Notiztitel

Vorkurs „Physik" WS 12/13 Lineare Algebra

05.09.2012

1) Einführung: Vektoren

2) Rechnen mit Vektoren

3) Basisvektoren

4) Trigonometrische Funktionen

5) Das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$

6) Das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$

7) Anwendungen von $\vec{a} \cdot \vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$

8) Drehmatrizen

9) Matrizen und Determinanten

10) Lineare Gleichungssysteme

11) Nicht-kartesische Koordinatensysteme

1) Einführung

Vektoren stellen gerichtete Größen dar, d.h. sie haben Betrag & Richtung, anschaulich Pfeile

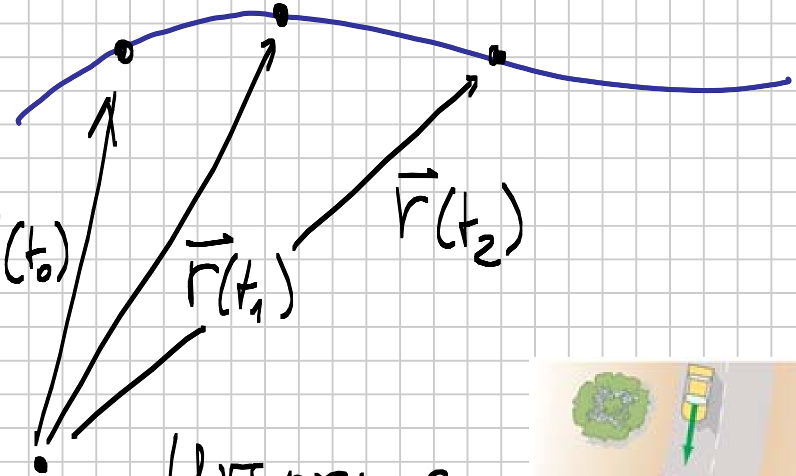
Beispiele: Geschwindigkeit $\vec{v}$, Kräfte $\vec{F}$,

Drehbewegung: Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$

Skalare haben keine Richtung, z.B. Temperatur T

Masse m, Zeit t, ...

