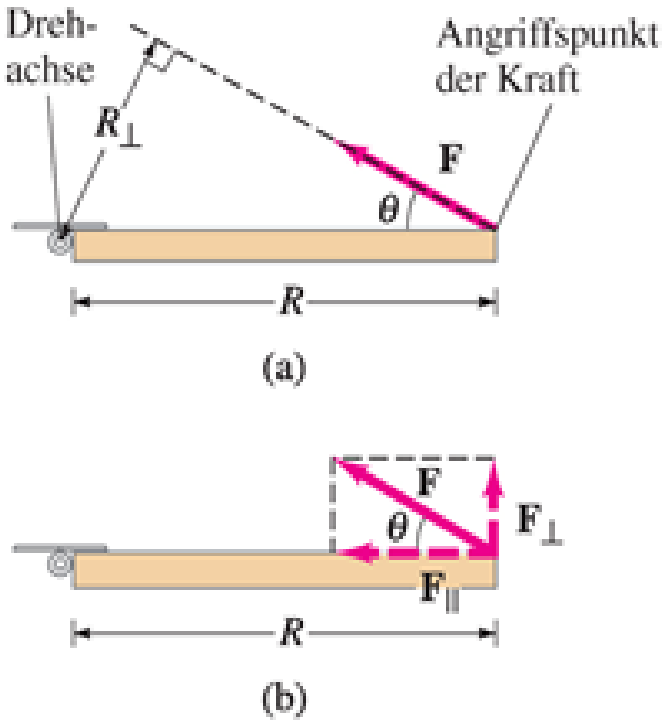
Notiztitel 05.09.2012

6) Vektorprodukt "äußeres Produkt": $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$



Drehmoment: $\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F}$

$$|\vec{M}| = |\vec{R}_\perp| \cdot |\vec{F}| = R_\perp \cdot F$$

$$= |\vec{R}| \cdot |\vec{F}_\perp| = R \cdot F_\perp$$

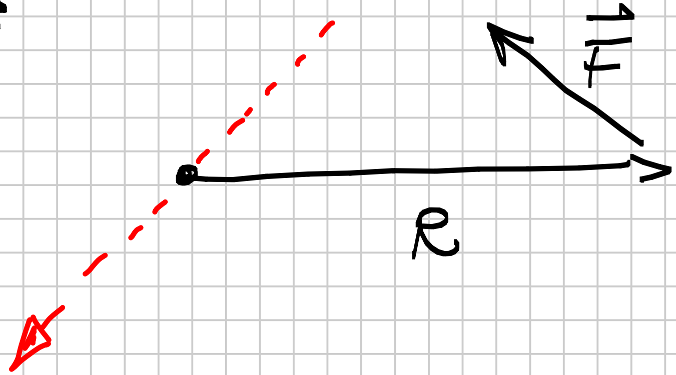
$$= R \cdot F \cdot \sin\theta$$

$$\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F}$$

$\vec{R}$ und $\vec{F}$

definieren

eine Ebene



Drehachse :

