Notiztitel 07.09.2012

11) Krummlinige Koordinaten

Ortsvektor $\vec{r}$ in kartesischen, ortsunabhängigen Koordinaten

$$\vec{r} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Sei $\vec{r}(t)$ eine Bahnkurve

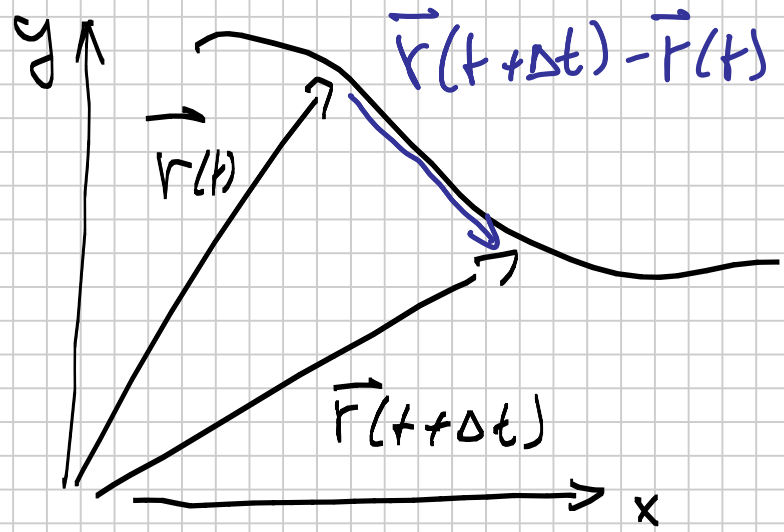
$$r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = x(t)\,\vec{e}_x + y(t)\,\vec{e}_y + z(t)\,\vec{e}_z$$

dann ergibt sich durch Ableitung nach der Zeit die

Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r}(t)\right) := \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z$$ da $\vec{e}_i$ ortsunabh.

(konstant)



Differentiation:

$$\frac{d\vec{r}}{dt}(t) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}$$

$$= \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

Eindruck:

Analog für die Beschleunigung $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

Umkehrung: $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}(\tau)\, d\tau$

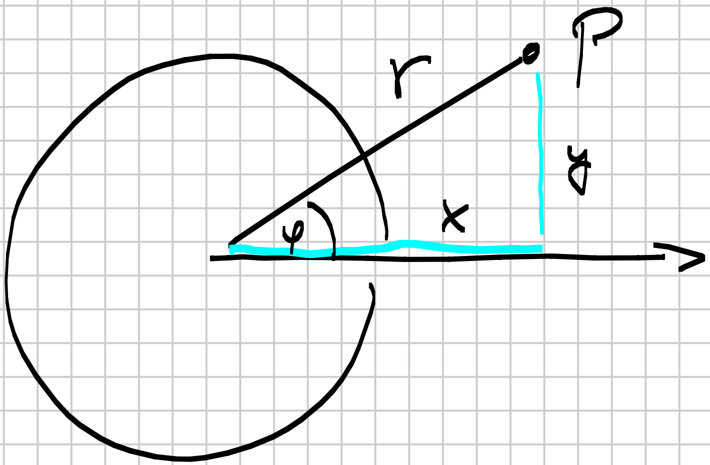
Integration

mit $\int_0^t \vec{v}(\tau)\, d\tau = \vec{e}_x \int_0^t v_x(\tau)\, d\tau + \vec{e}_y \int_0^t v_y(\tau)\, d\tau + \vec{e}_z \int_0^t v_z(\tau)\, d\tau$

und $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(\tau)\, d\tau$

1.1. Ebene Polarkoordinaten

Betrachte Kreisbewegung (Planetenbahn):



Kartesische Koord. Polarkoordinaten

x, y r, φ

Darstellung der Ebene durch zwei Parameter

Transformationsgleichungen $x = r \cos\varphi$ $0 < r < \infty$

$y = r \sin\varphi$ $0 \leq \varphi < 2\pi$

Umkehrung: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

Betrachte gleichförmige Kreisbewegung:

