

---

## 13. Übungsblatt zum Vorkurs Physik

---

[www.thp.uni-koeln.de/~as/vorkurs10.html](http://www.thp.uni-koeln.de/~as/vorkurs10.html)

### 1. Komplexe Zahlen I

a) Zeigen Sie, dass Real- und Imaginärteil von  $z = x + iy$  wie folgt erhalten werden können:

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + z^*}{2} \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - z^*}{2i}.$$

b) Berechnen Sie  $(2 + 2i)^2 + (2 - 2i)^2$  und  $\frac{(-2+3i)^2}{4-4i}$ .

c) Bestimmen Sie für  $z = 1 + \sqrt{3}i$  die reellen Zahlen  $a$  und  $\phi$  so, dass  $z = a \exp(i\phi)$ .

d) Finden Sie alle Werte von  $\sqrt[5]{-1}$ .

e) Nun betrachten wir zwei komplexe Zahlen  $z_k = x_k + iy_k$  mit  $k = 1, 2$ . Zeigen Sie, dass

1.  $(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*$ ,
2.  $(z_1/z_2)^* = z_1^*/z_2^*$ ,
3.  $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ .

### 2. Komplexe Zahlen II

Die trigonometrischen Funktionen können durch die Exponentialfunktion mit komplexen Argumenten dargestellt werden:

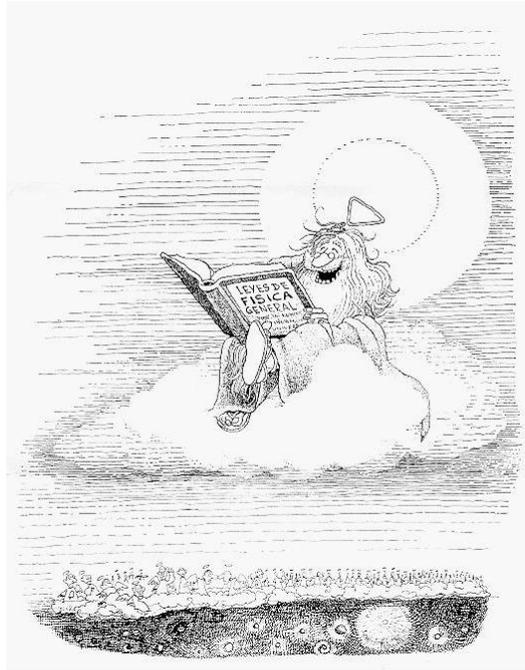
$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{und} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe dieser Darstellung, dass:

- a)  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ .
- b)  $\sin z = -i \sinh(iz)$  bzw.  $\cos z = \cosh(iz)$ .
- c)  $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$ . (Formel von MOIVRE)

Finden Sie ausgehend von c) eine Formel für  $\cos 2\alpha$  bzw.  $\sin 2\alpha$  sowie  $\cos 3\alpha$  bzw.  $\sin 3\alpha$ .

— THE END —



WIR WÜNSCHEN IHNEN VIEL ERFOLG IM STUDIUM!