ausgezeichnete Richtung

senkrecht zu $\vec{R}$ und $\vec{F}$

$\perp$ zu $\vec{R}, \vec{F}$ - Ebene

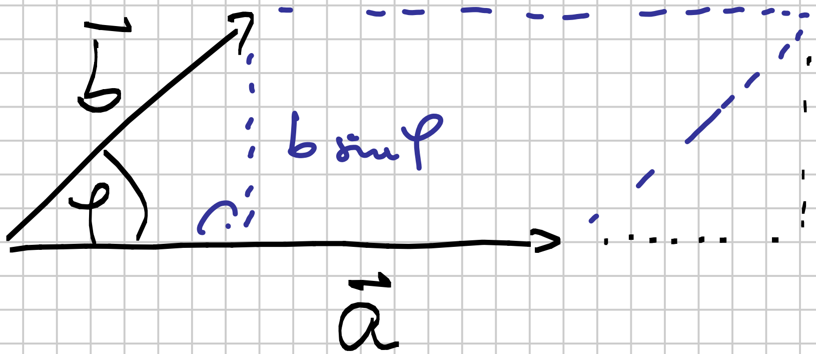
$$\vec{M} := \vec{R} \times \vec{F}$$

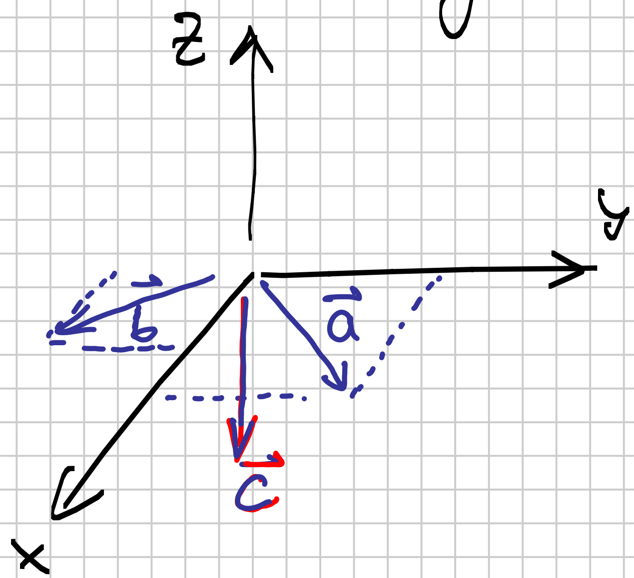
$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ mit

1) $c = a\,b\,\sin\varphi$ $\quad \varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

2) $\vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$

3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden ein rechtshändiges System





$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ $\quad |\vec{c}|$: Fläche des Parallelogramms

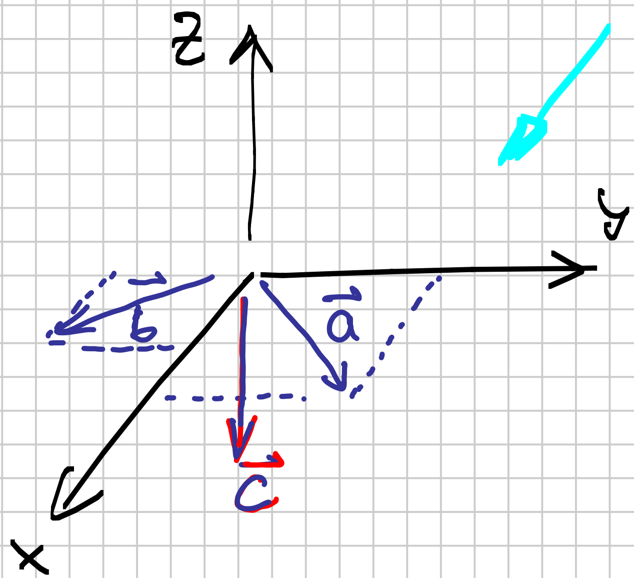
$\vec{a} \times \vec{b} = 0$ falls 1) $\vec{a} = 0$ oder $\vec{b} = 0$

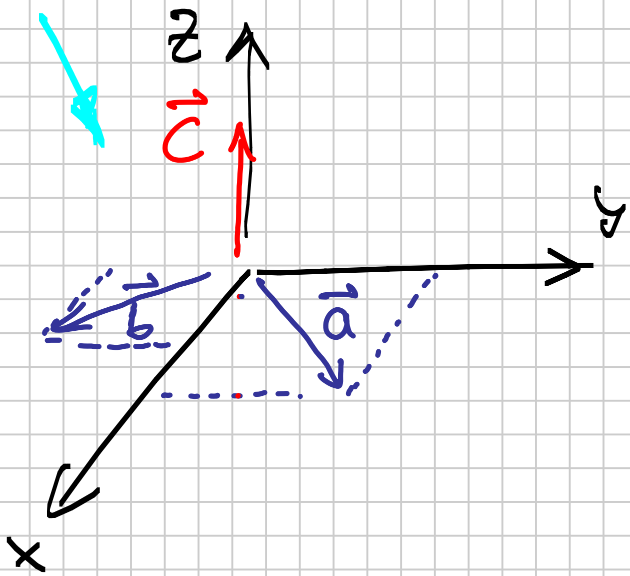
2) $\vec{b} = \alpha \vec{a}$ Parallele Vektoren

