichtgeschwindigkeit  $c$ . Das bedeutet, dass das hintere Ende erst viel später von dem Abbremsen des vorderen Endes „erfährt“ und sich daher zunächst ungebremst weiter bewegt. Das Auto wird daher kürzer und passt daher tatsächlich in die Garage.

In einer etwas anderen Variante des Problems, dem **Maßstabsparadoxon**, geht es um ein Loch im Boden, das einen Panzer aufhalten soll. Der Panzer hat eine Länge von 26 m und fährt mit der Geschwindigkeit  $v = 12/13c$ . Die Löcher haben eine Länge von 13 m. Die Verteidiger hoffen, dass der auf 10 m kontrahierte Panzer in den Graben fällt. Der Panzerfahrer hingegen glaubt, den auf 5 m kontrahierten Graben überfahren zu können. Diese Hoffnung wird sich aber nicht erfüllen!

Man kann den Vorgang mit Hilfe der Lorentz-Transformation genauer analysieren. Diese berücksichtigt, dass sich neben den Ortskoordinaten auch die Zeitkoordinaten ändern. Es stellt sich dabei heraus, dass der Graben für den Panzer gekippt erscheint, und er daher hinein fällt (Abb. 3.2.7).

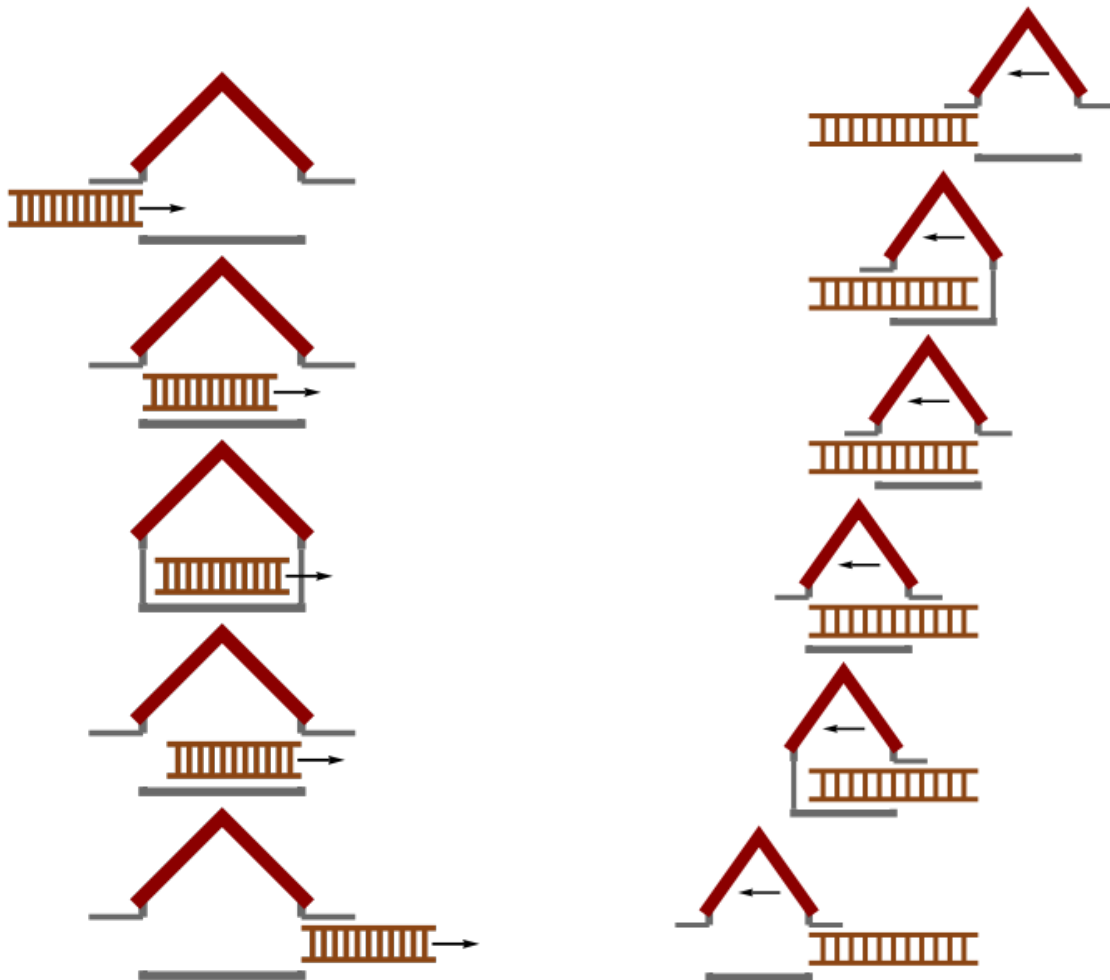


Abbildung 3.2.6: Das Garagenparadoxon aus der Sicht der Garage (links) und der Sicht des Autos (Leiter) (rechts). Aus Sicht des Garagensystems sollen sich die Tore gleichzeitig für kurze Zeit schliessen, wenn die Leiter vollständig in der Garage ist. Auf Grund der Relativität findet dieses Schliessen aber nicht auch im Leitersystem gleichzeitig statt. Daher kommt in beiden Szenarien die Leiter unbeschadet durch die Garage, wobei sie aus Sicht des Leitersystems nie vollständig in der Garage war. (aus *Wikipedia*)

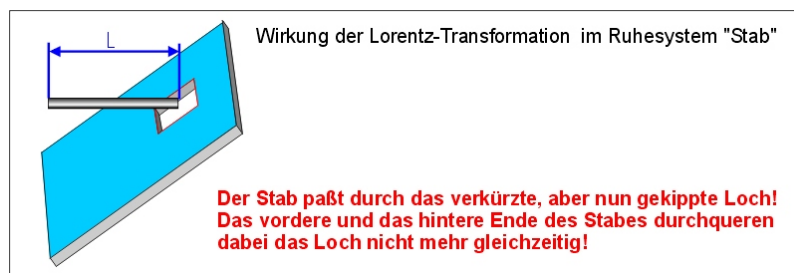


Abbildung 3.2.7: Aus der Sicht des Panzers erscheint der Graben gekippt. Daher fällt er trotz Längenkontraktion hinein! (aus *Wikipedia*)