$r(t) = r_0 = \text{const.}$; $\varphi(t) = \omega \cdot t$ einfache Darstellung

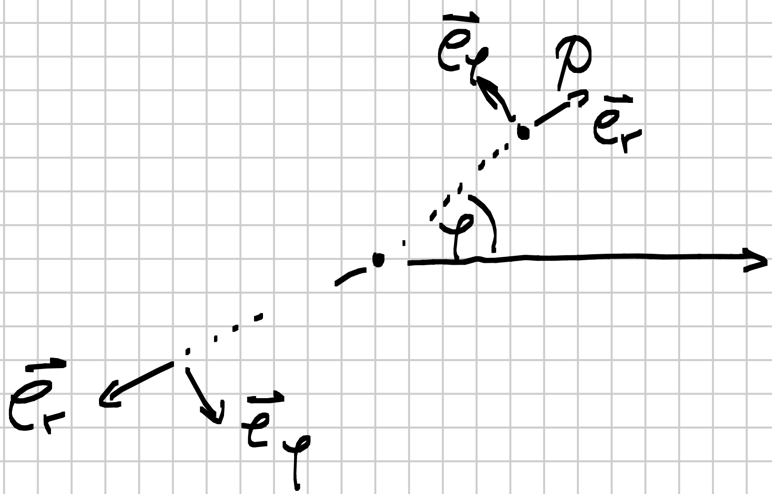
Gleichförmige geradlinige Bewegung in Polarkoord.

$$r(t) = \left(r_0^2 + 2 v r_0 t \cos(\alpha - \varphi_0) + v^2 t^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\varphi(t) = \arctan\left(\frac{vt \sin\alpha + r_0 \sin\varphi_0}{vt \cos\alpha + r_0 \cos\varphi_0}\right)$$

„komplizierte Darstellung"

ortsabhängige Basisvektoren:



$$\vec{r} = r\cos\varphi \cdot \vec{e}_x + r\sin\varphi\,\vec{e}_y$$

Koordinatentransformation:

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{e}_r &= \cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi &= -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y\end{aligned}}$$

$$\begin{pmatrix}\vec{e}_r \\ \vec{e}_\varphi\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}}^{T}\begin{pmatrix}\vec{e}_x \\ \vec{e}_y\end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \vec{e}_x &= \cos\varphi\, \vec{e}_r - \sin\varphi\, \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_y &= \sin\varphi\, \vec{e}_r + \cos\varphi\, \vec{e}_\varphi \end{aligned}}$$

lokale Basis $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi$

Basis ist ortsabhängig:

$\vec{e}_r = \vec{e}_r(\varphi) \quad \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi(\varphi)$

Betrachte

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}(r \cdot \vec{e}_r) = \left(\frac{d}{dt} r\right) \cdot \vec{e}_r + r \left(\frac{d}{dt} \vec{e}_r\right)$$

$$= \dot{r}\, \vec{e}_r + r\, \dot{\vec{e}}_r$$

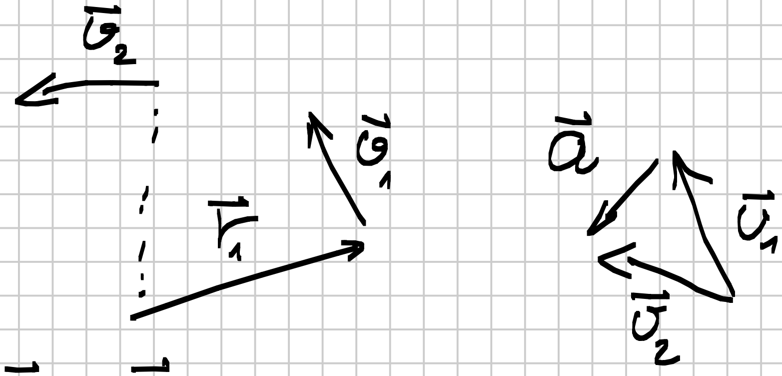
$$\frac{d}{dt} \vec{e}_r = \underbrace{\vec{e}_x}_{\text{Const.}} \cdot \frac{d}{dt} \cos(\varphi(t)) + \vec{e}_y \frac{d}{dt} \sin(\varphi(t))$$

$$= \vec{e}_x \, (-\sin\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) + \vec{e}_y \cos(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t)$$

$$= \dot{\varphi}\,(-\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y) = \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

Bsp: Gleichförmige Kreisbewegung

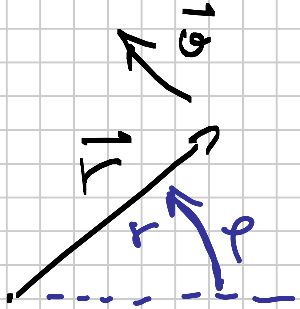


$$\vec{a} \approx \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t}$$

Faktum: Personen sind fest am Karussel

$\Rightarrow$ Es gibt eine Scheinkraft, die der Beschleunigung nach innen entgegen wirkt $\vec{a} \sim -\vec{r}$: $\vec{F} = +m\,\omega^2/r\ \vec{e}_r$ nach außen gerichtete „Fliehkraft"

