Notiztitel 06.09.2012

10. Lineare Gleichungssysteme

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} x_2 + \dots \quad a_{1n} x_n = b_1$$

$$a_{21} x_1 + \dots \quad a_{2n} x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{n1} x_1 + \dots \quad a_{nn} x_n = b_n$$

Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

homogenes Gleichungssystem für $b_1 = b_2 = b_{\dots} = b_n = 0$

ansonsten inhomogen

10.1a) inhomogene Gleichungssysteme

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \right| \cdot U_{ik}$$

Multiplikation mit algebraischem Komplement

U_{ik} (für ein festes k) und summiere über alle Zeilen i:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j U_{ik} = \sum_{i=1}^{n} b_i U_{ik}$$

Reihenfolge kann getauscht

$$\sum_{i} \sum_{j} \dots = \sum_{j} \sum_{i} \dots$$

werden.

$$\sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} U_{ik}\right)} \cdot x_j = \sum_{i=1}^{n} b_i U_{ik}$$

$= \det(A)$ für $j = k$ $\Rightarrow$ Es gibt nur <u>einen</u> Summanden in $\sum_j$, nämlich den für $j = k$

$= 0$ für $j \neq k$

$\Rightarrow$ $\sum_j$ entfällt!

Matrix $\tilde{A}$ sei identisch mit A, aber Spalte k durch Spalte j ersetzt $\Rightarrow \det(\tilde{A}) = 0$, da 2 identische Spalten vorhanden

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ik} U_{ik} x_k} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} b_i U_{ik}}$$

$$\begin{array}{cc} & \text{k-te Spalte:} \\ \tilde{A}_k = & \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$$

$\det(A)$ $\qquad\qquad$ $\det(\tilde{A}_k)$ $\qquad\qquad$ $\underbrace{\qquad\qquad}_{\tilde{a}_{ik} = b_i}$

Matrix $\tilde{A}_k$ identisch mit A, Spalte k wird jedoch durch b ersetzt:

$$\tilde{a}_{ik} = b_i \quad \Rightarrow \quad \det(\tilde{A}_k) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_{ik} U_{ik} = \sum_{i=1}^{n} b_i U_{ik}$$

$\Rightarrow \det(A) \cdot x_k = \det(\tilde{A}_k)$ (Entwicklung nach k-ter Spalte von $\tilde{A}_k$)

$$\Rightarrow \quad \boxed{x_k = \frac{\det(\tilde{A}_k)}{\det(A)}}$$

$\Rightarrow$ 1) inhomogenes lineares Gleichungssystem nur lösbar, wenn $\det(A) \neq 0$

2) Lösung $(x_1 \dots x_n)$ ergibt sich durch $x_k = \frac{\det(\tilde{A}_k)}{\det(A)}$

für $k = 1, \dots n$. Dabei ergibt sich $\tilde{A}_k$ aus A

indem die k-te Spalte a_{jk} durch b_j $(j = 1, \dots n)$ ersetzt wird.

Bsp: $x_1 + x_2 + x_3 = 2$

$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$

$5x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 5 & -3 \end{matrix}$$

$$\det(A) = 2 + 5 - 9 - (10 - 3 + 3) = -12$$

$$\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 0 & -3 \end{matrix} \qquad \det(A_1) = 4 - 12 - (-6 + 4) = -6$$

$$\tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{matrix} \qquad \det(\tilde{A}_2) = 4 + 10 - (20 + 6) = -12$$

$$\tilde{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 5 & -3 \end{matrix} \qquad \det(\tilde{A}_3) = 20 - 18 - (20 - 12) = -6$$

$$x_1 = \frac{-6}{-12} = \frac{1}{2} \qquad x_2 = 1 \qquad x_3 = +\frac{1}{2}$$

10.1b homogenes Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

mit $b_1 = b_2 = \dots b_n = 0$

$\Rightarrow \det(\hat{A}_k) = 0 \quad \forall k = 1, \dots n \quad \Rightarrow x_k \det(A) = 0$

Falls $\det(A) \neq 0 \Rightarrow x_k = 0 \quad \forall k$

Falls $\det(A) = 0 \Rightarrow$ nicht-triviale Lsg

$\det(A) = 0 \iff l = n - m$ Spalten (Zeilen) ergeben sich aus Linearkombination der anderen $m = n - l$ Spalten (Zeilen)