Spannen keine Fläche auf

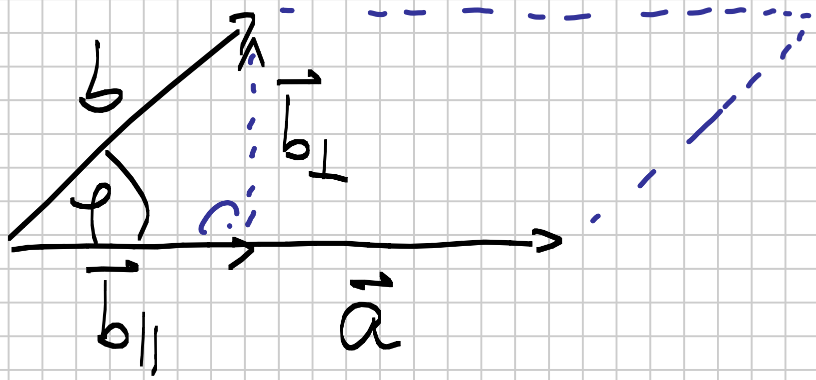
anti-kommutativ:

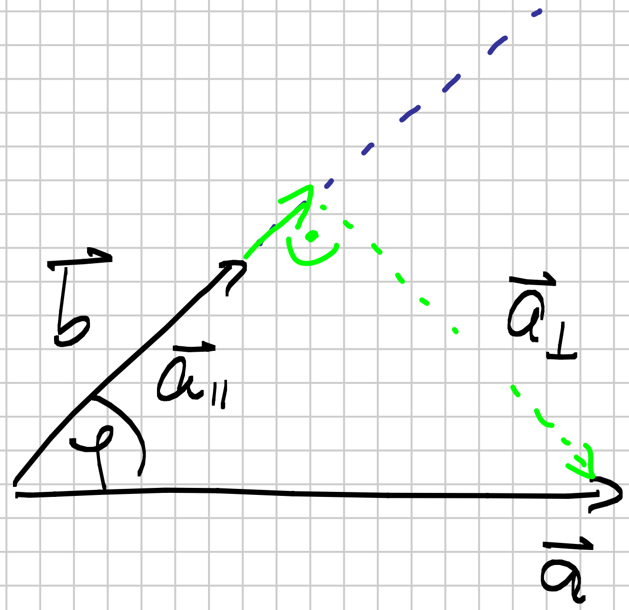
$$\vec{a} \times \vec{b} = - \vec{b} \times \vec{a}$$





$$\vec a \times \vec b = \vec a \times \vec b_\perp = \vec a_\perp \times \vec b = \vec c$$





$$\vec b = \vec b_\parallel + \vec b_\perp$$

$$|\vec b_\perp| = b \sin\varphi$$

$$|\vec a \times \vec b_\perp| = a\, b_\perp \sin 90^\circ$$

$$\vec a = \vec a_\parallel + \vec a_\perp$$

$$|\vec a_\perp| = a \cdot \sin\varphi$$

$$|\vec a_\perp \times \vec b| = a_\perp\, b \cdot \sin 90^\circ$$

$= a b_\perp = a b \sin\varphi \qquad \equiv \qquad a_\perp b = a b \sin\varphi$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times (\vec{b}_\perp + \vec{b}_\parallel) = \vec{a} \times \vec{b}_\perp + \underbrace{\vec{a} \times \vec{b}_\parallel}_{=0}$$

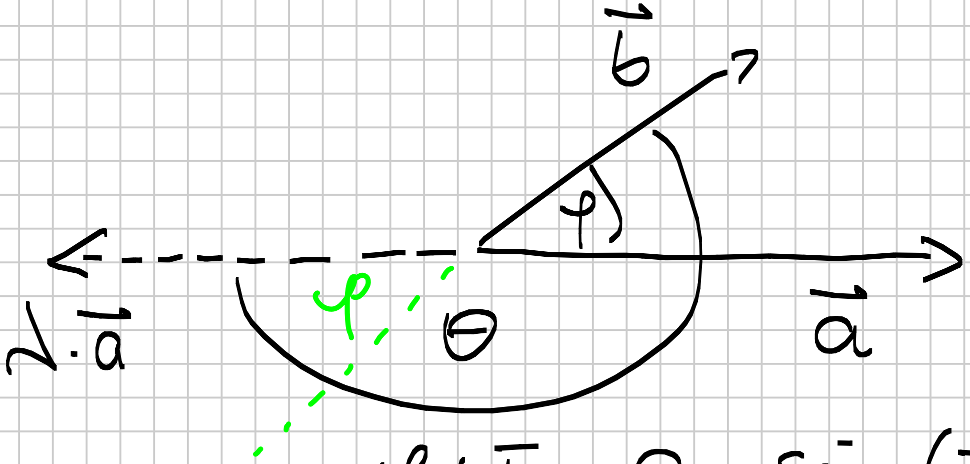
$$\vec{a} \times \vec{b} = (\vec{a}_\perp + \vec{a}_\parallel) \times \vec{b} = \vec{a}_\perp \times \vec{b} + \underbrace{\vec{a}_\parallel \times \vec{b}}_{=0}$$