Mathematische Beschreibung:



Koordinaten r, φ
mit $r = const$, $\varphi = \omega \cdot t$
$\dot{r} = 0$ $\quad \dot{\varphi} = \omega$

$\vec{v} = \omega \cdot r\,\vec{e}_\varphi$ $\quad \vec{v} \perp \vec{r} \parallel \vec{e}_r$

$\vec{v} \perp \vec{e}_z$ (senkrecht zur Tafelebene)

Einheitsvektoren $\vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_r$ und $\vec{e}_z$ bilden lokales ONS

Es gilt: $\vec{e}_z \times \vec{e}_r = \vec{e}_\varphi$

$$\vec{v} = \omega \cdot r \cdot \vec{e}_z \times \vec{e}_r$$
$$= \omega \vec{e}_z \times \vec{r}$$

Definiere: $\vec{\omega} := \omega \vec{e}_z$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

Einschub:

und allgemein ($\dot{r} \neq 0$): $\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + \vec{\omega} \times \vec{r}$

Ebenso ergibt sich $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi\right)$

$$\vec a = \ddot r\, \vec e_r + \underbrace{\dot r\, \dot{\vec e}_r}_{\dot r \dot\varphi \vec e_\varphi} + \dot r\, \dot\varphi\, \vec e_\varphi + r\, \ddot\varphi\, \vec e_\varphi + \underbrace{r\, \dot\varphi\, \dot{\vec e}_\varphi}_{-r\dot\varphi^2 \vec e_r}$$

$$\vec a = (\ddot r - r\dot\varphi^2)\, \vec e_r + (r\ddot\varphi + 2\dot r \dot\varphi)\, \vec e_\varphi$$

Radialbeschleunigung $\ddot r$

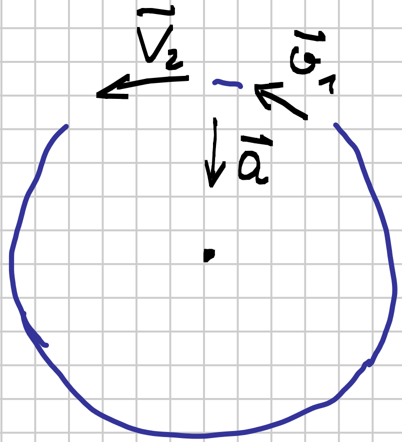
Radialkomponente der Beschleunigung: $\ddot r - r\dot\varphi^2$!

Bsp:

Gleichförmige Kreisbewegung:

$r = \text{const} \qquad \dot{\varphi} = \omega$

$\ddot{r} = \dot{r} = 0 \qquad \ddot{\varphi} = 0$



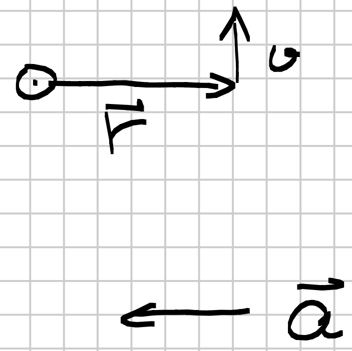
$$\vec{a} = -r\dot{\varphi}^2 \vec{e}_r$$

$$\vec{a} = -r\omega^2 \vec{e}_r$$

$$\underline{\vec{a} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})} = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

$\vec{\omega}$ (aus der Tafelebene heraus)



Zentripetalkraft: $\vec{F} = m\vec{a} = m(\vec{\omega} \times \vec{v}) \sim -\vec{r}$

$\Rightarrow$ Manche Zusammenhänge in krummlinigen Koordinaten einfach zu beschreiben.

Allgemeiner: Bewegung in einem rotierenden System

Corioliskraft: Im Bsp sei $\vec{v} \parallel \vec{r}$

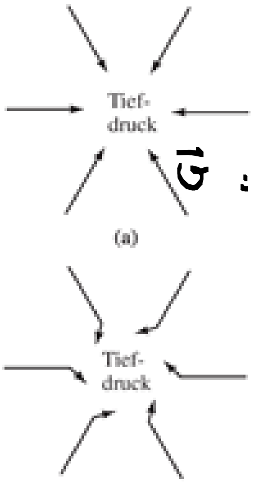
$\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v}$

$$\otimes \xrightarrow{\vec{v}}$$

$$\downarrow \vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

(c)

(d)