Bewegungen in 2 oder 3 Raumrichtungen

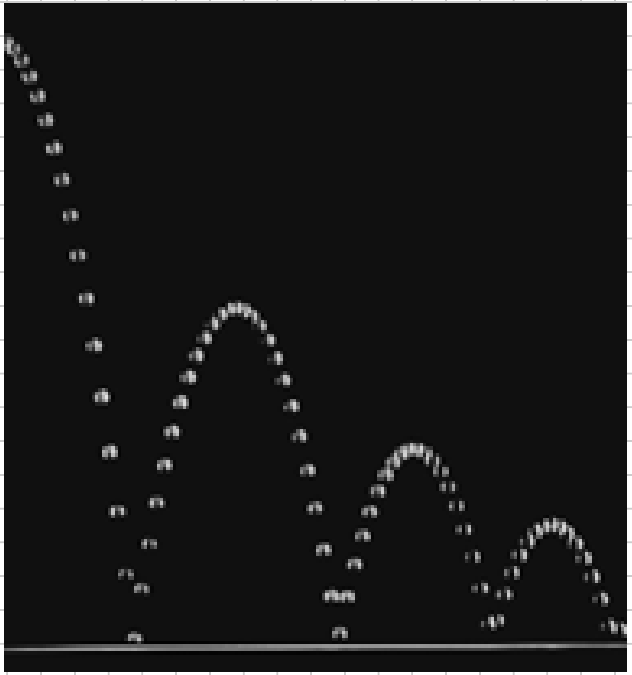


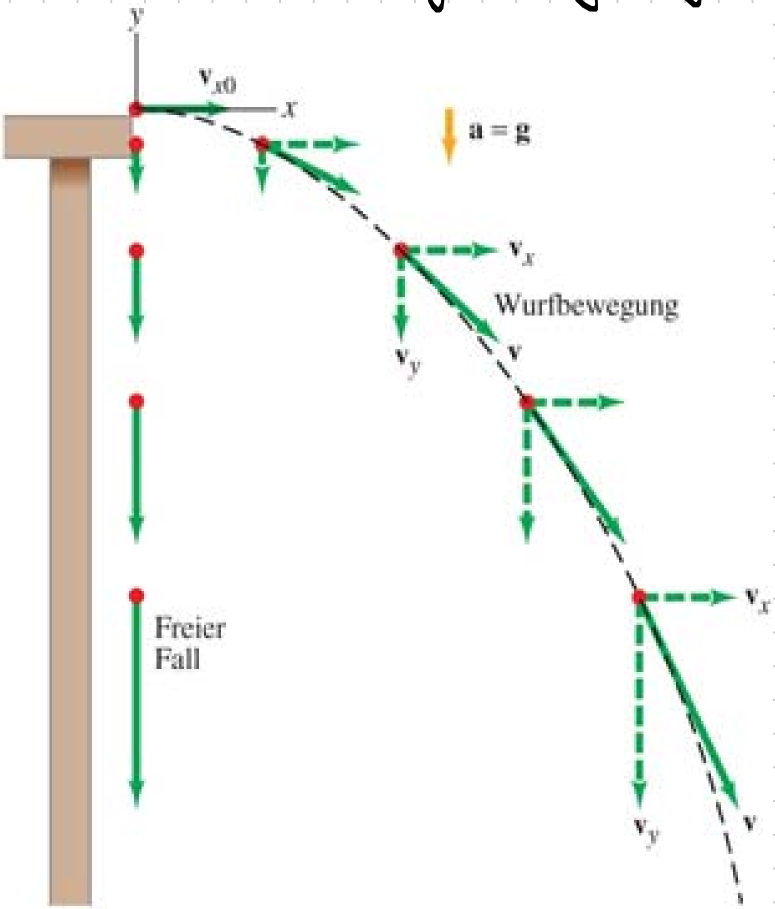
Ursprung
Bezugspunkt

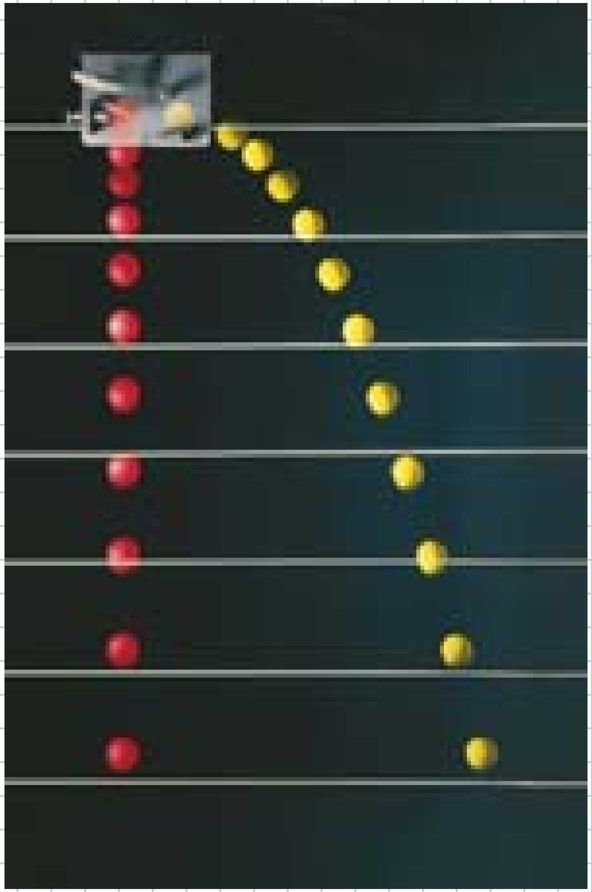
Geschwindigkeit
$\vec{v}$

Beispiel: beschleunigte Bewegung $\vec{F} = m \cdot \vec{g} = m \cdot \vec{a}$

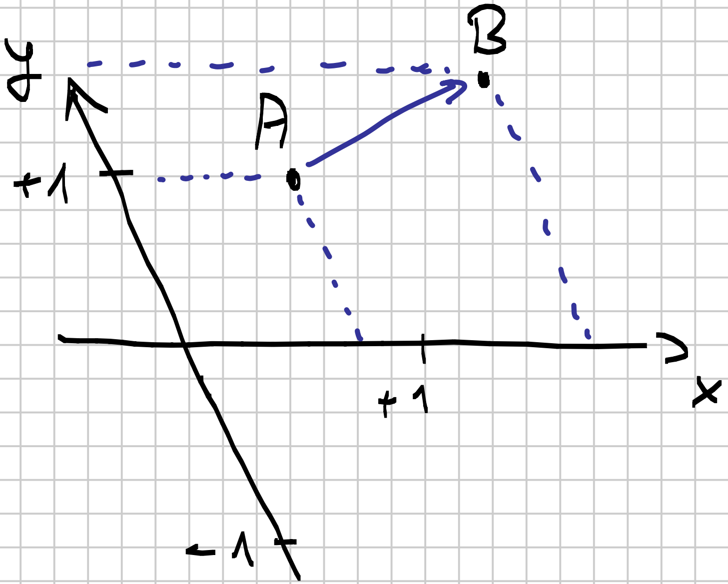
$F = mg$ in vertikaler Richtung $a_y = g$; $a_x = 0$