# Kapitel 4

## Relativistische Dynamik

### 4.1 Vierervektoren

In der Newton'sche Dynamik haben wir gesehen, dass das Newton'sche Bewegungsgesetz invariant unter Koordinatentransformation ist, insbesondere unter Drehungen. Es handelt sich um eine Beziehung zwischen **Vektoren**, die in diesem Zusammenhang folgendermaßen definiert sind:

Ein **Vektor** ist eine dreikomponentige Größe, die sich unter Drehungen wie ein Ortsvektor  $\underline{r} = (x, y, z)$  transformiert.

Ein **Skalar** ist eine (einkomponentige) Größe, die sich unter Drehungen nicht ändert.

In der Newton'schen Mechanik ist die Zeit  $t$  eine Größe, die global und unabhängig vom Bezugssystem definiert ist und daher ein Skalar<sup>1</sup>. Daher sind Zeitableitungen von Vektoren ebenfalls Vektoren, z.B. die Zeitableitungen von Ortsvektoren

$$\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt}, \quad \underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt}, \quad \underline{p} = m\underline{v}. \quad (4.1.1)$$

In der Relativitätstheorie ist die Zeit aber abhängig vom Bezugssystem und daher kein Skalar mehr. Für eine relativistische Verallgemeinerung des Bewegungsgesetzes verallgemeinern wir zunächst die Begriffe Vektor und Skalar auf **Lorentz-invariante Größen**:

- Ein **Lorentz-Vektor** (auch **Vierervektor**) ist eine vierkomponentige Größe, die sich unter Lorentz-Transformationen wie ein Raum-Zeit-Punkt<sup>2</sup>

$$X = (X^0, X^1, X^2, X^3) := (ct, x, y, z) = (ct, \underline{r}) \quad (4.1.2)$$

transformiert.

- Ein **Lorentz-Skalar** ist eine (einkomponentige) Größe, die unter Lorentz-Transformationen invariant ist.

---

<sup>1</sup>Ebenso ist die Masse  $m$  ein Skalar!

<sup>2</sup>Üblicherweise bezeichnet man Vierervektoren durch Grossbuchstaben mit hochgestellten Indizes. Deren Bedeutung wird später noch genauer erläutert.