Bilinearität $\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = a \times (\lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \times \vec{b})$

Beweis: $\lambda \geq 0$: $\quad \lambda \vec{a} \times \vec{b} = (\lambda a) b \sin\varphi = a (\lambda b) \sin\varphi$

$$= \lambda (a b \sin\varphi)$$

$\lambda < 0$: $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = \lambda \vec{c} = -|\lambda| \vec{c}$ mit $|\vec{c}| = ab\sin\varphi$



$(\lambda \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = (-|\lambda| \vec{a}) \times \vec{b} = -|\lambda| \vec{c}$

denn $|\lambda| \cdot ab\sin\Theta = -|\lambda| ab\sin\varphi$

$\varphi + \pi = \Theta \quad \sin(\pi + \varphi) = \sin\Theta = -\sin\varphi$

$\vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \vec{a} \times (-|\lambda| \vec{b}) = -|\lambda| \vec{c}$

denn $a|\lambda| b\sin\Theta = -|\lambda| ab\sin\varphi$

Distributivgesetz: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

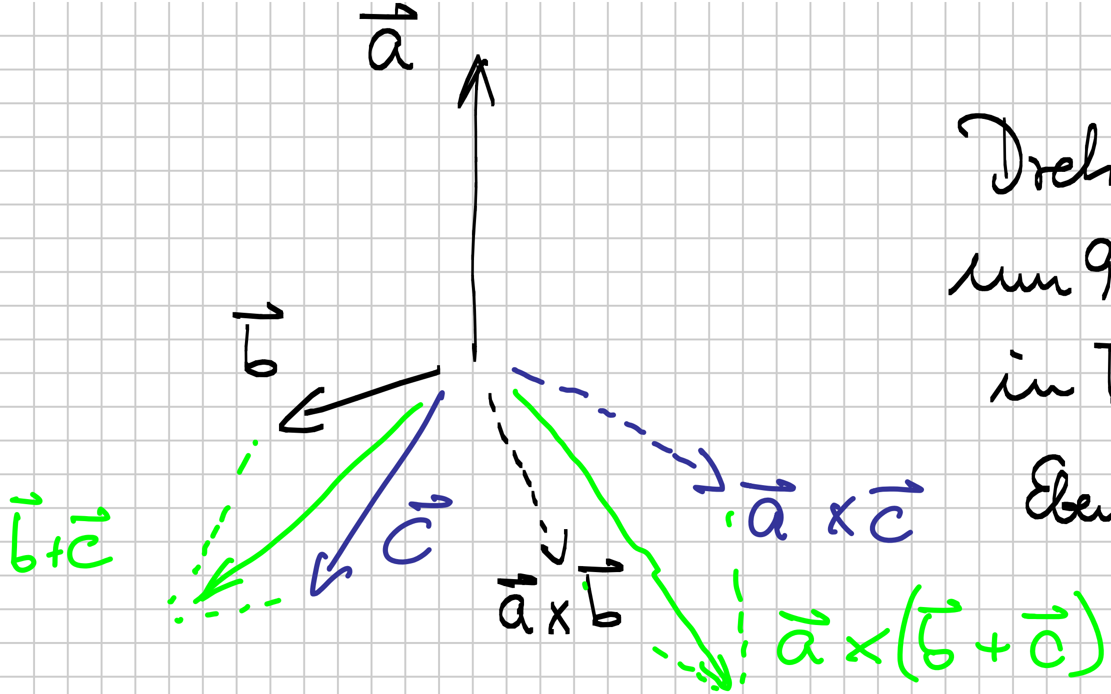
$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}_\perp$; $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c}_\perp$

