

9. Übungsblatt zum Vorkurs Physik

www.thp.uni-koeln.de/~as/vorkurs10.html

1. Trigonometrische Funktionen

a) Zeigen Sie ausgehend von den Definitionen der trigonometrischen Funktionen, dass

$$\cos^2 \phi = \frac{1}{1 + \tan^2 \phi} \quad \text{und} \quad \sin^2 \phi = \frac{1}{1 + \cot^2 \phi} .$$

b) Zeigen Sie

$$1. \sin(2\phi) = 2 \sin \phi \cos \phi \quad \text{bzw.} \quad \cos(2\phi) = 2 \cos^2 \phi - 1 ,$$

$$2. \cos \frac{\phi}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos \phi)} \quad \text{für} \quad \phi \in [-\pi, \pi] ,$$

$$3. \sin \phi_1 + \sin \phi_2 = 2 \sin \frac{(\phi_1 + \phi_2)}{2} \cos \frac{(\phi_1 - \phi_2)}{2} .$$

mit Hilfe der bekannten Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \sin(\phi_1 \pm \phi_2) &= \sin \phi_1 \cdot \cos \phi_2 \pm \cos \phi_1 \cdot \sin \phi_2 , \\ \cos(\phi_1 \pm \phi_2) &= \cos \phi_1 \cdot \cos \phi_2 \mp \sin \phi_1 \cdot \sin \phi_2 . \end{aligned}$$

2. Hyperbolische Funktionen

Zeigen Sie mit Hilfe der Definitionen der hyperbolischen Funktionen

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

folgende Beziehungen:

$$1. \sinh(-x) = -\sinh(x) \quad \text{bzw.} \quad \cosh(-x) = \cosh(x)$$

$$2. \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$3. \sinh(x \pm y) = \sinh x \cdot \cosh y \pm \cosh x \cdot \sinh y$$

$$4. \cosh(x \pm y) = \cosh x \cdot \cosh y \pm \sinh x \cdot \sinh y$$

3. Hyperbolische Umkehrfunktion

Zeigen Sie

$$\operatorname{arsinh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

ausgehend von den Definitionen der elementaren Funktionen.