## 4.2 Relativistischer Impuls und relativistische Energie

Die Zeit  $t$  ist zwar kein Lorentz-Skalar, allerdings ist die Eigenzeit  $\tau$  proportional zum invarianten Minkowski-Abstand (siehe (3.2.6)) und damit ein Lorentz-Skalar. Damit liegt es nahe, als Verallgemeinerung des Newton'schen Impulses  $\underline{p} = m\underline{\dot{x}}$  den **relativistischen Impuls** oder **Viererimpuls** eines Teilchens durch

$$P = (P^0, P^1, P^2, P^3) := m \frac{dX}{d\tau} = m\gamma \frac{dX}{dt} = m\gamma(c, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \quad (4.2.1)$$

zu definieren. Im nichtrelativistischen Grenzfall  $|\dot{x}| \ll c$ ,  $\gamma \approx 1$  reduzieren sich die räumlichen Komponenten des Viererimpulses auf den Newton'schen Impuls

$$(P^1, P^2, P^3) \approx m\underline{\dot{x}}. \quad (4.2.2)$$

Um die physikalische Bedeutung der zeitlichen Komponente  $P^0$  zu verstehen, entwickeln wir  $P^0$  nach Ordnungen von  $v/c^2$ :

$$P^0 = \frac{mc}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx mc \left( 1 + \frac{v^2}{2c^2} + \dots \right) = \frac{1}{c} \left( mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \dots \right). \quad (4.2.3)$$

Der zweite Term ist offensichtlich die Newton'sche kinetische Energie. Den ersten Term diskutieren wir noch in Kap. 4.3. Es handelt sich dabei um die **Ruheenergie**  $mc^2$ . Die Größe  $cP^0$  können wir dann mit der Gesamtenergie  $E$  des Teilchens identifizieren,

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \dots \quad (4.2.4)$$

Damit können wir den Viererimpuls schreiben als

$$\boxed{P = (E/c, \underline{p}), \quad \underline{p} = \frac{m\underline{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m_r \underline{v},} \quad (4.2.5)$$

mit der **relativistischen Masse**

$$m_r = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (4.2.6)$$

Die Form des Viererimpulses ist nicht ganz überraschend, da nach dem Noether-Theorem die Energie mit zeitlichen und der Impuls mit räumlichen Translationen verknüpft sind.

Bei der Interpretation der relativistischen Masse ist Vorsicht geboten! So kann man nicht einfach in beliebigen klassischen Ausdrücken die Masse durch die relativistische Masse ersetzen, um so korrekte relativistische Ergebnisse zu erhalten!

Analog zum Minkowski-Abstand kann man für einen allgemeinen Vierervektor  $X = (X^0, X^1, X^2, X^3)$  den **Minkowski-Betrag**

$$|X|^2 = (X^0)^2 - (X^1)^2 - (X^2)^2 - (X^3)^2 \quad (4.2.7)$$

eingeführt. Dieser ist per Konstruktion ein Lorentz-Skalar und damit invariant unter Lorentz-Transformationen.

Für den Viererimpuls ergibt sich daraus die invariante Größe

$$|P|^2 = (E/c)^2 - |\underline{p}|^2 = \frac{E^2}{c^2} - m^2\gamma^2|\underline{v}|^2 = m^2\gamma^2(c^2 - |\underline{v}|^2) = m^2c^2. \quad (4.2.8)$$

Löst man dies nach der Energie  $E$  auf, so erhält man die wichtige Beziehung

$$\boxed{E = \sqrt{m^2c^4 + c^2|\underline{p}|^2}} \quad (4.2.9)$$

zwischen Energie und Impuls eines relativistischen Teilchens.

Diese Beziehung ist auch für masselose Teilchen ( $m = 0$ ) sinnvoll:

$$E = c|\underline{p}|. \quad (4.2.10)$$

Solche Teilchen können aber nur dann nichtverschwindende Energie und Impuls haben, wenn man zugleich die Limites  $m \rightarrow 0$  und  $v \rightarrow c$  durchführt, d.h. masselose Teilchen *müssen* sich immer mit Lichtgeschwindigkeit bewegen!