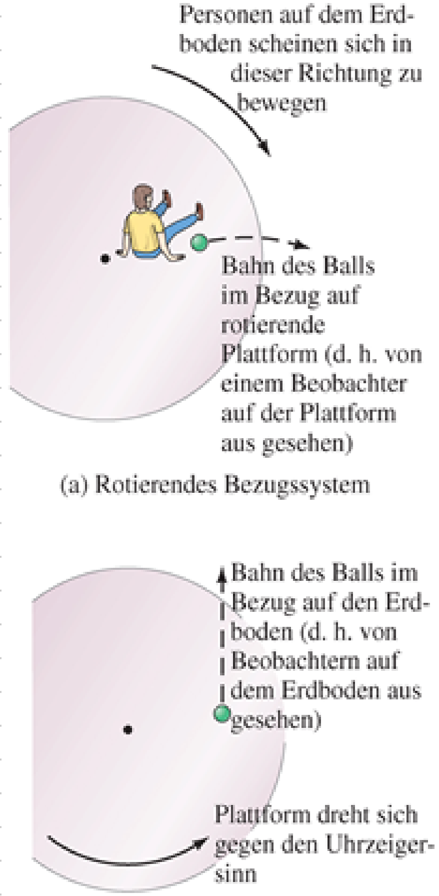


(a)

(b)

$\vec{v}$: Bewegung der Luftmassen

Hier gelte $\vec{v} \gg (\vec{\omega} \times \vec{r})$



(a) Rotierendes Bezugssystem

(b) Inertialsystem

Zylinderkoordinaten: $(x, y, z) \longrightarrow (r, \varphi, z)$

$x = r \cos\varphi$

$y = r \sin\varphi$

$z = z$

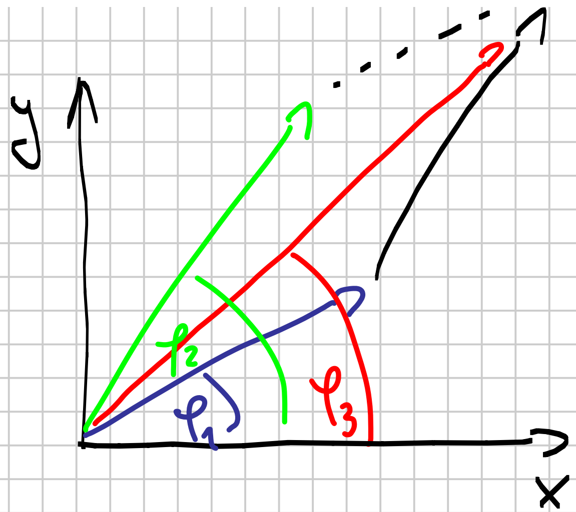
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\varphi = \begin{cases} \arccos \frac{x}{r} & \text{für } x \geq 0 \quad r > 0 \\ 2\pi - \arccos \frac{x}{r} & x < 0 \quad r > 0 \\ \text{beliebig} & r = 0 \end{cases}$$

Rechnen mit Zylinderkoordinaten

$\vec{a}_1 = (r_1, \varphi_1, z_1)$ $\quad$ $\vec{a}_2 = (r_2, \varphi_2, z_2)$

Kartesische Basis $\quad \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} r_1 \cos\varphi_1 \\ r_1 \sin\varphi_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} r_2 \cos\varphi \\ r_2 \sin\varphi \\ z_2 \end{pmatrix}$



$r_3 = \dots$

$\varphi_3 \neq \varphi_1 + \varphi_2$

- Skalare Multiplikation: $\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad \vec{a} = (r, \varphi, z)$

$$\lambda \cdot \vec{a} = (\lambda r, \varphi, \lambda z)$$

- Skalarprodukt: $\vec{a}_1 = (r_1, \varphi_1, z_1) \quad \vec{a}_2 = (r_2, \varphi_2, z_2)$

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = r_1 \cdot r_2 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cdot \vec{e}_r^{\,2} + r_1 r_2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \, \vec{e}_\varphi^{\,2} + z_1 z_2 \, \vec{e}_z^{\,2}$$