$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})_\perp$ denn $\vec{b} + \vec{c} = (\vec{b} + \vec{c})_\parallel + (\vec{b} + \vec{c})_\perp$

ist möglich

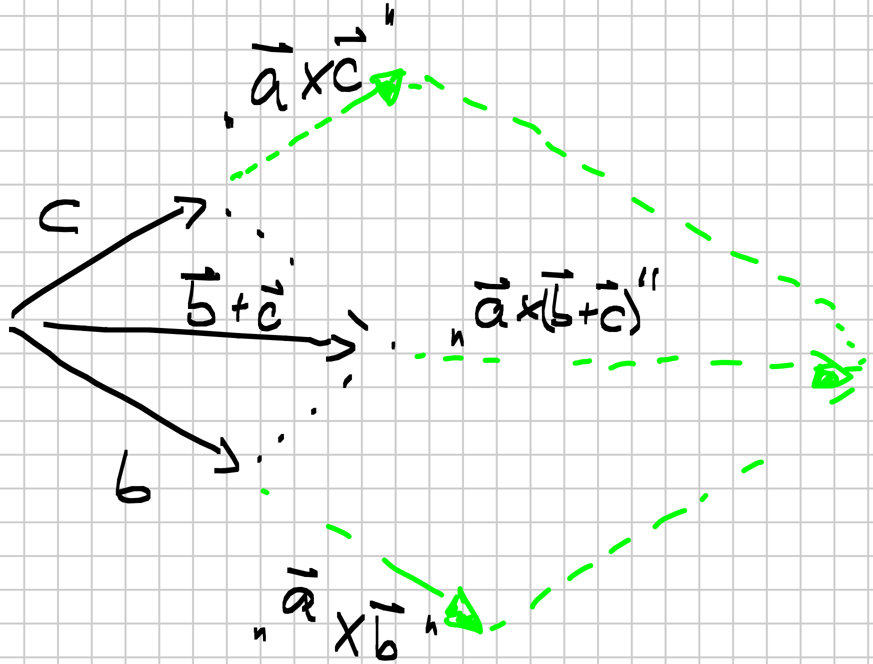
$\Rightarrow \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})_\perp = \vec{a} \times \vec{b}_\perp + \vec{a} \times \vec{c}_\perp$?

O.B.d.A. $\vec{b} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{a}$ sowie $(\vec{b} + \vec{c}) \perp \vec{a}$



Drehung um 90° in $\vec b, \vec c$ Ebene

$$= (\vec a \times \vec b) + (\vec a \times \vec c)$$

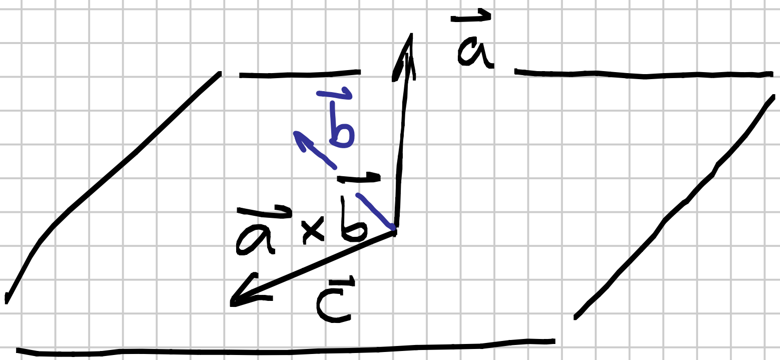


$\Longrightarrow$ gleiche Drehung aller Vektoren mit a!

$$\Rightarrow \quad \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \qquad \text{distributiv}$$

Ferner gilt $\vec{a} \times \vec{a} = 0$ da $\sin(0°) = 0$

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0 \quad \text{denn} \quad \vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \perp \vec{a}, \vec{b}$$



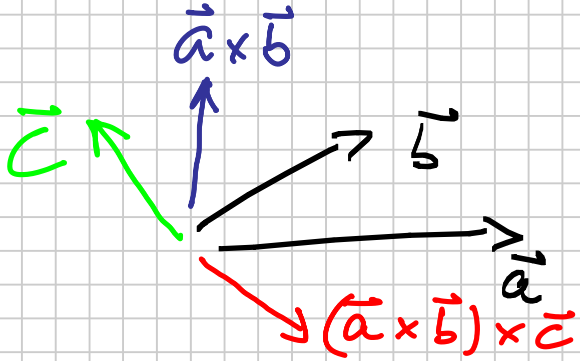
Ebene aller $\vec{a} \times \vec{b}$ Vektoren $\perp \vec{a}$

