
7. Übungsblatt zum Vorkurs Physik

www.thp.uni-koeln.de/~as/vorkurs10.html

1. Funktionen

- a) Skizzieren Sie die folgenden Funktionen! Geben Sie die maximalen Definitionsbereiche $D \subset \mathbb{R}$ sowie die Bildmengen $f(D) = \{f(x) | x \in D\}$ an und untersuchen Sie, ob die Funktionen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind.

- 1) $f : D \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x^2}$
- 2) $f : D \rightarrow \mathbb{R}_0^+, x \mapsto |x|$
- 3) $f : D \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$
- 4) $f : D \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x \in \mathbb{R}^- , \\ x^2 & \text{für } x \in \mathbb{R}_0^+ , \end{cases}$

- b) Ist jede Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ surjektiv, wenn sie auf ihre Bildmenge eingeschränkt wird (also $\tilde{f} : D \rightarrow f(D)$) ?

2. Monotonie

- a) Welche der folgenden Funktionen ist monoton, welche sogar streng monoton?

- 1) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$
- 2) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1$
- 3) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + 3$
- 4) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} .$

- b) Zeige: Jede streng monotone Funktion ist injektiv. Ist umgekehrt auch jede injektive Funktion streng monoton?

3. Umkehrfunktion

- a) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion von

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

zeichnerisch. Wie lautet die Umkehrfunktion explizit?

b) In welchen Definitions- und Wertebereichen ist die Funktion

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

umkehrbar und wie lautet dort die Umkehrfunktion? Hierbei seien $a \in \mathbb{R}^+$ und $b, c \in \mathbb{R}$.

4. Stetigkeit

Untersuchen Sie anhand der Graphen folgender Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ob sie stetig sind:

$$1) \quad f(x) = \begin{cases} -x & \text{für } x < 1 \\ x^3 - x^2 & \text{für } x \geq 1 \end{cases} \quad 2) \quad f(x) = \begin{cases} -x & \text{für } x < 1 \\ x^3 - 2x^2 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$