$$= r_1 r_2 (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + z_1 z_2$$

$$= r_1 r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + z_1 z_2$$

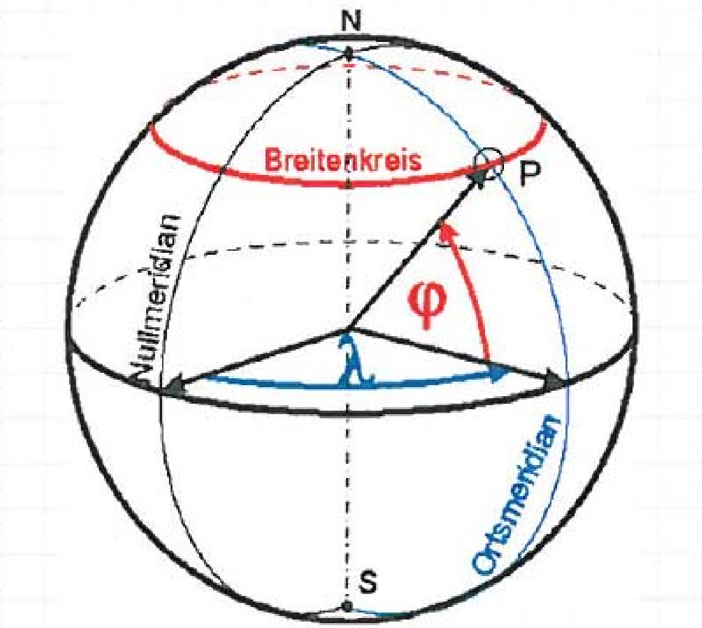
$$|\vec{a}| = \sqrt{r^2 + z^2} \qquad \cos\alpha = \frac{\vec{a}_1 \, \vec{a}_2}{|\vec{a}_1||\vec{a}_2|} = \frac{r_1 r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + z_1 z_2}{\sqrt{r_1^2 + z_1^2} \sqrt{r_2^2 + z_2^2}}$$

$\Rightarrow \alpha \neq \varphi_2 - \varphi_1$ (außer für $z = 0$)

$\Rightarrow$ Rechnen in krummlinigen Koordinaten (lokale Basis) oft mühsam

Polarkoordinaten (Kugelkoordinaten):

Bsp Kugeloberfläche (Erde)



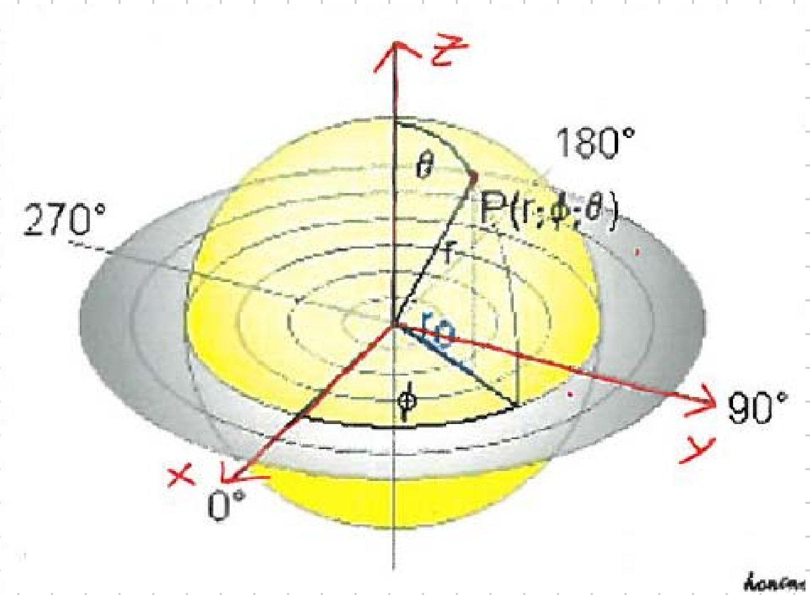
Koordinaten (λ, φ)

„Länge": $-180° \leq \lambda \leq 180°$

östliche bzw westliche Länge

„Breite": $-90° \leq \varphi \leq 90°$

südliche bzw nördliche Breite



$$\vec{a} = (r, \phi, \theta) \qquad 0 \leq r < \infty$$

Azimuthwinkel: $0 \leq \phi < 2\pi$

Polarwinkel: $0 \leq \theta < \pi$

$$x = r \sin\theta \cos\phi$$

$$y = r \sin\theta \sin\phi$$

$$z = r \cos\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad \theta = \arccos\frac{z}{r} \quad \text{für } r > 0$$

$$\phi = \begin{cases} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } y < 0 \end{cases}$$

=> gleiche Problematik wie bei Zylinder Koordinaten

Winkel zwischen Vektoren i.a. nicht $\phi_2 - \phi_1$ bzw $\theta_2 - \theta_1$

=> Berechnen mit Skalarprodukt

Aber:

Einfache Darstellung des Gravitationsfeldes (Punktmasse)

$\vec{F} = m \cdot \vec{g}(\vec{r})$ mit $\vec{g}(\vec{r}) = -\frac{\gamma \cdot M}{r^2} \cdot \vec{e}_r$