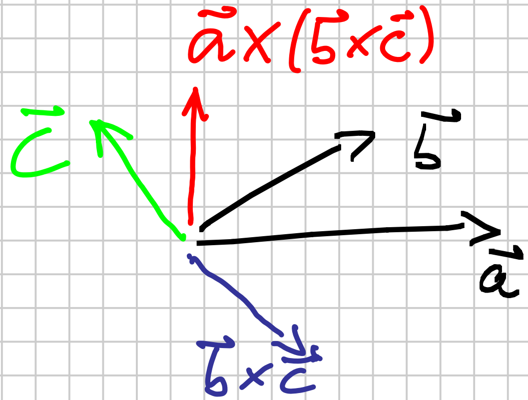
$\vec{a} \cdot \vec{c} = a\,c \cos\varphi = 0$

$\vec{b}\,\vec{c} = b\,c \cos\varphi = 0$

da $\cos 90° = 0$

Vektorprodukt ist nicht assoziativ: $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} \neq \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$





$\vec{a}\times\vec{b} \perp \vec{a},\vec{b}$ Ebene $\Rightarrow (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ liegt in $\vec{a},\vec{b}$ Ebene

$\vec{b}\times\vec{c} \perp \vec{b},\vec{c}$ Ebene $\Rightarrow \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ liegt in $\vec{b},\vec{c}$ Ebene

Ausnahme: $\vec{a}=0$, etc. oder $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=0 \Longleftrightarrow \vec{c}$ liegt auch in $\vec{a},\vec{b}$ Ebene

7. Rechnen mit Vektorprodukt in kartesischen Koordinaten

$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$; $\vec{e}_y \times \vec{e}_x = -\vec{e}_z$ denn $\vec{e}_j \perp \vec{e}_i$ für $i \neq j$

und $|\vec{e}_i| = 1$

$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ rechtshändig

allgemein:

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \begin{cases} \vec{e}_k & \text{für } i,j,k \text{ zyklisch} \\ -\vec{e}_k & \text{für } i,j,k \text{ antizyklisch} \end{cases}$$

zyklisch 1-2-3, 2-3-1, 3-1-2 x-y-z, y-z-x, ...

antizyklisch 1-3-2; 3-2-1, 2-1-3

Abkürzung: Levi-Civita Tensor ε_{ijk}

$$\varepsilon_{ijk} = \vec{e}_i \cdot (\vec{e}_j \times \vec{e}_k) = \begin{cases} 1 & \text{für } i,j,k \text{ zyklisch} \\ -1 & \text{für } i,j,k \text{ antizykl.} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

total antisymmetrischer Tensor 3. Stufe

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k$$

$$\vec a \times \vec b = \left(a_1 \vec e_1 + a_2 \vec e_2 + a_3 \vec e_3\right) \times \left(b_1 \vec e_1 + b_2 \vec e_2 + b_3 \vec e_3\right)$$

$$= a_1 b_1 \underbrace{(\vec e_1 \times \vec e_1)}_{0} + a_1 b_2 \underbrace{(\vec e_1 \times \vec e_2)}_{\vec e_3} + a_1 b_3 \underbrace{\vec e_1 \times \vec e_3}_{-\vec e_2}$$

$$+ a_2 b_1 \underbrace{(\vec e_2 \times \vec e_1)}_{-\vec e_3} + a_2 b_2 \underbrace{(\vec e_2 \times \vec e_2)}_{0} + a_2 b_3 \underbrace{(\vec e_2 \times \vec e_3)}_{+\vec e_1}$$

$$+ a_3 b_1 \underbrace{(\vec e_3 \times \vec e_1)}_{\vec e_2} + a_3 b_2 \underset{-\vec e_1}{(\vec e_3 \times \vec e_2)} + a_3 b_3 \underbrace{(\vec e_3 \times \vec e_3)}_{0}$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)\, \vec{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\, \vec{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, \vec{e}_3$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}}$$

zyklisch

– antizyklisch

Konstruktion:

$$\left| \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \right| \begin{matrix} e_1 & e_2 \\ a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{matrix} = \vec{e}_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) + \vec{e}_2 (a_3 b_1 - a_1 b_3) + \vec{e}_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) = a_i \vec{e}_i \times b_j \vec{e}_j = a_i b_j \, \vec{e}_i \times \vec{e}_j$$

$$= a_i b_j \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k = c_k \vec{e}_k$$