Umsortieren:

$$
\begin{array}{ccccccc}
a_{11} x_1 + \dots & a_{1m} x_m & = & -(& a_{1m+1} x_{m+1} + \dots & a_{1n} x_n &) \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
a_{m1} x_1 + \dots & a_{mm} x_m & = & -(& a_{mm+1} x_{m+1} \dots & a_{nn} x_n &)
\end{array}
$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & & a_{mm} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{A}}'} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}}_{\underline{x}'} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\underline{b}'} \quad \text{mit } b_i = -\sum_{j=m+1}^{n} a_{ij} x_j$$

Mit $\det(A') \neq 0$ gilt $x'_k = \dfrac{\det(\tilde{A}'_k)}{\det A'}$ $\quad k = 1, \dots m$

$\tilde{A}'_k$ ergibt sich aus A' durch Ersetzen der Spalte k durch $\vec{b}$.

Lsg enthält frei wählbare Parameter $x_{m+1}, \dots x_n$.

Bsp:

$$x_1 + 4x_2 - x_3 = 0$$
$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$$
$$4x_1 + 16x_2 - 4x_3 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 16 & -4 \end{pmatrix} \quad \times 4$$

$$\det(A) = 0$$

Umschreiben:

$$x_1 + 4x_2 = x_3$$
$$2x_1 - 3x_2 = -x_3$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad \det(A') = -11$$

$$\tilde{A}'_1 = \begin{pmatrix} x_3 & 4 \\ -x_3 & -3 \end{pmatrix} \qquad \det \tilde{A}'_1 = -3x_3 + 4x_3 = x_3$$

$$\tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & x_3 \\ 2 & -x_3 \end{pmatrix} \qquad \det \tilde{A}'_2 = -x_3 - 2x_3 = -3x_3$$

$$\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \quad x_1 = \frac{x_3}{-11}, \qquad x_2 = +\frac{3x_3}{11}$$

10.2. Die inverse Matrix: $A^{-1} = (a_{ij})^{-1} = (b_{ij})$

$$A \cdot A^{-1} = E \iff \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk} = \delta_{ik}$$

algebraisches Komplement:

Benutze:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, U_{ij} \quad \text{mit } U_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$$

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, U_{kj}}_{\det(\hat{A})} = \delta_{ik} \cdot \det(A) = \begin{cases} \det(A) & \text{für } k = i \\ 0 & \text{für } k \neq i \end{cases}$$

$i \neq k$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ i\text{-te Zeile} \\ k\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \end{array}$$

gleiche Zeilen $\det(\hat{A}) = 0$

$i = k$

$\hat{A} = A$ mit $\det(A) \neq 0$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{u_{kj}}{\det(A)} = \delta_{ik} \quad \text{vgl.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = \delta_{ik}$$

$$\Longrightarrow \quad b_{jk} = \frac{U_{kj}}{\det(A)} = \boxed{\frac{(-1)^{k+j}\, A_{kj}}{\det(A)} = b_{jk}}$$

Berechnung der Elemente der inversen Matrix

Bsp: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \det(A) = ad - bc$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} (-1)^2 d & (-1)^3 b \\ (-1)^3 c & (-1)^4 a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} A = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} ad-bc & db-bd \\ -ca+ca & -cb+ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10.3. Lineare Gleichungen in Matrizenschreibweise:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{b} \quad \text{oder} \quad \underline{\underline{A}}\ \underline{x} = \underline{b}$$

1) Sei $\det(A) \neq 0 \iff \exists\ \underline{\underline{A}}^{-1}$ mit $\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}}\ \underline{x} = \underline{\underline{\underline{x} = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{b}}}}$$

2) Sei $\det(A) \neq 0$ und $\vec{b} = 0 \implies \underline{\underline{\vec{x} = 0}}$

3) $\det(A) = 0$ und $\vec{b} = 0$:

Umschreiben: $\underline{A}' \underline{x}' = -\underline{\underline{A}}'' \underline{x}''$ mit $\det(A') \neq 0$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_{1m+1} & \cdots & a_{1n} \\ & & \\ a_{m\,m+1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$(m \times m) \cdot (m \times 1) \qquad (m \times (n-m)) \cdot ((n-m) \times 1)$$

$$\exists \; \underline{\underline{A}}'^{-1} \text{ mit } \underline{\underline{A}}'^{-1} \cdot \underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{E}}$$

$$\Rightarrow \underline{x}' = \underline{\underline{A}}'^{-1} \cdot \underline{\underline{A}}'' \, \underline{x}''$$

$$(m \times 1) = (m \times m) \cdot (m \times (n-m)) \cdot ((n-m) \times 1)$$