
Vorkurs Physik: Übung 10

Wintersemester 2010/11

www.thp.uni-koeln.de/~as/vorkurs1011.html

1. Zusatzaufgabe: Grenzwerte von Funktionen, Stetigkeit

Die Definition des Grenzwertes (Aufgabe 4, 7. Übung) kann folgendermaßen auf Funktionen erweitert werden:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g \in \mathbb{R} \quad \text{falls für alle Folgen } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } \lim_{x \rightarrow x_0} x_n = x_0 \text{ gilt: } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_n) = g$$

In Worten: Für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die gegen x_0 konvergiert, konvergiert die Folge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ der Bilder gegen g .

Hiermit kann man nun die Stetigkeit definieren:

$$f \text{ stetig an der Stelle } x_0 \quad \iff \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

In Worten: Der Grenzwert der Funktion an der Stelle x_0 stimmt mit dem Funktionswert überein.

a) Zeige für die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$:

$$(i) : \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1, \quad (ii) : \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ existiert nicht.}$$

b) Zeige, dass die in der Vorlesung eingeführte Heaviside'sche Sprungfunktion $\Theta(x)$ bei $x = 0$ nicht stetig ist.

2. Quotientenregel

a) Zeigen Sie für Funktionen $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ die Gültigkeit der Quotientenregel

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'}{g} - \frac{fg'}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

ausgehend von der Produkt- und Kettenregel.

b) Berechnen Sie die Ableitung von $\tan(x)$.

3. Ableitungen elementarer Funktionen

Berechnen Sie die Ableitungen (bzgl. x) von:

a) $\frac{x^2 + 3}{x + 2}$

b) a^x

c) $\sqrt{x} + \sqrt[n]{x}$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

e) $\sin(x) \cos(x)$

f) $e^{x \sin x}$

g) $\cosh x$

h) $\sinh x$