1.1 Koordinatensysteme

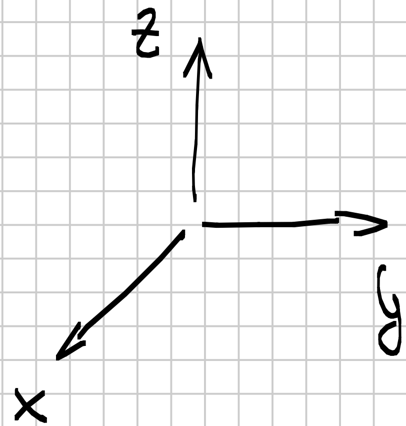


1) wähle willkürlich Ursprung

2) wähle Achsen, die nicht parallel sind

3) versehe Achsen mit Maßstab

Orthonormalsystem im 3 dim. Raum

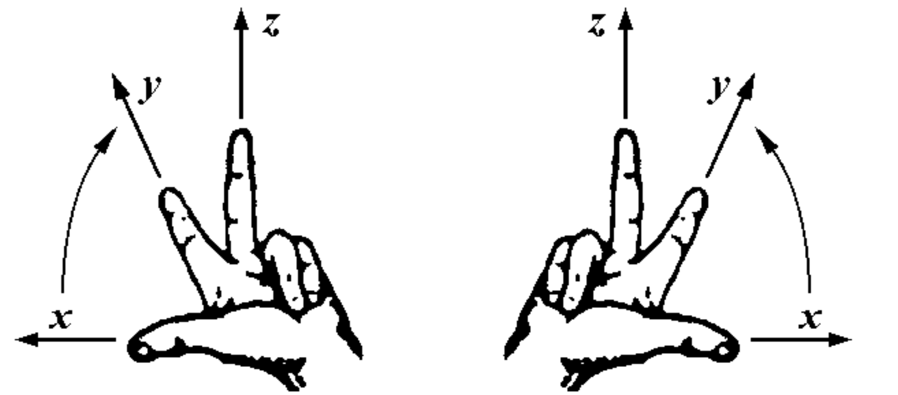


Achsen paarweise ⊥

gleiche Maßstäbe

rechtshändig

1.2. links- bzw. rechtshändige Koordinatensystem



Linkshändiges Koordinatensystem
Mathematisch negativer Drehsinn
= Geodätisch positiver Drehsinn

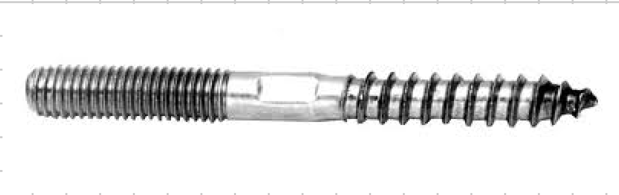
Rechtshändiges Koordinatensystem
Mathematisch positiver Drehsinn
= Geodätisch negativer Drehsinn

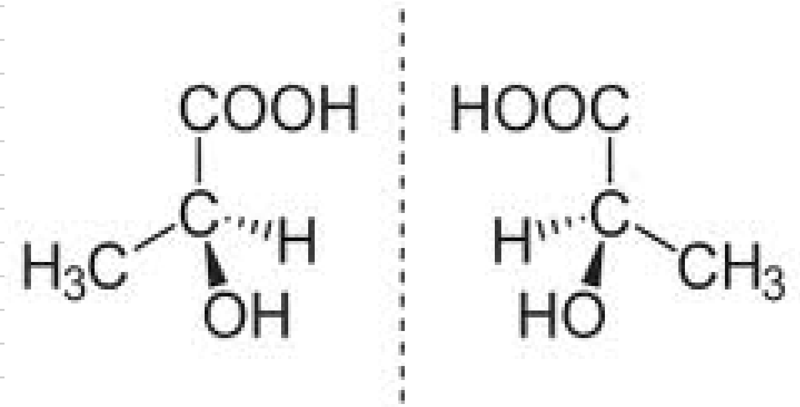
„Drehe x-	auf y-Achse":	z-Achse	dreht sich in	positiver	Richtung
y	z	x	"	positiver	"
z	x	y	"	positiver	"

Zyklischer Tausch: $x \to y \to z \to x$

Bsp: „Drehsinn“:

Rechts- / Linksgewinde



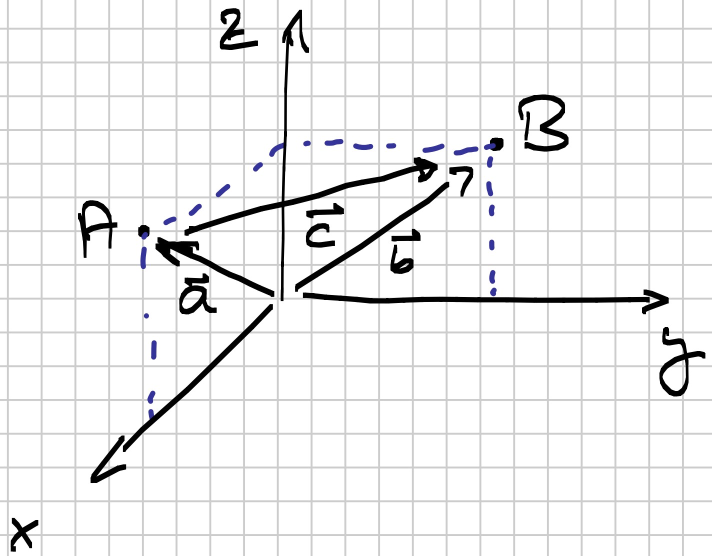


Enantiomere

rechts / links drehende

Milchsäure

1.3 Kartesisches Koordinatensystem



Koordinaten von A: $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{a}$

von B: $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{b}$

Vektor von A nach B: $\overrightarrow{AB} := \vec{c}$

Verschiebungsvektor: $\vec{c} = -\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Vektor definiert durch Länge & Richtung

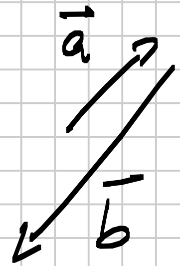
alle parallelen, gleichlangen „Pfeile" äquivalent

Vektor repräsentiert alle gleichlangen, parallelen Pfeile

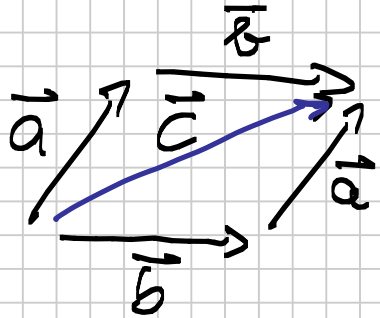
2) Rechnen mit Vektoren

2.1 Rechenregeln

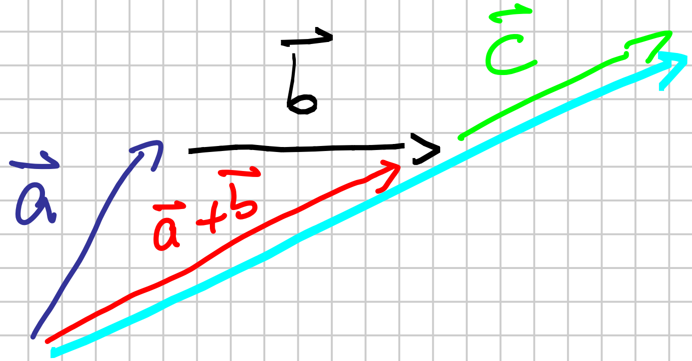
- Skalare Multiplikation $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$

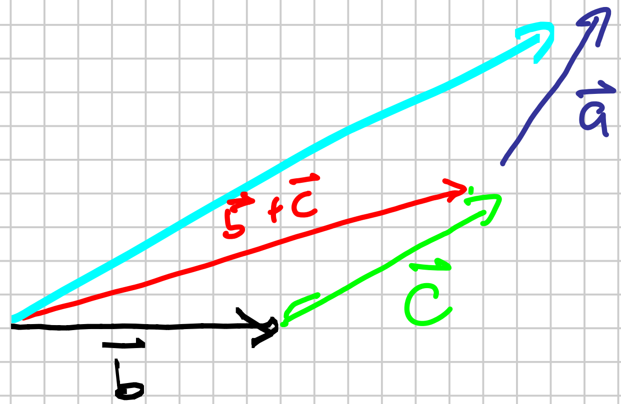


- Addition $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

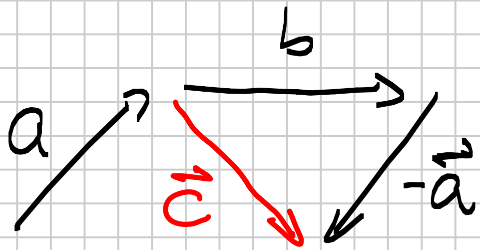


- Assoziativgesetz: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$





- Subtraktion:



$$\vec{c} = +\vec{b} - \vec{a}$$

Zusammenfassung: Axiom 1: $\vec{a}, \vec{b} \in V \longrightarrow \vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \in V$