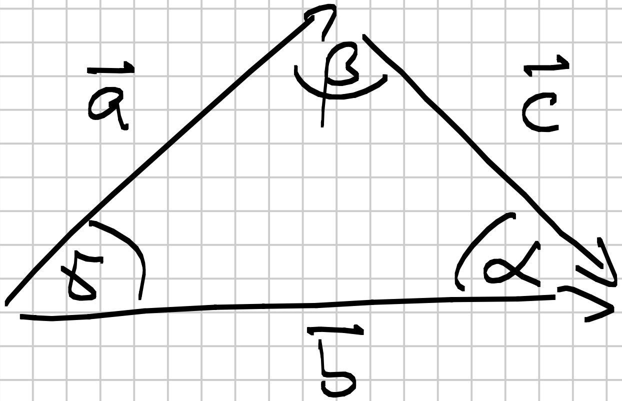
mit $c_k = \varepsilon_{ijk} a_i b_j = \sum_{i,j=1}^{3} a_i b_j \varepsilon_{ijk}$

$c_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2$

$c_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3$

$c_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1$

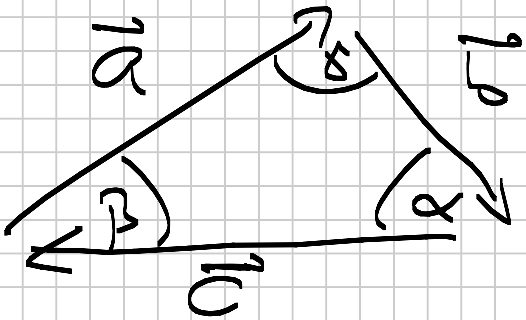
7.1. Cosinussatz und Sinussatz:



$$\vec c = -\vec a + \vec b = \vec b - \vec a$$

$$\vec c^{\,2} = c^2 = (\vec b - \vec a)^2 = b^2 + a^2 - 2\vec a\vec b$$

$$\underline{c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\gamma}$$



$$\vec a + \vec b + \vec c = 0$$

$$\vec a \times \vec b = \vec a \times (0 - \vec c - \vec a) = -\vec a \times \vec c - \overbrace{\vec a \times \vec a}^{=0}$$

$$= \vec c \times \vec a$$

andererseits $\vec{a} \times \vec{b} = (-\vec{c} - \vec{b}) \times \vec{b} = -\vec{c} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c}$

$\Rightarrow \underline{\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}}$

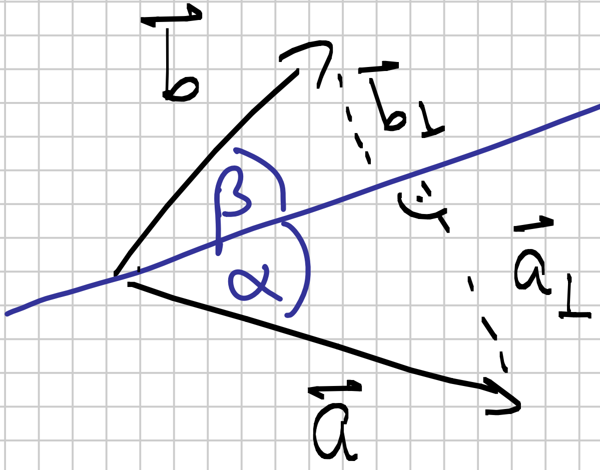
oder $ab \sin(180 - \gamma) = bc \sin(180 - \alpha) = ac \sin(180 - \beta)$

weg $\sin(180 - \varphi) = \sin \varphi$

$$ab \sin \gamma = bc \sin \alpha = ac \sin \beta \quad | : abc$$

$\frac{\sin \gamma}{c} = \frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b}$ oder $\underline{\frac{c}{\sin \gamma} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin \alpha}}$