## 4.3 Kräfte

Eine relativistische Verallgemeinerung der Newton'schen Bewegungsgleichung muss sich in Form einer Beziehung zwischen Vierervektoren schreiben lassen, d.h.

$$\frac{d}{d\tau}P = K \quad (4.3.1)$$

mit der **Minkowski-Kraft**  $K = (K^0, K^1, K^2, K^3)$ . Der räumlichen Anteil dieser Gleichung lautet

$$\gamma \frac{d\underline{p}}{dt} = \underline{K} \quad (4.3.2)$$

mit  $\underline{K} = (K^1, K^2, K^3)$ . Diesen können wir durch Vergleich mit der Newton'schen Beziehung  $\dot{\underline{p}} = \underline{F}$  leicht identifizieren und erhalten

$$\underline{K} = \gamma \underline{F} \quad (4.3.3)$$

als Zusammenhang zwischen der Newton'schen Kraft  $\underline{F}$  und dem räumlichen Anteil  $\underline{K}$  der Minkowski-Kraft.

Zur Bestimmung des zeitlichen Anteils leiten wir (4.2.8) nach  $\tau$  ab:

$$0 = \frac{d}{d\tau} [ |P|^2 - (P^0)^2 ] = 2 \left( P^0 \frac{dP^0}{d\tau} - \underline{p} \cdot \frac{d\underline{p}}{d\tau} \right) = 2 (P^0 K^0 - \underline{p} \cdot \underline{K}). \quad (4.3.4)$$

Lösen wir nach  $K^0$  auf, so erhalten wir

$$K^0 = \frac{1}{P^0} \underline{p} \cdot \underline{K} = \frac{\gamma}{c} \underline{v} \cdot \underline{F}. \quad (4.3.5)$$

Damit kann man nun die zeitliche Komponente von (4.3.1) in eine vertrautere Form bringen:

$$\frac{dE}{dt} = c \frac{dP^0}{dt} = \frac{c}{\gamma} \frac{dP^0}{d\tau} = \frac{c}{\gamma} K^0 = \underline{v} \cdot \underline{F}. \quad (4.3.6)$$

Dies ist der weiter oben erwähnte Beleg für die Identifikation von  $cP^0$  mit  $E$ : Die Änderung der Energie ist gerade die von der Kraft erbrachte Leistung  $\underline{v} \cdot \underline{F}$ .

Zum Abschluss betrachten wir noch eine Anwendung von (4.3.1). Dazu betrachten wir eine konstante Kraft  $\underline{F} = (F_x, 0, 0)$  in  $x$ -Richtung. Die Bewegungsgleichung für  $p_x$  lautet dann

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{mv_x}{\sqrt{1 - v_x^2/c^2}} = F_x. \quad (4.3.7)$$

Integration mit der Anfangsbedingung  $v_x(0) = 0$  liefert

$$\frac{mv_x}{\sqrt{1 - v_x^2/c^2}} = F_x t, \quad (4.3.8)$$

woraus man durch Auflösen nach  $v_x$  erhält

$$v_x(t) = \frac{F_x t}{\sqrt{m^2 + F_x^2 t^2 / c^2}}. \quad (4.3.9)$$

Für kurze Zeiten dominiert in der Wurzel der  $m^2$ -Term. Dann reduziert sich dies zum bekannten Newton'schen Verhalten  $v_x = F_x t / m$  für die Bewegung unter dem Einfluss einer konstanten Kraft. Für lange Zeiten strebt dagegen  $v_x \rightarrow c$ . Das Teilchen kann also trotz der konstant wirkenden Kraft nur bis zur Lichtgeschwindigkeit beschleunigt werden, die allerdings nie wirklich erreicht wird. Dies ist konsistent mit dem Verhalten der relativistischen Masse (4.2.6), die die Zunahme der Trägheit in der Nähe der Lichtgeschwindigkeit impliziert, d.h. eine geringere Beschleunigung als bei gleicher Kraft bei niedrigeren Geschwindigkeiten.

# Literaturverzeichnis

- [1] D.C. Giancoli: *Physik*, Pearson Studium (2009)
- [2] R. Sexl, H.K. Schmidt: *Raum - Zeit - Relativität*, Vieweg (1979)
- [3] L. Marder: *Reisen durch die Raum-Zeit*, Vieweg (1982)