Eigenschaften:
1) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
2) $\vec{a} + 0 = \vec{a}$
3) $\vec{a} - \vec{a} = 0$ Existenz von $-\vec{a}$
4) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

$\Rightarrow$ Menge der Vektoren in V bilden Abelsche Gruppe

Axiom 2: $\vec{a} \in V$; $\alpha \in \mathbb{R} \longrightarrow \alpha \vec{a} = \vec{c} \in V$

Eigenschaften:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ (\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{a} \\ 2)\ \alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \vec{a} + \alpha \beta \end{array}\right\} \text{Linearität}$$

3) $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$

4) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ Existenz des Einselements

$\Rightarrow$ Menge der Vektoren in V bilden linearen Raum

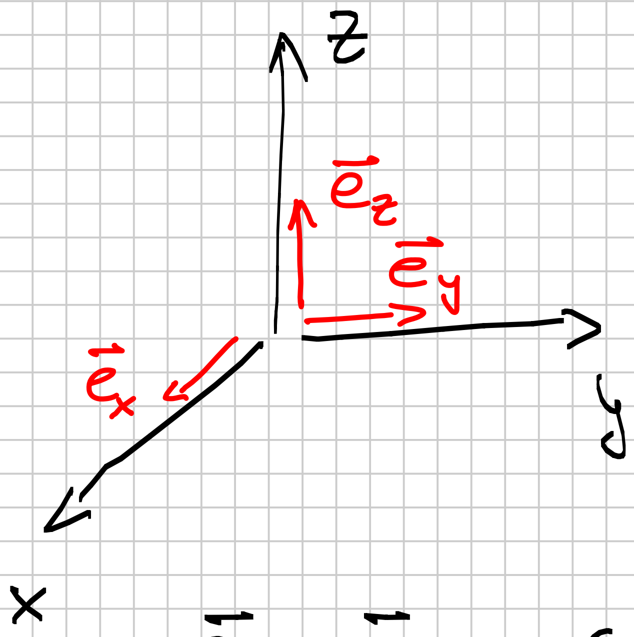
3) Basisvektoren

3.1. Einheitsvektoren

$\vec{e}$ mit $|\vec{e}| = 1$

Zu jedem $\vec{a}$ existiert eine Zahl α, so daß $|\alpha \cdot \vec{a}| = 1$.

$$\alpha = \frac{1}{|\vec{a}|} \Rightarrow |\alpha \cdot \vec{a}| = \left|\frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}\right| = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|} = 1$$



$$\vec{a}_1 = x_1 \vec{e}_x + y_1 \vec{e}_y + z_1 \vec{e}_z := \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_2 = x_2 \vec{e}_x + y_1 \vec{e}_y + z_2 \vec{e}_z := \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (x_1 + x_2) \vec{e}_x + (y_1 + y_2) \vec{e}_y + (z_1 + z_2) \vec{e}_z = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha \vec{a}_1 = \alpha (x_1 \vec{e}_x + y_1 \vec{e}_y + z_1 \vec{e}_z) = \begin{pmatrix} \alpha & x_1 \\ \alpha & y_1 \\ \alpha & z_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_x = 1 \vec{e}_x + 0 \vec{e}_y + 0 \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.2. Lineare Abhängigkeit:

Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots \vec{a}_n$ sind linear abhängig, wenn gilt

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots \alpha_n \vec{a}_n = 0 \quad \text{mit } \alpha_i \neq 0 \quad \forall i$$

Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots \vec{a}_n$ sind linear unabhängig, wenn gilt

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots \alpha_n \vec{a}_n = 0 \quad \text{mit } \alpha_i = 0 \quad \forall i$$

$\Rightarrow$ $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ sind linear unabhängig

$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, \vec{a}$ sind linear abhängig, denn

$$\vec{a} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z \quad \text{also}$$

$$\vec{a} - x\,\vec{e}_x - y\,\vec{e}_y - z\,\vec{e}_y = 0$$

Die Dimension eines Vektorraums (V) = max. Anzahl der l. u. Vektoren

$\Leftrightarrow$ l. u. Vektoren bilden Basis des Vektorraums