
10. Übungsblatt zum Vorkurs Physik

www.thp.uni-koeln.de/~as/vorkurs10.html

1. Quotientenregel

a) Zeigen Sie für Funktionen $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ die Gültigkeit der Quotientenregel

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'}{g} - \frac{fg'}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

ausgehend von der Produkt- und Kettenregel.

b) Berechnen Sie die Ableitung von $\tan(x)$.

2. Ableitungen elementarer Funktionen

Berechnen Sie die Ableitungen (bzgl. x) von:

a) $\frac{x^2 + 3}{x + 2}$

b) a^x

c) $\sqrt{x} + \sqrt[n]{x}$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

e) $\sin(x) \cos(x)$

f) $e^{x \sin x}$

g) $\cosh x$

h) $\sinh x$

3. Zusatzaufgabe: Definition des Grenzwerts

Eine Folge (a_n) heißt *konvergent* gegen einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, wenn gilt

$$\forall \delta > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : |a_n - a| < \delta .$$

Man schreibt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Eine Folge heißt *divergent*, wenn sie nicht konvergent ist.

Zeigen Sie mit dieser Definition:

a) Die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ konvergiert mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

b) Die Folge $a_n = \lambda^n$ für $0 \leq \lambda < 1$ konvergiert mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Anleitung zu a) und b): Suchen Sie zu einem beliebigen $\delta > 0$ eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ (abhängig von δ), so dass Sie zeigen können, dass für ein beliebiges $n > N$ der „Abstand“ $|a_n - a| < \delta$ wird.

c) Die Folge $a_n = n$ ist divergent.

Anleitung zu c): Zeigen Sie für beliebiges $a \in \mathbb{R}$, dass Sie z.B. für $\delta = 1$ zu jedem $N \in \mathbb{N}$ ein $n > N$ finden, dass gerade $|a_n - a| \geq \delta$ wird. Eine Folge (a_n) ist also divergent, wenn gilt

$$\forall a \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n > N : |a_n - a| \geq \delta .$$