9.2. Determinanten

Notiztitel 06.09.2012

Hilfsmittel zur Berechnung der inversen Matrix, Lsg linearer Gleichungssysteme

QM: Symmetrie der Wellenfkt

Determinante von $A = (a_{ij})$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ & & & \\ a_{n1} & \dots & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} - a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} - \dots a_{1n} A_{1n}$$

(Entwicklung nach 1. Zeile)

Mit A_{ke} der Unterdeterminante:

$$A_{kl} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kl} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nl} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Streichen der k-ten Zeile und l-ten Spalte aus $|A|$

Bsp.: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}\, a_{21}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\,(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}\,(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})$$
$$+ a_{13}\,(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$
$$- a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31}$$
$$+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Rechenschema: Jeder Summand besteht aus 3 Faktoren (3×3 Matrix)

Jeder Summand erhält aus jeder Zeile genau einen Faktor

" " jeder Spalte genau "

Es treten alle Permutationen (Vertauschungen) auf: $3! = 6$

Vertauschung der Indizes j_1, j_2, j_3 im Produkt $a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot a_{3j_3}$

geht aus der natürlichen Reihenfolge 1, 2, 3

aus einer geraden oder ungeraden Anzahl P

von Vertauschungen hervor: Vorzeichen $(-1)^P$

$\Rightarrow$ Definition der Determinante:

$$|A| := \sum_P (-1)^P a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

Summation über alle $n!$ Permutationen von $j_1\ j_2\ j_3 \cdots j_n$ der Spaltenindizes aus $1, 2, 3, \dots n$.

Sarrus'sche Regel $(n=3)$:

$$|a_{ij}| = + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Entwicklungssatz von Laplace:

Entwicklung von $|A|$ nach der i-ten Zeile:

$$\mathrm{Det}(A) = |A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij} = \boxed{\sum_{i=1}^{n} a_{ij} U_{ij} = \det(A)}$$

mit Unterdeterminante A_{ij}

Entwicklung nach der j-ten Spalte:

$$\mathrm{Det}(A) = |A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij} = \boxed{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} U_{ij} = \det(A)}$$

Mit $\underline{\underline{U_{ij} := (-1)^{i+j} A_{ij}}}$ „algebraisches Komplement"

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Unterdeterminante

$$A_{11} = \det(\quad)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Unterdeterminante

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(\quad)$$

Nutzen:

Entwicklung sinnvollerweise nach Spalte oder Zeile mit den meisten Nullen.

9.3. Rechenregeln für Determinanten

- Multiplikation einer Zeile:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \lambda a_{i1} & \cdots & \lambda a_{in} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Entwicklung nach i-ter Zeile:

$$\det(\tilde{A}) = \lambda \cdot \det(A)$$

$$\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \det(A)$$

- Addition einer Zeile (aus Entwicklungssatz nach 1. Zeile):

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21} & & \vdots \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Vertauschen benachbarter Zeilen $\Rightarrow$ Vorzeichenwechsel

  folgt aus Entwicklungssatz wegen $(-1)^{i+j}$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = bc - ad$$

- sind 2 Zeilen identisch, dann ist $\det(A)=0$

  vertausche benachbarte Zeilen solange bis identische Zeilen benachbart sind, vertausche diese $\Rightarrow \det(A) = -\det(A) = 0$

- Addition von Zeilen

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1}+\lambda a_{j1} & \cdots & \\ a_{j1} & & a_{jn} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \lambda \underbrace{\det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \end{pmatrix}}_{=0}$$

Multiplikationstheorem: $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

Transponierte Matrix: $\det(A^T) = \det A$

Dreiecksmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdots a_{nn}$$

folgt auch aus Entwicklungssatz für die letzte Zeile, der $(n-1)$ fach angewendet wird.

Einheitsmatrix:

$E = \mathbb{1}$ $\qquad \det \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = 1$

- inverse Matrix $\quad A^{-1} \cdot A = E$

$$\det(A^{-1}) \cdot \det(A) = \det(E) = 1$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

Umkehrung (ohne Beweis):

Falls $\det A \neq 0$ existiert A^{-1}, sodaß $A^{-1} \cdot A = E$