7.2 Additionstheoreme:



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a\,b\,\cos(\alpha+\beta) = (\vec{a}_\parallel + \vec{a}_\perp)(\vec{b}_\parallel + \vec{b}_\perp)$$

$$= a_\parallel b_\parallel - a_\perp b_\perp$$

$$= a\cos\alpha\, b\cos\beta - a\sin\alpha\, b\sin\beta$$

$$\underline{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = a\,b\,\sin(\alpha+\beta) = (\vec{a}_\parallel + \vec{a}_\perp)\times(\vec{b}_\parallel + \vec{b}_\perp)$$

$$= a_\parallel b_\perp + a_\perp b_\parallel = ab\cos\alpha\sin\beta + ab\sin\alpha\cos\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$$

7.3. Entwicklungssatz: „bac – cab" Regel

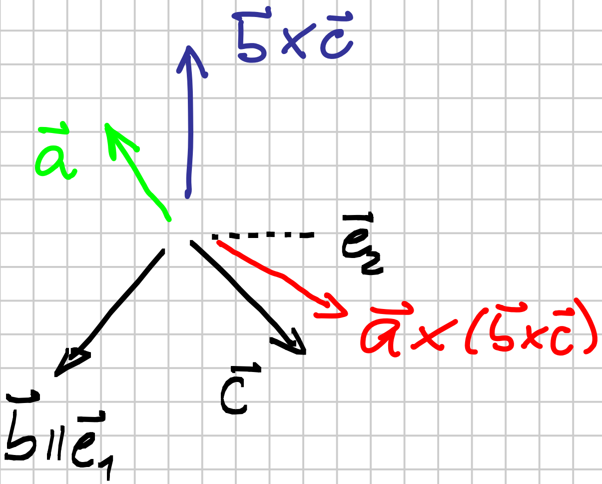
$$\vec p = \vec a \times (\vec b \times \vec c) = \vec b(\vec a\cdot\vec c) - \vec c(\vec a\,\vec b) = \underbrace{\beta\,\vec b + \gamma\,\vec c = \vec p}_{\vec p \text{ liegt in } \vec b,\vec c \text{ Ebene}}$$

$$\vec p \perp \vec a \Rightarrow \vec p\cdot\vec a = 0 = \beta\,\vec b\cdot\vec a + \gamma\,\vec c\,\vec a$$

$$\text{Sei } \alpha := \frac{\beta}{\vec a\,\vec c} \Rightarrow \gamma = -\frac{\beta}{\vec c\cdot\vec a}\,\vec b\cdot\vec a = -\alpha\,\vec b\,\vec a$$

$$\Rightarrow \vec p = \beta\,\vec b + \gamma\,\vec c = \alpha\left[\vec b(\vec a\,\vec c) - \vec c\,(\vec a\,\vec b)\right] = \vec a\times(\vec b\times\vec c)$$

Sei $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \neq 0$ und $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq 0$



Wähle $\vec{e}_1 \parallel \vec{b}$ und $\vec{e}_2$ in b, c-Ebene

also $\vec{b} = b\,\vec{e}_1$ und $\vec{c} = c_1 \vec{e}_1 + c_2 \vec{e}_2$

$$\Rightarrow \vec{b} \times \vec{c} = b\, c_2 \cdot \vec{e}_3$$

$$\Rightarrow \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = b\, c_2 (\vec{a} \times \vec{e}_3) = b c_2 \Big(a_1 \underbrace{\vec{e}_1 \times \vec{e}_3}_{-\vec{e}_2} + a_2 \underbrace{\vec{e}_2 \times \vec{e}_3}_{+\vec{e}_1} + a_3 \overset{0}{\overset{\parallel}{\vec{e}_3 \times \vec{e}_3}}$$

$$= \begin{pmatrix} b c_2 a_2 \\ -b c_2 a_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Andererseits:

$$\alpha\left[\vec{b}\,(\vec{a}\,\vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a}\,\vec{b})\right] = \alpha\left[b\,\vec{e}_1\,(a_1 c_1 + a_2 c_2) - (c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2)(a_1 b)\right]$$

$$= \alpha\left[\vec{e}_1(b a_{\cancel{1}} \cancel{c_1} + a_2 c_2 b - \cancel{a_1 c_1 b}) - a_1 c_2 b\,\vec{e}_2\right]$$

$$= \alpha\begin{pmatrix} a_2 c_2 b \\ a_1 c_2 b \\ 0 \end{pmatrix} \curvearrowright \alpha = 1$$

$\Rightarrow$ Entwicklungssatz gilt:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$$